ОБЩИЙ ВЗГЛЯД НА МАТЕМАТИКУ

Александров А.Д.

«Математика, ее содержание, методы и значение», т I., 1956, с. 5-78

Содержание

Правильное представление о любой науке не складывается из отдельных, касающихся ее сведений, даже если они довольно обширны. Нужно еще иметь верный взгляд на науку в целом, понимать сущность данной науки. Цель этой главы состоит в том, чтобы дать общее представление о сущности математики. Для этого нет большой необходимости входить в подробное рассмотрение новых математических теорий, потому что уже история этой науки и элементарная математика дают достаточно оснований для общих выводов.

Огл. § 1. Особенности математики

1. Даже при довольно поверхностном знакомстве с математикой легко заметить характерные ее черты: это, во-первых, ее отвлеченность, во-вторых, точность или, лучше сказать, логическая строгость и как бы непреложность ее выводов и, наконец, чрезвычайная широта ее применений.

Отвлеченность проявляется уже в простом счете. Мы оперируем отвлеченными числами, не заботясь о том, чтобы связывать их каждый раз с конкретными предметами. Мы учим в школе абстрактную таблицу умножения — таблицу умножения чисел вообще, а не числа мальчиков на число яблок или числа яблок на цену яблока и т. п.

Точно так же в геометрии рассматривают, например, прямые линии, а не натянутые нити, причем в понятии геометрической линии отвлекаются от всех свойств, оставляя только протяжение в одном направлении. Вообще понятие о геометрической фигуре является результатом отвлечения от всех свойств реальных предметов, кроме пространственной формы и размеров.

Такого рода отвлечения характерны для всей математики. Понятия о целом числе и о геометрической фигуре — это лишь одни из первоначальных ее понятий. За ними следует едва обозримое множество других, возвышающихся до таких абстракций, как комплексные числа, функции, интегралы, дифференциалы, функционалы, n-мерные и даже бесконечномерные пространства и т. д. и т. п. Абстракции эти как будто громоздятся одна на другую, удаляясь в такую отвлеченность, где, кажется, теряется уже всякая связь с жизнью и где «простой смертный» не поймет ничего, кроме того, что «все это непонятно».

На самом деле это, конечно, не так. И хотя, скажем, понятие n-мерного пространства действительно очень абстрактно, оно тем не менее имеет вполне реальное содержание, понять которое вовсе не так трудно. В этой книге будет, в частности, подчеркнут и пояснен реальный смысл перечисленных абстрактных понятий, и читатель убедится, что все они связаны с жизнью и по своему происхождению и в приложениях.

Впрочем, абстракция — не исключительная принадлежность математики: она свойственна всякой науке, да и всему человеческому мышлению вообще. Поэтому отвлеченность математических понятий не исчерпывает еще особенностей математики.

Математика в отношении своих абстракций отличается еще тем, что она, во-первых, оставляет в них прежде всего количественные отношения и пространственные формы, отвлекаясь от всего остального. Во-вторых, математические абстракции возникают через ряд ступеней; они идут в отвлечении гораздо дальше, чем абстракции, обычные в естественных науках. Эти два момента мы дальше подробно выясним на примерах основных понятий математики: числа и фигуры. Наконец,— и это бросается в глаза,— математика, как таковая, сама по себе вообще почти целиком вращается в кругу абстрактных понятий и их связей. Если естествоиспытатель для доказательства своих утверждений постоянно обращается к опыту, то математик доказывает теоремы только рассуждениями и выкладками.

Конечно, и математики для открытия своих теорем и методов постоянно пользуются моделями, физическими аналогиями, обращаются к множеству отдельных, совершенно конкретных примеров и т. п. Все это служит реальным источником теории, служит для нахождения ее теорем, но каждая теорема окончательно входит в математику только тогда, когда она строго доказана логическим рассуждением. Если бы геометр, докладывая о новой открытой им теореме, стал демонстрировать ее на моделях и этим ограничился, никто из математиков не признал бы теорему доказанной. Требование доказать теорему хорошо известно уже из школьного курса геометрии, и оно проходит через всю математику. Мы могли бы измерять углы у оснований тысячи равнобедренных треугольников с огромной точностью, но это не дало бы нам математического доказательства теоремы о том, что углы при основании равнобедренного треугольника равны. Математика требует вывести этот результат из основных понятий геометрии. (Теперь при строгом изложении геометрии свойства основных понятий точно формулируют в аксиомах.) И так всегда: доказать теорему для математика означает вывести ее путем рассуждения из начальных свойств, присущих тем понятиям, которые фигурируют в этой теореме. Таким образом, не только понятия, но и метод математики оказывается отвлеченным, умозрительным.

Сами математические выводы отличаются большой логической строгостью. Математическое рассуждение проводится с такой скрупулезностью, которая делает его бесспорным и убедительным для каждого, кто только его поймет. Эта скрупулезность и убедительность математических доказательств хорошо известна уже из курса средней школы. Да и сами математические истины представляются совершенно бесспорными. Недаром говорят: «доказать как дважды два четыре». Здесь математическое соотношение $2 \times 2 = 4$ берется именно как образец неопровержимости и бесспорности.

Однако строгость математики не абсолютна: она развивается; принципы математики не застыли раз навсегда, а движутся и тоже могут служить и служат предметом научных споров.

В конечном счете источник жизненности математики заключается в том, что ее понятия и выводы при всей своей отвлеченности исходят, как мы убедимся, из действительности и находят широкие применения в других науках, в технике, во всей жизненной практике; это — самое главное для понимания математики.

Исключительная широта применений математики представляет тоже одну из характерных ее особенностей,

Во-первых, мы постоянно, чуть ли не ежечасно, на производстве, в быту, в общественной жизни пользуемся наиболее распространенными понятиями и выводами математики, вовсе не задумываясь об этом. Так, мы применяем арифметику, считая дни или расходы, а подсчитывая площадь квартиры, используем выводы геометрии. Выводы эти, конечно, очень простые, но полезно вспомнить, что когда-то в древности они были одним из высших достижений зарождавшейся тогда математики.

Во-вторых, вся современная техника была бы невозможна без математики. Без более или менее сложных расчетов не обходится, пожалуй, ни одно техническое усовершенствование; в развитии же новых областей техники математика играет очень важную роль.

Наконец, почти все науки более или менее существенно пользуются математикой. «Точные науки» — механика, астрономия, физика, а также в большой мере и химия — обычно выражают свои законы формулами (как это знакомо каждому еще со школьной скамьи) и развивают свои теории, широко используя математический аппарат. Без математики прогресс этих наук был бы просто невозможен. Поэтому как раз потребности механики, астрономии и физики всегда оказывали прямое, решающее воздействие на развитие математики.

В других науках математика играет меньшую роль, но и там она находит важные применения. Конечно, в изучении таких сложных явлений, как явления биологические и общественные, математический метод по существу не может играть такой же роли, как, скажем, в физике. Всегда, а здесь тем более, применение математики имеет смысл только в единении с глубокой теорией конкретного явления. Об этом важно помнить, чтобы не сбиваться на простую игру в формулы, за которой не стояло бы никакого реального содержания. Но так или иначе, математика находит приложения почти во всех науках, от механики до политической экономии.

Напомним несколько примеров особенно блестящих применений математики в точных науках и технике.

Одна из самых далеких планет солнечной системы Нептун была открыта в 1846 г. на основании математических расчетов. Анализируя неправильности в движении планеты Уран, астрономы Адаме и Леверье пришли к выводу, что неправильности эти вызваны притяжением другой планеты. Леверье на основании законов механики и закона тяготения вычислил, где эта планета должна была находиться, и наблюдатель, которому он об этом сообщил, увидел ее в телескоп там, где указал

Леверье. Это открытие было не только триумфом механики и астрономии, особенно системы Коперника, но также триумфом математического расчета.

Другой, не менее убедительный пример представляет открытие электромагнитных волн. Английский физик Максвелл, обобщая установленные опытами законы электромагнитных явлений, выразил эти законы в виде уравнений. Из уравнений он чисто математически вывел, что могут существовать электромагнитные волны и что они должны распространяться со скоростью света. Опираясь на это, он предложил электромагнитную теорию света, которая затем была всесторонне развита и обоснована. Но, кроме того, вывод Максвелла толкнул на поиски электромагнитных волн чисто электрического происхождения, например испускаемых при колебательном разряде. Такие волны были действительно открыты Герцем. А вскоре А. С. Попов нашел средства возбуждения, передачи и приема электромагнитных колебаний, вывел их в область широких применений и положил тем самым начало всей радиотехнике. В открытии радио, ставшего общим достоянием, сыграли большую роль также результаты чисто математического вывода.

Так от наблюдений, — каковы, например, наблюдения отклонений магнитной стрелки электрическим током,— наука идет к обобщению, к теории явлений, к формулировке законов и их математическому выражению. Из этих законов рождаются новые выводы, и, наконец, теория воплощается в практике, которая в свою очередь дает теории новые мощные импульсы к развитию.

Особенно замечательно, что даже самые абстрактные построения математики, возникшие внутри нее самой, уже без непосредственных толчков со стороны естествознания или техники, находят тем не менее плодотворные применения. Например, мнимые числа появились на свет в алгебре, и долгое время их реальный смысл оставался непонятным, на что показывает само их название. Однако после того, как в начале прошлого столетия им было дано геометрическое толкование (см. главу IV, § 2), мнимые числа вполне укрепились в математике, и возникла обширная теория функций комплексной переменной (т. е. переменной вида x + Ö -1). Эта теория, так сказать, «мнимых» функций от «мнимых» переменных оказалась вовсе не мнимым, а очень реальным средством решения вопросов техники. Так, основная теорема Н. Е. Жуковского о подъемной силе крыла самолета доказывается как раз средствами этой теории. Та же теория оказывается полезной, например, при решении задач о просачивании воды под плотинами,— задач, значение которых очевидно в период строительства крупных гидроэлектростанций.

Другой, не менее блестящий пример представляет неэвклидова геометрия [1]. Она возникла на почве тысячелетних, тянувшихся со времен Эвклида попыток доказать аксиому о параллельных, т. е. из задачи, имевшей чисто математический интерес. Н. И. Лобачевский, создавший эту новую геометрию, сам осторожно называл ее «воображаемой», так как не мог указать ее реального значения, хотя и был уверен в том, что такое значение ее найдется. Выводы его геометрии казались большинству не то что «воображаемыми», но даже невообразимыми и нелепыми. Тем не менее идеи Лобачевского положили начало новому развитию геометрии, созданию теорий разных неэвклидовых пространств; потом эти идеи послужили одной из основ общей теории относительности, причем математическим аппаратом этой теории служит одна из форм неэвклидовой геометрии четырехмерного пространства. Так, казавшиеся по меньшей мере непонятными абстрактные построения математики оказались мощным средством развития одной из важнейших физических теорий. Точно так же в современной теории атомных явлений, в так называемой квантовой механике, существенно используются многие чрезвычайно абстрактные математические понятия и теории, как, например, понятие бесконечномерного пространства и др.

Нет нужды углубляться в перечисление примеров; мы достаточно подчеркнули, что математика имеет широчайшее применение в повседневной практике, в технике, в науке, причем в точных науках и больших проблемах техники находят также применения теории, выросшие внутри самой математики. Такова одна из характерных особенностей математики наряду с ее отвлеченностью, строгостью и убедительностью ее выводов.

2. Обратив внимание на все эти особенности математики, мы, конечно, не выяснили ее сущности, а указали, скорее, ее внешние признаки. Задача состоит в том, чтобы объяснить эти особенности. Для этого нужно ответить, по крайней мере, на следующие вопросы:

Что отражают абстрактные математические понятия? Каков, иными словами, реальный предмет математики?

Почему отвлеченные математические выводы представляются столь убедительными, а первичные понятия столь очевидными? В чем, иными словами, основание метода математики?

Почему при всей своей отвлеченности математика находит широчайшее применение, а не оказывается праздной игрой в абстракции? Иными словами: откуда значение математики?

Наконец, какие силы двигают развитие математики, позволяя ей соединять абстрактность и широту применений? Иными словами: в чем содержание процесса развития математики?

Ответив на эти вопросы, мы получим общее представление о предмете математики, об основаниях ее метода, о ее значении и развитии, т. е. поймем ее сущность.

Идеалисты и метафизики не только путаются в решении этих коренных вопросов, но доходят до полного извращения математики, выворачивая ее в буквальном смысле наизнанку. Так, видя крайнюю отвлеченность и убедительность математических выводов, идеалисты воображают, что математика происходит из чистого мышления.

В действительности математика не дает никаких оснований для идеализма и метафизики; как раз наоборот: рассматриваемая объективно во всех ее связях и развитии, она дает еще одно блестящее подтверждение диалектического материализма и каждым своим шагом опровергает идеализм и метафизику. Мы убедимся в этом, когда попытаемся даже в самых общих чертах ответить на поставленные выше вопросы о сущности математики. Мы убедимся также, что ответ на эти вопросы уже заключается в положениях, установленных классиками марксизма как относительно математики, так и относительно природы науки и познания вообще. Для предварительного выяснения этих вопросов достаточно рассмотреть основания арифметики и элементарной геометрии. К ним мы и обратимся. Дальнейшее проникновение в математику, конечно, углубит и разовьет, но никак не отменит полученные при этом выводы.

Огл. § 2. Арифметика

1. Понятие о числе (мы говорим пока только о целых положительных числах) — это понятие, такое для нас привычное, вырабатывалось очень медленно. Об этом можно судить хотя бы по тому, как считали народы, еще совсем недавно стоявшие на разных ступенях первобытнообщинного строя. У некоторых из них не было даже названий для чисел больше двух или трех, у других счет шел дальше, но так или иначе он сравнительно-быстро кончался, и о большем числе они говорили просто «много» или «неисчислимо». Это показывает, что запас ясно различаемых чисел накапливался у людей постепенно.

Вначале люди не имели понятия о числе, хотя и могли по-своему судить о размерах той или иной совокупности вещей, встречавшейся в их практике. Надо думать, что число воспринималось ими непосредственно как неотъемлемое свойство совокупности предметов, которое, однако, еще ими явно не выделялось. Мы настолько привыкли к счету, что едва ли можем себе это представить, но понять это можно [2].

На более высокой ступени число уже указывается как свойство совокупности предметов, но еще не отделяется от нее как «отвлеченное число», как число вообще, не связанное с конкретными предметами. Это видно из таких названий чисел у некоторых народов, как «рука» для пяти, «весь человек» — для двадцати и т. п. Здесь пять понимается не отвлеченно, а просто как «столько же, сколько пальцев на руке», двадцать — как «столько же, сколько всех пальцев у человека» и т. п. Совершенно аналогично у некоторых народов не было, например, понятий «черный», «твердый», «круглый». Чтобы сказать, что предмет черный, они сравнивали его, допустим, с вороном, а чтобы сказать, что имеется пять предметов, они прямо сравнивали эти предметы с рукой. Бывало и так, что разные названия чисел употреблялись для разного рода предметов: одни числа для счета людей, другие для счета лодок и т. д. до десяти разных сортов чисел. Тут нет отвлеченных чисел, они являются как бы «именованными», относящимися только к определенному роду предметов. У других народов вообще нет отдельных названий для чисел, например нет слова «три», хотя они могут сказать: «три человека», «в трех местах» и т. п.

Аналогично этому мы легко говорим, что тот или иной предмет черный, но гораздо реже говорим о «черноте» самой по себе, — это понятие представляется более абстрактным [3].

Число предметов есть свойство некоторой их совокупности, число же, как таковое, иными словами «отвлеченное число», есть это свойство, отвлеченное от конкретных совокупностей и мыслимое уже само по себе, подобно «черноте», «твердости» и т. п. Как чернота есть общее свойство предметов цвета угля, так число «пять» есть общее свойство всех совокупностей, содержащих столько же предметов, сколько пальцев на руке.

При этом сама равночисленность устанавливается простым сравнением: беря предмет из совокупности, мы загибаем один палец и так пересчитываем их по пальцам. Вообще сопоставлением предметов двух совокупностей можно, вовсе не пользуясь числами, установить, одинаковое ли в них число предметов. Так, гости, рассаживаясь за столом и ничего не считая, легко поправляют хозяйку, если она забыла один прибор: один гость остался без прибора.

Таким образом, можно дать следующее определение числа: каждое отдельное число, как «два», «пять» и т. п., есть свойство совокупностей предметов, общее для всех совокупностей, предметы которых можно сопоставить по одному, и различное у таких совокупностей, для которых такое сопоставление невозможно.

Для того чтобы обнаружить и ясно выделить это общее свойство, т. е. для того чтобы образовать понятие о том или ином числе и дать ему название «шесть», «десять» и т. д., нужно было сравнить между собой немало совокупностей предметов. Люди считали на протяжении долгих поколений, миллионы раз повторяя одни и те же операции, и так на практике обнаруживали числа и отношения между ними.

2. Действия, операции над числами возникали, в свою очередь, как отражение реальных действий над конкретными предметами. Это заметно и в названиях чисел. Так, например, у некоторых индейцев число «двадцать шесть» произносится, как «на два десятка я кладу сверху шесть». Ясно, что здесь отражается конкретный способ пересчитывания предметов. Тем более ясно, что сложение чисел соответствует складыванию, соединению двух или нескольких совокупностей в одну. Также легко видеть конкретный смысл вычитания, умножения и деления (умножение, в частности, в большой мере происходит, видимо, от счета равными совокупностями: по 2, по 3 и т. п.).

В процессе счета люди открывали и усваивали не только связи между отдельными числами, как, например, то, что два и три будет пять, но устанавливали постепенно и общие законы. На практике обнаруживалось, что сумма не зависит от порядка слагаемых или что результат счета данных предметов не зависит от того, в каком порядке этот счет производится. (Это последнее обстоятельство находит выражение в совпадении «порядковых» и «количественных» чисел: первый, второй и т. д. и один, два и т. д.) Таким образом, числа выступали не как отдельные и независимые, а в связи друг с другом.

Одни числа выражаются через другие даже в названиях и записи. Так, «двадцать» означает «два (раза) десять», по-французски 80 — «четыре-двадцать» (quatre-vingt), 90 — «четыре-двадцать-десять», а, например, римские цифры VIII, IX означают, что $8 = 5+3$, $9 = 10 - 1$.

В общем, возникали не просто отдельные числа, а система чисел с ее связями и законами.

Предмет арифметики составляет именно система чисел с ее связями и законами [4]. Отдельное отвлеченное число само по себе не имеет содержательных свойств, и о нем вообще мало что можно сказать. Если мы спросим себя, например, о свойствах числа 6, то заметим, что $6 = 5+1$, $6 = 3\text{-}2$, что 6 есть делитель 30 и т. п. Но здесь всюду число 6 связывается с другими числами, так что свойства данного числа состоят именно в его отношениях к другим числам [5]. Тем более ясно, что всякое арифметическое действие определяет связь, или, иными словами, отношение между числами.

Таким образом, арифметика имеет дело с отношениями между числами. Но отношения между числами являются отвлеченными образами реальных количественных отношений между совокупностями предметов, поэтому можно сказать, что арифметика есть наука о реальных количественных отношениях, рассматриваемых, однако, отвлеченно, так сказать, в чистом виде.

Арифметика, как мы видим, происходит не из чистого мышления, как стараются изобразить идеалисты, а отражает определенные свойства реальных вещей; она возникла в результате долгого практического опыта многих поколений.

3. Чем обширнее и сложнее становилась общественная практика, тем более широкие задачи она ставила. Нужно было не только отмечать количество предметов и обмениваться мыслями об их числе, что уже потребовало формирования понятия числа и названий чисел, но надо было учиться считать все большие совокупности (будь то животные в стаде, предметы при обмене, дни до намеченного срока и т. п.), фиксировать и передавать другим результаты счета, что как раз и требовало совершенствования названий, а затем и обозначений для чисел.

Введение обозначений для чисел, идущее, по-видимому, от самого зарождения письменности, сыграло громадную роль в развитии арифметики. Кроме того, это был первый шаг к математическим знакам и формулам вообще. Следующий шаг, состоявший во введении знаков для арифметических действий и буквенного обозначения для неизвестного (x), был сделан гораздо позже.

Понятие числа, как всякое абстрактное понятие, не имеет одного непосредственного образа, его нельзя представить, а можно только мыслить. Но мысль оформляется в языке, поэтому без названия нет и понятия. Обозначение есть то же название, только не звуковое, а письменное, и оно воспроизводится мыслью в виде зрительного образа. Например, если я скажу «семь», что вы представляете? Вероятно, не семь каких-нибудь предметов, а прежде всего цифру «7»; она и служит материальной оболочкой для отвлеченного числа «семь». А такое число, как, например, 18 273, заметно труднее произнести, чем написать, и уж вовсе нельзя с полной точностью представить себе в образе совокупности предметов. Таким образом, обозначения помогли, хотя и не сразу, создать понятие о таких числах, которых уже нельзя было обнаружить в простом наблюдении и непосредственном пересчитывании. В этом была практическая необходимость: с появлением государства нужно было собирать подати, собирать и снабжать войско и т. п., что требовало операций с очень большими числами.

Итак, во-первых, роль обозначений для чисел состоит в том, что они дают простое воплощение понятия отвлеченного числа [6]. Такова роль математических обозначений вообще: они дают воплощение отвлеченных математических понятий. Так, + означает сложение, х — неизвестное число, а — любое данное число и т. д. Во-вторых, обозначения чисел дают возможность особенно просто осуществлять действия над ними. Каждый знает, насколько легче «подсчитать на бумаге», чем «в уме». Такое же значение имеют математические знаки и формулы вообще: они позволяют заменять часть рассуждений выкладками, т. е. чем-то почти механическим. К тому же, если выкладка написана, она имеет уже определенную достоверность. Тут все видно, все можно проверить, все определяется точными правилами. Для примера можно вспомнить сложение «столбиком» или любое алгебраическое преобразование, как, например, «перенесение в другую часть равенства с изменением знака».

Из сказанного ясно, что без подходящих обозначений для чисел арифметика не могла бы продвинуться далеко вперед. Тем более современная математика была бы просто невозможна без специальных знаков и формул.

Само собой понятно, что люди далеко не сразу смогли выработать современный, столь удобный, способ записи чисел. С древних времен у разных народов с начатками культуры появлялись разные числовые обозначения, мало похожие на наши современные не только по начертанию знаков, но и по принципам; не всюду, например, пользовались именно десятичной системой (так, у древних вавилонян была смешанная десятичная и шестидесятиричная система). На прилагаемой таблице показаны для примера некоторые из обозначений чисел у разных народов. В частности, мы видим, что древние греки, а потом и русские пользовались алфавитными обозначениями. Наши современные «арабские» цифры и вообще способ записи чисел происходят из Индии, откуда они были занесены арабами в X в. в Европу, где окончательно укоренились в течение нескольких столетий.

Обозначения чисел у разных народов

Обозначения чисел у разных народов.

Заимствовано из статьи И. Г. Багамаковой и А. П. Юшкевича «Происхождение систем счисления» («Энциклопедия элементарной математики», т. I, М., 1951)

Первая особенность нашей системы состоит в том, что она десятичная. Но особенность эта не очень существенная, потому что можно было бы пользоваться с успехом, скажем, двенадцатиричной системой, введя особые обозначения для десяти и одиннадцати.

Главная особенность нашей системы обозначений состоит в том, что она — «позиционная», т. е. в ней одна и та же цифра имеет разное значение в зависимости от занимаемого места. Так, например, в обозначении 372 цифра 3 обозначает число сотен, а 7 — число десятков. Такой способ записи не только краток и прост, но крайне облегчает вычисления. Римские обозначения куда менее удобны: то же число 372 запишется по-римски так: CCCLXXII, а умножать большие числа, записанные поримски, совсем неудобно.

Позиционная запись чисел требует, чтобы как-то отмечался пропущенный разряд, так как если его не отмечать, то мы будем путать, например, триста один и тридцать один. На месте пропущенного разряда ставится нуль; так мы различаем 301 и 31. В зачаточном виде нуль появляется уже в поздних вавилонских клинописях. Систематическое введение нуля было достижением индийцев [7]: оно-то и позволило им довести до конца позиционную систему записи чисел, которой мы сейчас пользуемся.

Но этого мало: нуль стал тоже числом, войдя в систему чисел. Сам по себе нуль есть ничто — на санскритском (древнеиндийском) языке он так и называется: «пустой» (çûnga), но в связи с другими числами нуль приобретает содержание, приобретает известные свойства, — хотя бы то, что любое число плюс нуль есть то же число, а умноженное на нуль есть нуль.

4. Вернемся к арифметике древних. Старейшие, дошедшие до нас математические тексты из Вавилона и Егип-

та восходят ко второму тысячелетию до н. э. Эти и более поздние тексты содержат разнообразные арифметические задачи с решениями, и притом даже такие, которые относятся теперь к алгебре, как решения некоторых квадратных и даже кубических уравнений или прогрессии (все это, конечно, на конкретных задачах и численных примерах). Из Вавилона дошли до нас также таблицы квадратов, кубов и обратных чисел. Есть предположение, что там уже складывались математические интересы, не связанные непосредственно с отдельными практическими задачами.

Во всяком случае в древнем Вавилоне и Египте арифметика была хорошо развита. Но она не была еще математической теорией чисел, а набором правил счета и решения различных задач. Так, впрочем, преподают арифметику в начальной школе по настоящее время и так же понимают ее все, кто не занимался специально математикой. Это вполне законно, но все же в таком виде арифметика не есть еще математическая теория: в ней нет общих теорем о числах.

Переход к теоретической арифметике происходил постепенно.

Обозначения, как мы говорили, дают возможность оперировать с такими большими числами, которые уже нельзя наглядно представить в виде совокупности предметов и до которых нельзя дойти, считая подряд от единицы. Если у диких племен числа обрываются на 3, 10, 100 и т. п., а дальше следует неопределенное «много», то обозначения дали возможность в Китае, Вавилоне, Египте идти за десятки тысяч и даже за миллионы. Тут уже намечалась возможность неограниченного продолжения числового ряда. Но ясно осознана она была не сразу, когда точно, мы не знаем. Еще Архимед (287—212 гг. до н. э.) в своем знаменитом сочинении «Об исчислении песка» указывал способ назвать число, большее числа песчинок, которое могло бы уместиться в «шаре неподвижных звезд». Возможность назвать и записать такое число, стало быть, еще требовала в то время подробного разъяснения.

Греки к III веку до н. э. уже ясно осознали две важные идеи: во-первых, что ряд чисел можно неограниченно продолжать, и, во-вторых, что можно не только оперировать с любыми данными числами, но и рассуждать о числах вообще, формулируя и доказывая общие теоремы о числах. Это было обобщением огромного предшествующего опыта в оперировании с конкретными числами. Именно из этого опыта выявились общие законы и приемы общих рассуждений о числах. Произошел переход на более высокую ступень абстракции: от отдельных данных (хотя и отвлеченных) чисел к числу вообще, к любому возможному числу.

От простого процесса пересчитывания предметов по одному мы переходам к представлению о неограниченном процессе образования чисел путем прибавления единицы к ранее построенному числу. Ряд чисел мыслится уже неограниченно продолжаемым, и с ним в математику вступает бесконечность. Конечно, мы фактически не можем путем прибавления единиц зайти сколь угодно далеко в ряду чисел: кто сможет досчитать до миллиона миллионов, если даже сто лет содержат почти в 40 раз меньше секунд? Но не в том дело. Процесс накопления единиц, процесс образования сколь угодно больших совокупностей предметов принципиально не ограничен, и, стало быть, есть потенциальная возможность неограниченного продолжения числового ряда. Практическая ограниченность счета тут не при чем, от нее отвлекаются. Общие теоремы о числах касаются уже этого неограниченно продолжаемого ряда чисел.

Общие теоремы о каком-либо свойстве любого числа уже содержат в скрытом виде бесконечно много утверждений о свойствах отдельных чисел и качественно богаче каких-либо частных утверждений, которые можно было бы проверить для отдельных чисел. Поэтому общие теоремы необходимо должны доказываться путем общих рассуждений, исходящих из самого закона образования ряда чисел. Здесь открывается глубокая особенность математики: математика имеет своим предметом не только данные количественные отношения, но вообще возможные количественные отношения и, стало быть, бесконечность.

В знаменитых «Началах» Эвклида, написанных в III в. до н. э., есть уже общие теоремы о целых числах, в частности теорема о том, что существуют сколь угодно большие простые числа [8].

Так арифметика превращается в теорию чисел. Она уже отвлекается от конкретных частных задач и вращается в области отвлеченных понятий и рассуждений. Она становится частью «чистой» математики. Вернее, это и был момент рождения самой чистой математики со всеми ее особенностями, о которых шла речь в п. 1. Нужно, правда, заметить, что чистая математика рождалась одновременно из арифметики и геометрии. Кроме того, в общих правилах арифметики имелись уже зачатки алгебры, которая отделилась от арифметики позже. Но об этом мы будем говорить ниже.

Теперь же остается только подвести итоги всех наших выводов, потому что мы хотя и очень бегло, но все же проследили процесс возникновения теоретической арифметики от самого зарождения понятия о числе.

5. Поскольку рождение теоретической арифметики было частью рождения математики, мы, естественно, можем ожидать, что наши выводы об арифметике осветят общие вопросы, касающиеся математики вообще. Вспомним эти вопросы, применяя их к арифметике.

1° Как возникают и что отражают в действительности отвлеченные понятия арифметики?

На этот вопрос отвечает все, что было рассказано о зарождении арифметики. Ее понятия отражают количественные отношения совокупностей предметов. Возникали эти понятия путем абстракции, на основе анализа и обобщения громадного практического опыта. Они возникали при этом постепенно; сначала числа, связанные с конкретными предметами, потом отвлеченные числа и, наконец, понятие о числе вообще, о любом возможном числе. Каждая из этих ступеней подготовлялась накоплением опыта с применением предыдущих понятий. (Таков, кстати, один из основных законов образования математических понятий: они рождаются путем последовательного ряда абстракций и обобщений, опирающихся па накопленный опыт применения предшествующих отвлеченных понятий).

История возникновения понятий арифметики доказывает всю ошибочность идеалистических взглядов о том, будто эти понятия происходят из «чистого мышления», из «первоинтуиции», из «созерцания в априорных формах» и мало ли еще из чего.

2° Почему выводы арифметики представляются такими убедительными и непреложными?

История отвечает нам и на этот вопрос. Мы видим, что сами выводы арифметики вырабатывались медленно и постепенно; они отражают опыт, накапливавшийся в течение необозримо долгих поколений и таким путем закреплявшийся в сознании людей. Они закреплялись в языке: в названиях чисел, в обозначениях, в постоянном повторении одинаковых операций с числами, в постоянном их практическом применении. Так они приобрели ясность и убедительность. Самые приемы логических рассуждений имеют то же происхождение. При этом существенной является не только сама повторяемость, но и та устойчивость и четкость, которыми объективно обладают отношения действительности, отраженные в основных понятиях арифметики и в правилах логического вывода.

В этом корень убедительности арифметики; ее выводы логически вытекают из ее основных понятий, а то и другое — приемы логики и понятия арифметики — вырабатывались и закреплялись в сознании на основе тысячелетней практики, на основе объективных закономерностей окружающего нас мира.

3° Почему арифметика при всей отвлеченности ее понятий имеет такие широкие приложения?

Ответ прост. Понятия и выводы арифметики, обобщая огромный опыт, выражают в отвлеченной форме такие отношения действительности, которые встречаются постоянно и повсюду. Считать можно и вещи в комнате, и звезды, и людей, и атомы… Арифметика берет некоторые из общих свойств, отвлекаясь от всего частного и конкретного. И именно в силу того, что она берет только это общее, ее выводы приложимы в такой массе случаев. Стало быть, возможность широких приложений обеспечивается именно отвлеченностью арифметики. (При этом важно, что отвлеченность эта не пустая, а извлечена из долгого практического опыта.) То же верно в отношении всей математики, в отношении любого отвлеченного понятия или теории. Возможности приложения теории зависят от того, сколь широкий исходный материал в ней обобщен.

Одновременно всякое отвлеченное понятие, в частности понятие о числе, ограничено в своем значении вследствие той же самой своей отвлеченности. Во-первых, в применении к любому конкретному предмету оно отражает только одну его сторону и поэтому дает о нем очень неполное представление. Как часто, например, бывает, что одни численные данные еще очень мало говорят по существу дела. Во-вторых, отвлеченные понятия нельзя применять всюду без каких бы то ни было условий, нельзя применять арифметику к конкретным задачам, не убедившись в том, что ее применение имеет здесь смысл. Если мы, например, говорим о сложении, соединяя предметы только мысленно, то, конечно, с самими предметами ничего не происходит. Но если мы применяем сложение к фактическому соединению предметов, если мы фактически складываем предметы, например, сваливая их в кучу или расставляя на столе, то здесь происходит не просто отвлеченное сложение, а реальный процесс. Этот процесс не только не исчерпывается арифметическим сложением, но может сделать его вообще неприменимым. Например, сваливаемые в кучу предметы могут ломаться; звери, посаженные вместе, могут растерзать один другого; «складываемые» вещества могут вступить в химическую реакцию: литр воды и литр спирта дадут при слиянии не 2, а 1,9 литра смеси вследствие взаимного растворения этих жидкостей, и т. п.

Нужны ли другие примеры? Их можно привести сколько угодно.

Короче, истина конкретна; и помнить это особенно важно в отношении математики, как раз из-за ее отвлеченности.

4° Наконец, последний вопрос, который мы ставили, касался движущих сил развития математики.

Для арифметики ответ на этот вопрос также ясен из истории ее возникновения. Мы видели, что люди на практике овладевали счетом и вырабатывали понятие о числе; потом практика потребовала обозначений для чисел, поставила более трудные задачи. Словом, движущей силой развития арифметики служила общественная практика. При этом она выступает в постоянном взаимодействии с обобщающим ее опыт отвлеченным мышлением. Возникающие на основе практики отвлеченные понятия делаются важным ее орудием и совершенствуются в своем применении. Отвлечение от несущественного помогает при этом вскрывать суть дела и обеспечивает общее решение там, где определяющую роль играют как раз выделенные и сохраненные при отвлечении общие свойства и связи,— таковы количественные связи в случае арифметики.

Кроме того, мышление зачастую уходит дальше того, что непосредственно требует поставленная практикой задача. Так, понятие о больших числах, как миллион или миллиард, возникло на базе счета, но раньше, чем явилась практическая потребность пользоваться такими числами. Таких примеров не мало в истории науки; достаточно вспомнить мнимые числа, о которых мы уже упоминали. Все это лишь частный случай общего всему познанию взаимодействия практики и абстрактного мышления, практики и теории.

Огл. § 3. Геометрия

1. История зарождения геометрии по существу сходна с историей зарождения арифметики. Первые геометрические понятия и сведения также восходят к временам доисторическим и также возникли в процессе практической деятельности.

Из самой природы заимствовал человек геометрические формы. Круг и серп луны, гладь озера, прямизна луча или стройного дерева существовали задолго до человека и предстояли перед ним постоянно. Конечно, достаточно прямые линии, тем более треугольники и квадраты, наш глаз встретит в самой природе редко. Ясно, что человек, вырабатывал представление об этих фигурах прежде всего потому, что активно воспринимал природу и, следуя своим практическим потребностям, изготовлял предметы все более и более правильной формы. Люди строили свои жилища, обтесывали камни, огораживали участки земли, натягивали тетивы на свои луки, лепили глиняную посуду, совершенствовали ее и соответственно создавали понятие, что сосуд получается круглый, что натянутая тетива — прямая. Короче, форму сначала придавали материалу, а потом уже осознавали ее как то, что придается материалу и что может рассматриваться само по себе в отвлечении от материала. Осознавая форму тел, человек мог совершенствовать свои изделия и еще отчетливее выделять само понятие формы. Так, практическая деятельность служила основой для выработки отвлеченных понятий геометрии. Нужно было сделать тысячи предметов с прямыми краями, натянуть тысячи нитей, провести на земле массу прямых линий, чтобы получить ясное представление о прямой линии вообще, как о том общем, что есть во всех этих частных случаях. Теперь мы окружены предметами с прямыми краями, сделанными людьми, сами учимся проводить прямые, и только поэтому у нас с детства складывается ясное представление о прямой.

Точно так же понятие о геометрических величинах — о длине, площади и объеме — возникло из практической деятельности. Люди измеряли длины, определяли расстояния, оценивали на глаз площади и объемы для своих практических целей. Постепенно здесь были обнаружены простейшие общие законы, первые геометрические зависимости, например: площадь прямоугольника равна произведению его сторон. Земледельцу полезно было знать такую зависимость, чтобы оценивать площадь посева, а следовательно, и предполагаемый урожай.

Так из практической деятельности и жизненных задач зарождалась геометрия. Вот что писал о ней в IV в. до н. э. древнегреческий ученый Эвдем Родосский: «Геометрия была открыта египтянами и возникла при измерении земли. Это измерение было им необходимо вследствие разлития реки Нила, постоянно смывавшего границы [9]. Нет ничего удивительного в том, что эта наука, как и другие, возникла из потребностей человека. Всякое возникающее знание из несовершенного состояния переходит в совершенное. Зарождаясь путем чувственного восприятия, оно постепенно становится предметом нашего рассмотрения и, наконец, делается достоянием разума».

Конечно, измерение земли не было единственной задачей, побудившей древних к созданию геометрии. О характере задач и о том, как их решали древние египтяне и вавилоняне, можно судить по дошедшим до нас отрывкам текстов. Один из самых древних, дошедших до нас, египетских текстов восходит к временам более 1700 лет до н. э.— это руководство «писцам» (царским чиновникам), написанное неким Ахмесом. Здесь собран ряд задач на вычисление вместимости сосудов и амбаров, площадей земельных участков, размеров земляных работ и др.

Египтяне и вавилоняне умели определять простейшие площади и объемы, знали с хорошей точностью отношение окружности к диаметру и, может быть, даже могли вычислять поверхность шара, словом, они обладали уже немалым запасом геометрических знаний. Однако, насколько можно судить, у них не было еще геометрии как теоретической науки с ее теоремами и доказательствами. Как и арифметика того времени, геометрия была в основном набором правил, выведенных из опыта. Более того, геометрия вообще не была отделена от арифметики. Геометрические задачи были одновременно арифметическими задачами на вычисление.

В VII в. до н. э. геометрия проникла из Египта в Грецию, где ее развивали дальше великие философы-материалисты Фалес, Демокрит и другие. Значительный вклад в геометрию сделали также последователи Пифагора — основателя идеалистической религиозно-философской школы.

Развитие геометрии шло в направлении накопления новых фактов и уяснения их связей друг с другом. Эти связи превращались постепенно в логические выводы одних положений геометрии из других. Таким путем, во-первых, вырабатывалось самое понятие о геометрической теореме и ее доказательстве, а во-вторых, выяснялись те основные положения, из которых другие уже могут быть выведены, т. с. выяснялись аксиомы геометрии.

Так постепенно геометрия превращалась в математическую теорию.

Известно, что ее систематические изложения появились в Греции уже в V в. до н. э., но они не дошли до нас, очевидно, потому, что всех их вытеснили «Начала» Эвклида (III в. до н. э.). В этом произведении геометрия была представлена в виде такой стройной системы, что ничего принципиально нового к ее основам не смогли добавить до Н. И. Лобачевского, т. е. в течение более двух тысяч лет, а известный школьный учебник Киселева, как и многие другие учебники во всем мире, в старых изданиях представлял собой не что иное, как популярную переработку Эвклида. Едва ли много найдется в мире таких долговечных книг, как «Начала» Эвклида,— это совершенное творение греческого гения. Конечно, математика ушла вперед и наше понимание оснований геометрии стало гораздо глубже, и все же «Начала» Эвклида были и во многом остаются образцом книги по чистой математике. В них, подводя итог предыдущего развития, Эвклид представил современную ему математику как самостоятельную теоретическую науку, т. е. так, как в конце концов понимают ее и теперь.

2. История зарождения геометрии дает основание для тех же выводов, что история зарождения арифметики.

Мы видим, что геометрия возникла из практики и что ее превращению в математическую теорию предшествовал очень долгий период.

Геометрия оперируете «геометрическими телами» и фигурами, изучает их отношения величины и взаимного расположения. Но геометрическое тело есть не что иное, как реальное тело, рассматриваемое только с точки рения его пространственной формы [10], в отвлечении от прочих свойств, будь то плотность, цвет, вес и т.д. (Геометрическая фигура есть еще более общее понятие, в ней можно отвлекаться и от пространственного протяжения; так, поверхность имеет только два измерения, линия — одно, а точка вовсе не имеет измерений. Точка есть отвлеченное понятие о конце линии, о месте, уточненном до предела, так что в нем уже нет частей. Так, кстати, определял все эти понятия и Эвклид.)

Таким образом, геометрия имеет своим предметом пространственные формы и отношения реальных тел, отвлеченные от всех прочих свойств, иными словами, взятые «в чистом виде». Именно этот уровень отвлеченности отличает геометрию от других наук, изучающих также пространственные формы и отношения тел. В астрономии, например, изучают взаимное расположение тел, но именно небесных тел, в геодезии — форму Земли, в кристаллографии — формы кристаллов и т. д. Во всех этих случаях изучают форму и расположение конкретных тел в связи и в зависимости от их других свойств.

Отвлечение влечет за собой умозрительный метод геометрии; с прямыми без всякой ширины, с «чистыми формами» уже нельзя ставить опыты. Остается только рассуждать, получая одни выводы из других. Поэтому геометрическая теорема должна доказываться рассуждением, иначе она не будет принадлежать геометрии, не будет относиться именно к «чистым формам».

Очевидность самих исходных понятий геометрии, приемы рассуждения, убедительность её выводов имеют то же происхождение, что и в арифметике. Свойства геометрических понятий, как и сами понятия, абстрагированы человеком из окружающей природы. Люди много раз проводили прямые линии, прежде чем смогли осознать как аксиому, что через всякие две точки можно провести прямую; миллиарды раз перемещали и прикладывали друг к другу разные предметы, прежде чем смогли обобщить это в представлении о наложении геометрических фигур и, тем более, применить это представление для доказательства теорем (как это делается в известных теоремах о равенстве треугольников).

Наконец, общность геометрии. Объем шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$ независимо от того, идет ли речь о шарообразном сосуде, о стальном шаре, о звезде, о капле и т. д. Геометрия смогла выделить общее всем телам, потому что всякое реальное тело имеет более или менее определенные форму, размеры, положение относительно других тел. Не мудрено поэтому, что она применяется почти так же широко, как арифметика. Рабочий, измеряющий размеры детали или читающий чертеж, артиллерист, определяющий расстояние до цели, колхозник, измеряющий площадь посева, строитель, оценивающий объем земляных работ, — все они пользуются начатками геометрии. Штурман, астроном, геодезист, инженер, физик нуждаются в очень тонких ее выводах.

Яркий пример отвлеченно-геометрического решения важной задачи естествознания представляют исследования знаменитого кристаллографа и геометра Е. С. Федорова. Задача найти все возможные виды симметрии кристаллов, которую он перед собой поставил, является одной из основных в теоретической кристаллографии. Для решения этой задачи Федоров отвлекся от всех физических свойств кристалла, рассматривая его только как правильную систему геометрических тел (вместо системы конкретных атомов). Таким образом, речь идет о нахождении всех видов симметрии, какие только могут быть у системы геометрических тел. Этот чисто геометрический вопрос Федоров решил до конца и нашел все виды симметрии - их оказалось 230. Вместе с тем решение задачи о возможных видах симметрии явилось крупным вкладом в геометрию и послужило началом многих геометрических исследований.

На этом примере, как на всей истории геометрии, мы видим главную движущую силу ее развития. Это — взаимодействие практики и отвлеченного мышления. Возникшая из наблюдения кристаллов задача о их симметрии ставится отвлеченно и порождает новую математическую теорию — теорию правильных систем, или так называемых федоровских групп [11]. Потом сама эта теория не только находит блестящее подтверждение в наблюдении кристаллов, но служит общим руководством в развитии кристаллографии и порождает новые, как экспериментальные, так и чисто математические, исследования.

Огл. § 4. Арифметика и геометрия

1. До сих пор мы рассматривали арифметику и геометрию отдельно друг от друга. Их взаимная связь, а стало быть, вообще связь математических теорий, ускользнула от нашего внимания. А между тем эта связь имеет исключительно большое значение. Взаимное проник-

новение теорий движет математику вперед, раскрывает богатство отраженных этими теориями связей действительности.

Арифметика и геометрия не только применяются одна к другой, но служат при этом истоками дальнейших общих идей, методов и теорий. В конечном счете арифметика и геометрия — это два корня, из которых росла математика. Их взаимодействие восходит к тем временам, когда сами они только зарождались. Уже простое измерение длины есть соединение геометрии и арифметики. Измеряя длину предмета, мы откладываем на нем некоторую единицу длины и считаем, сколько раз это можно сделать; первая операция (откладывание) — геометрическая, вторая (счет) — арифметическая. Отсчитывая шаги на дороге, каждый уже соединяет эти две операции.

Вообще измерение любой величины соединяет счет с какой-либо специфической для этого сорта величин операцией. Достаточно вспомнить измерение жидкости мерным сосудом или измерение интервала времени по счету ударов маятника.

Однако при измерении обнаруживается, что, вообще говоря, выбранная единица не укладывается в измеряемой величине целое число раз и что простым счетом единиц при измерении обойтись нельзя. Тогда нужно единицу делить, чтобы выразить величину точнее посредством долей единицы, т. е. уже не целыми числами, а дробями. Дроби так фактически и возникли, как показывает анализ относящихся сюда исторических и других данных. Они возникли из деления и сравнения непрерывных величин, т. е. из измерения. Первые величины, которые люди измеряли, были геометрические величины:

длины, площади посевов, объемы жидкостей и сыпучих тел. Стало быть, уже в возникновении дробей мы видим взаимодействие арифметики и геометрии. Это взаимодействие ведет к появлению важного нового понятия дроби, к расширению понятия числа от чисел целых к числам дробным (или, как говорят математики, к числам рациональным, выражающимся отношением целых чисел). Дроби не возникли и не могли возникнуть из деления целых чисел, потому что целыми числами считают целые предметы. Три человека, три стрелы и т. д. — все это имеет смысл, но две трети человека и даже треть стрелы представляет собой бессмыслицу; даже тремя отдельными третями стрелы не убить оленя,— для этого нужна целая стрела.

2. В развитии понятия числа, связанном с взаимодействием арифметики и геометрии, появление дробей было только первым этапом. Следующим было открытие несоизмеримых отрезков. Напомним, что отрезки называются несоизмеримыми, если не существует отрезка, который в обоих укладывается целое число раз, или, иными словами, если их отношение не выражается обычной дробью, т. е. отношением целых чисел.

Сначала люди просто не очень задумывались над тем, можно ли, скажем, всякую длину выразить дробью. Если при делении или измерении доходили до слишком мелких долей, их просто отбрасывали: бесконечное уточнение измерения практически не имело смысла. Демокрит выдвинул даже представление, что геометрические фигуры состоят из своего рода атомов. По Демокриту, отрезки — это ряды атомов, и потому отношение отрезков есть просто отношение чисел атомов в них, т. е. заведомо выражается дробью. Это представление, которое, на наш взгляд, может показаться довольно странным, оказалось очень плодотворным при определении площадей и объемов. Площадь вычислялась как сумма рядов, составленных из атомов, а объем — как сумма атомных слоев. Таким путем Демокрит нашел, например, объем конуса. Читатель, имеющий понятие об интегральном исчислении, легко заметит, что в этом приеме уже заключен прообраз определения площадей и объемов методами интегрального исчисления. (Кроме того, обращаясь мысленно к временам Демокрита, нужно постараться освободиться от ставших теперь привычными представлений, закрепленных развитием математики. Во время Демокрита геометрические фигуры еще не отрывались от реальных в той мере, в какой это делают теперь. Поэтому, мысля вещественные тела состоящими из атомов, Демокрит, естественно, должен был считать, что и геометрические фигуры состоят из атомов.)

Однако представление о том, что отрезки сострят из атомов, вступило в противоречие с теоремой Пифагора, так как из нее следует, что существуют несоизмеримые отрезки; например, диагональ квадрата не соизмерима с его стороной, т. е. отношение их не выражается отношением целых чисел.

Докажем, что сторона и диагональ квадрата действительно несоизмеримы. Если a — сторона, a b — диагональ квадрата, то по теореме Пифагора $b2 = a2 + a2 = 2a2$ и, стало быть,

$(b/a)2 = 2$

Между тем нет такой дроби, квадрат которой равнялся бы 2. В самом деле, допустим противное, и пусть p и q — целые числа, для которых

$(p/q)2 = 2$

причем мы можем, конечно, считать, что p и q уже не имеют общего делителя: иначе дробь можно было бы сократить. Но если $(p/q)2 = 2$, то $p2 = 2q2$, и потому $p2$ делится на 2. В таком случае $p2$ делится на 4, ибо это есть квадрат целого числа. Поэтому $p2 = 4q1$, т. е. $p2 = 4q1$, и $q2 = 2q1$. Отсюда следует, что q тоже должно делиться на 2. Это, однако, противоречит тому условию, что p и q не имеют общего делителя. Полученное противоречие доказывает, что отношение b/a не может выражаться рациональным числом. Диагональ и сторона квадрата оказываются несоизмеримыми.

Это открытие произвело на греческих ученых громадное впечатление. Теперь, когда мы уже привыкли к иррациональным числам и легко действуем с квадратными и иными корнями, существование несоизмеримых отрезков нас нимало не смущает. Но в V в. до н.э. для греческих ученых открытие таких отрезков выглядело совершенно иначе. Ведь понятия иррационального числа у них не было, символа вроде Ö 2 они не писали, и потому для них полученный результат означал, что отношение диагонали и стороны квадрата вообще не выражается никаким числом.

В существовании несоизмеримых отрезков грекам открывалась некая тайна, заключенная в непрерывности,— одно из выражений диалектического противоречия, заложенного в непрерывности и движении. Обсуждением этого противоречия занимались знаменитые греческие философы, среди которых особенно известен своими парадоксами Зенон Элейский.

Греки создали теорию отношений отрезков (и величин вообще), учитывающую существование несоизмеримых отрезков [12]; она изложена в «Началах» Эвклида, и в упрощенном виде ее излагают и теперь в школьном курсе геометрии. Но осознать, что отношение одного отрезка к другому, принятому за единицу, т.е. попросту длину отрезка, можно рассматривать тоже как число, обобщая этим самое понятие о числе,— до этой идеи греки так и не смогли подняться: понятие иррационального числа у них так и не возникло [13]. Это было сделано в более позднюю эпоху математиками Востока; а общее, математически строгое определение действительного числа, не опирающееся непосредственно на геометрию, было дано только совсем недавно: в 70-х годах прошлого столетия [14]. Такой громадный промежуток времени, протекший с тех пор, как было создана теория отношений, показывает, с каким трудом возникают и точно формулируются абстрактные понятия.

3. Характеризуя понятие о действительном числе, Ньютон в своей «Всеобщей арифметике», писал: «Под числом мы понимаем не столько собрание единиц, сколько отвлеченное отношение какого-либо количества к другому, принятому за единицу». Это число (отношение) может быть целым, рациональным или иррациональным, если данная величина не соизмерима с единицей.

Действительное, или, что то же самое, вещественное, число по своему исходному смыслу есть, следовательно, не что иное, как отношение одной величины к другой, принятой за единицу; в частном случае — это отношение отрезков, но может быть отношением площадей, весов и т. п.

Стало быть, действительное число есть отношение величин вообще, рассматриваемое в отвлечении от их конкретной природы.

Подобно тому, как отвлеченные целые числа становятся предметом математики не каждое в отдельности, а лишь в связи друг с другом, в системе целых чисел, так и отвлеченные действительные числа имеют содержание и оказываются предметом математики лишь в связи друг с другом, т. е. в системе действительных чисел.

В теории действительных чисел, как и в арифметике, прежде всего определяются действия над числами: сложение, вычитание, умножение, деление, а также отношение между числами, выражаемое словами «больше» и «меньше». Эти действия и отношения отражают реальные связи различных величин, как, например, сложение отражает сложение отрезков. Начало действий с отвлеченными действительными числами было положено в средние века математиками Востока. Позже было постепенно выявлено важнейшее свойство системы действительных чисел — ее непрерывность. Система действительных чисел — это абстрактный образ всевозможных значений непрерывно изменяющейся величины.

Таким образом, подобно арифметике целых чисел, арифметика действительных чисел имеет своим предметом реальные количественные отношения непрерывных величин, которые она изучает в их общем виде, в полном отвлечении от всякой конкретности. Именно потому, что в понятии действительного числа выделяется общее всем непрерывным величинам, оно имеет столь широкое применение: значения разных величин, будь то длина, вес, сила электрического тока, энергия и т. п., выражаются числами, а зависимость, связь между величинами изображаются, как зависимость между их численными значениями.

Для того, чтобы общее понятие о действительных числах могло служить основанием математической теории, нужно дать формально математическое их определение. Это можно сделать разными путями, но, пожалуй, естественнее всего исходить из самого процесса измерения величин, который как раз и служил практическим источником обобщения понятия о числе. Мы будем говорить о длине отрезков, но читатель легко заметит, что точно так же можно было бы рассуждать о любых других величинах, допускающих неограниченное деление.

Пусть мы хотим измерить отрезок AB посредством принятого за единицу отрезка CD (рис. 1). Откладываем отрезок CD на AB, например от точки A, пока он еще

измерение отрезка посредством принятого за единицу отрезка

Рис. 1.

укладывается в AB. Пусть он отложился n0 раз. Если после этого от отрезка AB остался еще остаток PB, то делим отрезок CD на десять частей и измеряем остаток этими десятыми долями. Пусть в остатке отложилось n1 десятых долей. Если и после этого есть остаток, то делим нашу мерку еще раз на десять частей, т. е. делим CD на сотые доли, и повторяем ту же операцию, и т.д. Либо процесс измерения кончится, либо он будет продолжаться. Но во всяком случае мы будем получать, что в отрезке AB укладывается n0 целых отрезков CD, n1 — десятых, n2 — сотых и т. д. Словом, мы будем получать отношение AB к CD все с большей точностью: до десятых, до сотых и т. д. Само отношение представится, стало быть, десятичной дробью с n0 целыми, n1 десятыми и т. д.

AB/CD = n0, n1, n2 ...

Эта дробь может быть бесконечной, что означает возможность неограниченного уточнения измерения.

Итак, отношение отрезков (и величин вообще) представимо всегда десятичной дробью (конечной или бесконечной). Однако в десятичной дроби уже нет следов самой конкретной величины. Поэтому она дает как раз отвлеченное отношение, т.е. действительное число. Действительное число формально так и можно определить как конечную или бесконечную десятичную дробь [15].

Для того, чтобы довести дело до конца, нужно еще определить действия (сложение и т.п.) над десятичными дробями. Это делается таким образом, чтобы определяемые действия над десятичными дробями отвечали действиям над величинами. Так, при сложении отрезков их длины складываются, т, е. длина отрезка AB + BC равна сумме длин AB и BC. В определении действий над действительными числами есть та трудность, что числа эти представляются, вообще говоря, бесконечными десятичными дробями, тогда как обычные известные правила действий относятся к конечным десятичным дробям. В связи с этим строгое определение действий с бесконечными дробями делается следующим путем. Пусть, например, нам нужно сложить два числа a и b. Берем соответствующие десятичные дроби с точностью до данного знака, например до миллионных, и складываем их. Тогда получим сумму a + b с соответствующей точностью (до двух миллионных, так как ошибки от a и b могут сложиться). Таким образом, мы можем определить сумму двух чисел с любой степенью точности, и в этом смысле сумма оказывается вполне определенной, хотя на каждом этапе вычисления она известна лишь с некоторой точностью. Это, однако, отвечает существу дела, потому каждая величина a и b также измеряется с некоторой точностью, и точное значение, представляемое бесконечной десятичной дробью, получается как результат неограниченно продолжаемого возможного уточнения значения величины.

Отношение «больше», «меньше» может быть затем определено через сложение: $a > b$, если существует такое c, что $a = b + c$ (речь идет о положительных числах).

Непрерывность ряда действительных чисел выражается в том, что если числа a1, a2, … возрастают, а b1, b2, … убывают, оставаясь при этом всегда больше чисел a1, - между теми и другими числами всегда есть еще какое-либо число c.

сопоставление точек с числами

Рис. 2.

Наглядно это изображается на прямой, если ее точки по известному правилу сопоставить с числами (рис. 2). Здесь ясно видно, что наличие числа c и соответствующей ему точки как раз означает отсутствие разрыва в ряду чисел, т. е. непрерывность ряда чисел.

4. Уже на примере взаимодействия арифметики и геометрии можно видеть, что развитие математики происходит в процессе борьбы многих сплетающихся в ней противоположностей: конкретного и абстрактного, частного и общего, формального и содержательного, конечного и бесконечного, прерывного и непрерывного и т. д.

Попробуем, например, проследить противоположность конкретного - абстрактного в самом создании понятия действительного числа. Как мы видели, действительное число отражает бесконечно уточняемый процесс измерения или, в несколько ином понимании, абсолютно, бесконечно точное значение величины. Это соответствует тому, что в геометрии рассматривают идеально точные формы и размеры тел, вовсе отвлекаясь от подвижности и некоторой неопределенности реальных форм и размеров конкретных предметов. Выше мы рассуждали об измерении именно идеального отрезка.

Однако идеально точные геометрические формы и абсолютно точные значения величин представляют собою абстракции. Никакой конкретный предмет не имеет абсолютно точной формы, как никакая конкретная величина не только не измерима абсолютно точно, но и не имеет абсолютно точного значения. Длины линеек, например, не имеют смысла, если их уточнять за пределы атомных масштабов. Всегда за известными пределами количественного уточнения происходит качественное изменение величины, и она теряет вообще свой первоначальный смысл. Например, давление газа нельзя уточнять за пределы силы удара одной молекулы; электрический заряд перестает быть непрерывным, когда уточняется до заряда электрона и т. п. Ввиду отсутствия в природе предметов идеально точной формы, утверждение о том, что отношение диагонали квадрата к стороне равно Ö 2, не только нельзя абсолютно точно вывести из непосредственного измерения, но оно и не имеет абсолютно точного смысла ни для какого конкретного реального квадрата.

Вывод о несоизмеримости диагонали и стороны квадрата вытекает, как мы видели, из теоремы Пифагора. Это — теоретический вывод в развитие данных опыта; он есть результат применения логики к исходным, взятым из опыта, посылкам геометрии.

Таким образом, понятие о несоизмеримых отрезках и тем более о действительном числе не есть простое, непосредственное отражение опытных фактов, но идет как бы дальше их. Это, однако, понятно. Действительное число не отражает какую-либо данную конкретную величину, а величину вообще в отвлечении от всякой конкретности, иными словами, оно отражает общее в реальных частных величинах. Это общее состоит, в частности, в том, что значение величин вообще можно уточнять, и если мы отвлеклись от конкретных величин, то граница этого возможного уточнения, зависящая от конкретной природы величины, становится неопределенной и исчезает.

Таким образом, математическая теория величин, рассматривающая величины в отвлечении от их индивидуальной природы, неизбежно должна рассматривать возможность неограниченного уточнения значения величины и тем самым должна приводить к понятию действительного числа. Вместе с тем, отражая только общее в разных величинах, математика не учитывает особенностей каждого, отдельного случая. «Всякое отдельное,— как отмечает В. И. Ленин, — неполно входит в общее. . . » [16]

Выделяя общие свойства, математика рассматривает выработанные ею четко разграниченные абстракции независимо от реальных границ их применимости. И это происходит именно потому, что границы эти не обладают той же общностью; они зависят от конкретных свойств рассматриваемых явлений, от качественной смены этих явлений. Поэтому, применяя математику, необходимо проверять обоснованность самого применения той или иной теории. Так, рассматривать вещество как непрерывное и описывать его свойства непрерывными величинами допустимо лишь тогда, когда можно отвлечься от его атомного строения, а это возможно лишь при известных условиях в некоторых пределах.

Несмотря на это, действительные числа представляют собой проверенное и мощное средство математического исследования реальных непрерывных величин и процессов. Теория их обоснована практикой — необоримым полем применений в физике, технике, химии. Стало быть, практика доказывает, что понятие действительного числа правильно отражает общие свойства величин. Но эта правильность не безгранична; теорию действительных чисел нельзя рассматривать как нечто абсолютное, допускающее неограниченное абстрактное развитие в полном отвлечении от действительности. Само понятие о действительном числе продолжает развиваться и фактически далеко еще не является абсолютно законченным.

5. Роль еще одной из названных выше противоположностей — противоположности дискретного и непрерывного можно также проследить на примере развития понятия числа. Мы уже видели, что дроби возникли из деления непрерывных величин.

На тему о делении существует чрезвычайно поучительный шуточный вопрос. Бабушка купила три картофелины и должна разделить их поровну между двумя внуками. Как быть? Ответ гласит: нужно сделать пюре.

Эта шутка, однако, вскрывает самую суть дела. Отдельные предметы неделимы в том смысле, что разделенный предмет почти всегда перестает быть тем, что он есть, как это ясно из примеров «трети человека» или «трети стрелы». Напротив, непрерывные и однородные величины или вещи легко делятся и складываются, не теряя своей сущности. Пюре как раз представляет прекрасный пример такой однородной вещи, которая хотя и не разделена, но зато легко делится практически на сколь угодно мелкие доли. Длины, площади, объемы обладают тем же свойством. Непрерывное по самому понятию и есть то, что не разделено в действительности, но неограниченно делимо в возможности.

Мы сталкиваемся, таким образом, с двумя противоположностями: с одной стороны, неделимые, отдельные, как говорят, дискретные предметы, с другой — вполне делимые, но не разделенные на части, а непрерывные вещи. Конечно, эти противоположности всегда соединены, ибо нет ни абсолютно неделимых, ни совершенно непрерывных предметов. Однако эти стороны предметов не только реальны, но часто в одних случаях решающей оказывается одна сторона, в других — другая.

Математика, отвлекая формы от их содержания, тем самым резко разделяет и эти формы — дискретное и непрерывное.

Математическим образом отдельного предмета служит единица, а математическим образом совокупности дискретных предметов служит сумма единиц. Это, так сказать, образ чистой дискретности, очищенной от всего остального, дискретность в ее чистом виде. Основным, исходным математическим образом непрерывности служит непрерывность геометрической фигуры, в простейшем случае — прямой линии.

Перед нами, стало быть, две противоположности: дискретность и непрерывность, и их отвлеченные математические образы: целое число и геометрическая протяженность. Измерение есть соединение этих противоположностей: непрерывное измеряется отдельными единицами. Но неделимыми единицами обойтись нельзя; приходится вводить дробные доли исходной единицы. Так возникают дробные числа; понятие числа развивается именно в результате соединения указанных противоположностей. Дальше, на более абстрактной ступени появляется понятие о несоизмеримых отрезках и, как следствие, понятие действительного числа как отвлеченный образ неограниченно точного значения величины. Однако это понятие сложилось не сразу, и долгий путь его развития шел через борьбу тех же противоположностей дискретного и непрерывного.

Как уже было сказано, Демокрит представлял фигуры составленными из атомов и тем сводил непрерывное к прерывному. Однако открытие несоизмеримых отрезков заставило отказаться от такого представления. После этого непрерывные величины уже не составлялись из отдельных элементов — атомов или точек. Эти величины не выражались числами, так как иных чисел, кроме целых и дробных, в то время не знали.

понимание площади как суммы линий

Рис. 3

Противоречие прерывного и непрерывного выступило в математике с новой силой в XVII в., когда закладывались основы дифференциального и интегрального исчисления. Здесь речь шла о бесконечно малых. В одних представлениях они мыслились как действительные, «актуально» бесконечно малые, «неделимые» частицы непрерывной величины, подобно атомам Демокрита, но теперь число их считалось бесконечно большим. Вычисление площадей и объемов — интегрирование — мыслилось как суммирование бесконечного числа этих бесконечно малых частиц. Площадь, например, понималась как «сумма линий, из которых она составляется» (рис. 3). Стало быть, непрерывное опять как бы сводилось к дискретному, но уже более сложным образом, на более высокой ступени. Но этот взгляд оказался неудовлетворительным, и, в противовес ему, в основном от Ньютона пошло представление о непрерывных переменных, о бесконечно малых как неограниченно убывающих переменных величинах.

Эта концепция взяла верх, когда в первой половине XIX в. была создана строгая теория пределов. Теперь отрезок не составлялся из точек или «неделимых», но понимался как протяженность, как непрерывная среда, где можно лишь фиксировать отдельные точки, отдельные значения переменной величины. Математики так и говорили тогда о «протяженности». В единстве прерывного и непрерывного непрерывность стала опять господствующей.

Однако развитие анализа потребовало дальнейшего уточнения теории переменных величин и прежде всего общего определения действительного числа как любого возможного значения переменной величины. Тогда в 70-х годах прошлого столетия возникла теория действительных чисел, которая представляет отрезок как множество точек и соответственно промежуток изменения переменной — как множество действительных чисел. Непрерывность опять стала составляться из отдельных дискретных точек, и свойства непрерывности стали выражаться в строении совокупности оставляющих ее точек. Эта концепция привела к громадным успехам математики и стала господствующей. Все же и в ней обнаружились свои глубокие трудности, которые породили попытки вернуться на новой ступени к представлению о чистой непрерывности. Намечаются также иные сути переделки представления об отрезке как множестве точек. Возникает новые точки зрения на понятия числа, переменной, функции. Развитие теории продолжается, и нужно ждать его дальнейших шагов.

6. Взаимодействие арифметики и геометрии играло роль не только в создании понятия действительного числа. То же взаимодействие геометрии и арифметики, или, точнее, уже алгебры, сказалось также в утверждении в математике понятий отрицательных и комплексных чисел (т. е. чисел вида a + bÖ -1). Отрицательные числа изображаются точками на прямой слева от точки, которая сопоставляется с нулем. Комплексные же числа изображают точками на плоскости. Именно это геометрическое представление укрепило в математике мнимые числа, которые до того оставались непонятными.

Понятие величины развивалось дальше: появились, например, векторные величины, которые изображают направленными отрезками, и другие, еще более общие величины (тензоры), в которых опять алгебра соединяется с геометрией.

Соединение различных математических теорий всегда играло и играет большую, порой решающую роль. Мы увидим это дальше на примерах возникновения аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления, теории функций комплексной переменной, новейшего так называемого функционального анализа и других теорий. В самой теории чисел, т.е. в учении о целых числах, с большим успехом применяются методы, связанные с непрерывностью: анализ бесконечно малых и геометрия, что породило обширные главы этой теории, называемые аналитической теорией чисел» и «геометрией чисел».

С известной точки зрения в основе математики можно видеть сочетание понятий, исходящих из геометрии и арифметики, — общих понятий непрерывности и алгебраической операции (как обобщения арифметического действия). Но здесь мы не можем говорить об этих трудных теориях. Целью этого параграфа было создать хотя бы самое общее представление о взаимодействии понятий, о единстве и борьбе противоположностей в математике на примере взаимодействия арифметики и геометрии, на примере развития понятия числа.

Огл. § 5. Эпоха элементарной математики

1. Развитие математики не сводится к простому накоплению новых теорем, но включает существенные, можно сказать, качественные изменения математики. Эти качественные изменения происходят, однако, не в порядке ломки и отмены существующих теорий, но в порядке их углубления и обобщения, в порядке появления новых обобщающих теорий, подготовленных предшествующим развитием.

С самой общей точки зрения в истории математики можно отметить четыре основных, качественно различных этапа. Конечно, точное разграничение этих этапов невозможно, потому что существенные черты каждого следующего из них складывались более или менее постепенно, но различие этих этапов и переходы между ними обозначаются вполне отчетливо. Первый этап (или период) — это период зарождения математики как самостоятельной и чисто теоретической науки. Он тянулся с древнейших времен и закончился к V в. до н.э., если не раньше, когда в Греции сложилась, наконец, «чистая» математика с ее логической связью теорем и доказательств (в V в. до н. э. появились, в частности, систематические изложения геометрии, например, «Начала» Гиппократа Хиосского). Этот период был периодом формирования арифметики и геометрии, и мы уже достаточно подробно его рассмотрели. Тогда математика складывалась как непосредственно связанная с практикой совокупность отдельных правил, выведенных из опыта. Эти правила не образовывали еще единой логически связанной системы. Теоретический характер математики с её логическим доказательством теорем складывался очень медленно, по мере накопления материала. Арифметика и геометрия не были разделены, но тесно переплетались друг с другом.

Второй период можно характеризовать как период элементарной математики, математики постоянных величин; основные, простейшие его результаты составляют теперь содержание школьного курса. Этот период продолжался около двух тысяч лет и закончился в XVII в. с возникновением «высшей» математики. На этом периоде мы подробнее остановимся в этом параграфе. Следующие параграфы будут посвящены третьему и четвертому периодам — эпохе создания и развития анализа и периоду современной математики.

2. Период элементарной математики можно в свою очередь разделить на две части, различающиеся их основным содержанием: период развития геометрии (до II в.

н. э.) и период преимущественного развития алгебры (от II до XVII в.). По историческим же условиям он делится на три периода, которые можно назвать «греческим», «восточным» и европейским эпохи Возрождения». Греческий период совпадает по времени с общим расцветом греческой культуры; восходя началом к VII в. до н. э., он достиг своей вершины в III в. до н. э., - времена величайших геометров древности Эвклида, Архимеда, Аполлония, и закончился к VI в. н. э. Математика, особенно геометрия, достигла в Греции удивительного расцвета; нам известны имена и результаты очень многих греческих математиков, хотя до нас дошли только некоторые из их подлинных сочинений. При этом стоит заметить, что Рим, достигший расцвета к I в. н. э. не дал в математике ничего, в то время как в порабощенной им Греции наука еще процветала.

площадь сегмента параболы

Рис. 4

Греки не только развили и привели в стройную систему элементарную геометрию в том объеме, в каком она дана в «Началах» Эвклида и преподается теперь в школах, но достигли гораздо больших результатов. Так, они изучили конические сечения: эллипс, гиперболу и параболу; доказали некоторые теоремы, относящиеся к началам так называемой проективной геометрии; разработали, руководствуясь потребностями астрономии геометрию на сфере (I в.н. э.), а также начала тригонометрии и вычислили первые таблицы синусов (Гиппарх — II век до н. э. и Клавдий Птолемей — II в. н. э. [17]); определили ряд площадей и объемов сложных фигур, например, Архимед определил площадь сегмента параболы, доказав, что она составляет 2/з площади прямоугольника, содержащего этот сегмент (рис. 4). Грекам была известна даже, например, такая теорема, что из всех тел с данной площадью поверхности наибольший объем имеет шар, доказательства ее не сохранилось, и едва ли греки владели полным ее доказательством, столь оно трудно; оно было впервые найдено в XIX в. посредством интегрального исчисления.

В области арифметики и начал алгебры греки также дали немало. Они, как уже было упомянуто раньше, положили начало теории чисел. Сюда относятся, например, их исследования о простых числах (теорема Эвклида о существовании бесконечного множества простых чисел и «решето Эратосфена» для нахождения простых чисел), а также решение уравнений в целых числах (Диофант, около 246—330 гг. н. э.).

Мы говорили уже, что греки открыли иррациональные величины, но рассматривали их геометрически, как отрезки. Поэтому задачи, которые мы теперь рассматриваем алгебраически, греки рассматривали геометрически. Так они решали квадратные уравнения и преобразовывали иррациональные выражения. Например, уравнение, которое мы пишем теперь в виде $x2+ ax = b2$, читалось так: найти такой отрезок x, что если к построенному на нем квадрату приложить прямоугольник, построенный на том же отрезке и данном отрезке a, получим прямоугольник, равновеликий данному квадрату. Господство геометрии продолжалось долгое время после греков. Греки знали также способы извлечения квадратного и кубического корней, свойства арифметических и геометрических прогрессий.

Таким образом, у греков был уже большой материал из современной элементарной алгебры, но не хватало главного: отрицательных чисел и нуля, иррациональных чисел в отвлечении от всякой геометрии и, наконец, развитой системы буквенных обозначений. Впрочем, Диофант уже употреблял буквенные обозначения для неизвестной и ее степеней, а также специальные знаки сложения, вычитания, равенства, поэтому он писал алгебраические уравнения, однако еще только с конкретными численными коэффициентами.

В геометрии греки вплотную подошли к «высшей» математике: Архимед — к интегральному исчислению в вычислении площадей и объемов, Аполлоний— к аналитической геометрии в своих исследованиях о конических сечениях. Он фактически дает уравнения этих кривых [18], но выражает их геометрическим языком. Однако у них не было еще ни общих понятий произвольной постоянной и переменной величины, ни той необходимой формы — буквенных обозначений алгебры, которые появились совсем в другую эпоху и которые только и могли превратить их исследования в источник новых теорий, входящих уже в высшую математику. Создатели этих теорий тысячу лет спустя отправлялись в большой мере от наследия греческих ученых. Сочинение Декарта «Геометрия» (1637), кладущее начало аналитической геометрии, как раз начинается с разбора задач, оставленных греками.

Таков общий закон. Старые теории, порождая новые и глубокие задачи, как бы перерастают сами себя и требуют тогда для дальнейшего развития новых форм, новых идей. Эти новые формы и идеи для своего возникновения могут требовать иных условий. В античном обществе не было и не могло быть условий для перехода к высшей математике; они наступили с развитием естествознания в новое время, а это развитие в свою очередь было обусловлено в XVI—XVII вв. новыми потребностями техники и промышленности и было связано, таким образом, с зарождением развитием капитализма.

Греки как бы исчерпали возможности элементарной геометрии, и этим надо объяснить тот факт, что блестящий прогресс геометрии иссяк к началу нашей эры и сменился развитием тригонометрии и алгебры в работах Птолемея, Диофанта и др. Как раз работы Диофанта можно считать началом того периода, когда ведущей становится алгебра. Но шедшее к своему закату античное общество уже не могло двигать науку дальше в этом новом направлении.

Надо отметить, что уже за несколько веков до этого в Китае арифметика достигла высокого уровня. Китайскими учеными во II—I вв. до н. э. описываются правила арифметического решения системы трех уравнений первой степени. При этом впервые в истории используются отрицательные коэффициенты и формулируются правила действия с отрицательными количествами. (Сами решения они, однако, искали только положительные, так же, как это позже делал Диофант.) В тех же книгах уже фигурирует способ извлечения квадратных и кубических корней.

3. С концом греческой науки в Европе наступил научный застой, и центр развития математики переместился в Индию, Среднюю Азию и арабские страны [19]. Здесь на протяжении тысячи лет, с V по XV в., математика развилась главным образом в связи с потребностями вычислений, в частности для астрономии; математики Востока по большей части были также астрономами. Ими, правда, почти ничего не было прибавлено значи-

тельного к греческой геометрии; в этой науке они лишь сохранили для последующих времен творения греков. Зато индийскими, арабскими и среднеазиатскими математиками были достигнуты громадные успехи в области арифметики и алгебры [20].

Индийцы, как уже говорилось в § 2, изобрели современную систему счисления. Они ввели также отрицательные числа, связывая противоположение положительных и отрицательных чисел с противоположением имущества и долга или двух направлений на прямой. Они, наконец, начали оперировать с иррациональными количествами так же, как с рациональными, без геометрического их представления, в отличие от греков.

У них были также специальные обозначения для алгебраических действий, включая извлечение корня. Именно благодаря тому, что индийские и среднеазиатские ученые не смутились различием иррациональных и рациональных количеств, они смогли преодолеть «засилие» геометрии, характерное для греческой математики, и открыли путь развитию настоящей алгебры, свободной от тяжеловесной геометрической оболочки, в которую она была втиснута греками.

Великий поэт и математик Омар Хайям (ок. 1048—1122) и Насирэддин Туси явно указывали, что каждое отношение величин, все равно соизмеримых или несоизмеримых, может быть названо числом; тем самым у них мы находим уже то общее определение числа (как рационального, так и иррационального), которое в формулировке Ньютона было приведено выше, в § 4. Величие этих достижений становится особенно ясным, если заметить, что полное признание отрицательных и иррациональных чисел всеми европейскими математиками было достигнуто очень нескоро, даже после того, как в Европе началось возрождение математики. Еще, например, знаменитый французский математик Виет (1540—1603), которому алгебра многим обязана, избегал отрицательных чисел, а в Англии протесты против отрицательных чисел раздавались даже в XVIII в. Числа эти считались нелепыми, так как они меньше нуля, т.е. «меньше чем ничто». Теперь они стали привычными хотя бы в виде отрицательной температуры; все у нас читают в газетах и понимают, что означает: «температура в Москве —8°».

Самое слово «алгебра» происходит от названия сочинения хорезмского математика и астронома Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми (Мухаммеда сына Мусы из Хорезма), жившего в IX в.; его сочинение по алгебре называлось «Альджебр альмукабала», что означает «восстановление и противоположение». Под восстановлением — альджебр — понималось перенесение отрицательных членов в другую часть уравнения, а под противоположением — альмукабала — отбрасывание в обеих частях равенства равных членов.

Арабское слово «альджебр» при переводе на латинский язык превратилось в algebra, а альмукабала была отброшена: так появилось самое название «алгебра» [21].

Кстати, происхождение этого названия вполне отвечает содержанию самой науки. Алгебра в своей основе есть учение об арифметических действиях, рассматриваемых формально в общем виде, отвлекаясь от конкретных чисел. Ее задачи составляют в первую очередь формальные правила преобразования выражений и решения уравнений. Аль-Хорезми поставил заглавием своей книги как раз названия некоторых общих формальных правил и тем выразил дух алгебры.

Позже Омар Хайям дал определение алгебры как науки о решении уравнений. Это определение сохраняло свое значение до конца прошлого века, когда наряду с теорией уравнений в алгебре сложились новые направления, существенно изменившие ее лицо, но не изменившие ее общего духа как общего учения о формальных действиях.

Среднеазиатские математики нашли методы извлечения корней и приближенного решения ряда уравнений, общую формулу «бинома Ньютона», хотя выражали ее словами, и др. Они сильно продвинули тригонометрию, приведя ее в систему, и вычислили очень точные таблицы синусов. Эти таблицы вычислил в связи с потребностями астрономии работавший у знаменитого узбекского астронома Улугбека математик Гиясэддин (около 1427), который изобрел также десятичные дроби за 150 лет до их вторичного изобретения в Европе.

Словом, в течение средних веков в Индии и в Средней Азии сложились почти полностью современная десятичная система счисления (включая дроби), элементарная алгебра и тригонометрия. В тот же период начали проникать в соседние страны достижения китайской науки, где около VI в. были известны приемы решения простейших неопределенных уравнений, приближенные вычисления в геометрии и первые приемы приближенного решения уравнений третьей степени. Из материала школьного курса алгебры к XVI в. не хватало, пожалуй, только логарифмов и мнимых чисел. Кроме того, не существовало еще системы буквенных обозначений: содержание алгебры обгоняло ее форму. Однако эта форма была необходима: отвлечение от конкретных чисел и формулирование общих правил требовали соответствующего способа выражения, нужно было обозначать любые числа и действия над ними. Алгебраическая символика является необходимой формой, отвечающей содержанию алгебры. Как в глубокой древности, чтобы оперировать с целыми числами, нужно было выработать для них обозначения, так и теперь, чтобы оперировать с произвольными числами и давать для них общие правила, нужно было выработать соответствующие обозначения. Эта задача решалась со времен греков, и ее решение было завершено лишь в XVII в., когда в трудах Декарта и других сложилась, наконец, современная система обозначений.

4. При возрождении наук европейцы учились у арабов и знакомились с греческой наукой по арабским переводам. Книги Эвклида, Птолемея, Аль-Хорезми в XII в. впервые перевели с арабского на латинский — общий научный язык Западной Европы того времени. В то же время в борьбе с прежней системой счета, идущей от греков и Рима, постепенно укрепляется в Европе индийское счисление, заимствуемое у арабов.

Только в XVI в. европейская наука, наконец, впервые превзошла достижения своих предшественников. Так, итальянцы Тарталья и Феррари решили в общем виде: первый — кубическое, второй — уравнение четвертой степени (см. главу IV). (Заметим, что, хотя эти выводы не проходят в школе, они по уровню применяемых методов принадлежат к элементарной алгебре. К высшей алгебре нужно относить общую теорию уравнений.)

В этот же период впервые начинают оперировать с мнимыми числами (пока чисто формально, без какого-либо реального обоснования, которое выясняется гораздо позже, в начале XIX в.). Вырабатываются также современные алгебраические обозначения и, в частности, появляются (у Виета в 1591 г.) буквенные обозначения не только неизвестных, но и данных чисел: «a», «b» и т. п. Во всей этой работе по развитию алгебры принимает участие много математиков. Тогда же, кстати, появляются в Европе десятичные дроби (их изобретает нидерландский ученый Стевин и пишет о них в 1585 г.).

Наконец, Непер в Англии изобретает логарифмы как пособие для астрономических вычислений и сообщает о них в 1614 г., а Бригг вычисляет первые десятичные таблицы логарифмов, которые появляются в 1624г. [22]

Тогда же появляются в Европе «теория соединений» и общая формула «бинома Ньютона» [23]; прогрессии были уже известны раньше. Таким образом, построение элементарной алгебры завершается. Вместе с этим в начале XVII в. заканчивается весь период математики постоянных величин, элементарной математики, которую теперь с небольшими добавлениями изучают в школе; арифметика, элементарная геометрия, тригонометрия, элементарная алгебра сложились к тому времени во всем существенном. Дальше следовал переход к высшей математике — математике переменных величин.

Не следует, однако, думать, будто на этом кончилось развитие элементарной математики. Оно продолжается и, например, в элементарной геометрии постоянно появлялись и появляются новые результаты. Более того, именно благодаря дальнейшему развитию математики мы более ясно осознали сущность самой элементарной математики. Однако руководящую роль в математике теперь уже приобрели понятия переменной величины, функции, предела. Задачи, идущие из элементарной математики, теперь часто не только освещаются и решаются с помощью этих понятий высшей математики и связанных с ними методов, но они подчас и не разрешимы элементарными методами. В той же связи с понятиями и методами высшей математики задачи, идущие от элементарной математики, служат и теперь источником более общих результатов и даже теорий. Примеры тому представляет уже упомянутая теория правильных систем фигур, или задачи теории чисел, элементарные по формулировке, но вовсе не элементарные по методам их решения, о чем читатель может подробнее узнать в главе X (том 2).

Огл. § 6. Математика переменных величин

1. К XVI в. исследование движения стало центральной задачей естествознания. К исследованию движения, исследованию различных процессов изменения и зависимостей между изменяющимися величинами естественные науки были подведены запросами практики и всем развитием этих наук.

Как отражение общих свойств изменяющихся величин и зависимости между ними в математике возникли понятия переменной величины функции, и это кардинальное расширение предмета математики определило переход к новому ее этапу — математике переменных величин.

Закон движения тела по данной траектории, например по прямой, определяется тем, как нарастает со временем пройденный телом путь.

Так, Галилей (1564—1642) открыл закон падения, установив, что путь, проходимый падающим телом, нарастает пропорционально квадрату времени. Это выражается известной формулой s = gt2/2 (1)

где g = 9,81 м/сек2).

Вообще закон движения задает путь, пройденный за время t. Здесь время t и путь s — две переменные: «независимая» и «зависимая», а тот факт, что каждому t отвечает определенный путь s, означает, что путь есть функция времени t.

Математические понятия переменной и функции представляют собой не что иное, как абстрактное обобщение конкретных переменных величин (как время, путь, скорость, угол поворота, зачерчиваемая площадь и т. д.) и конкретных зависимостей между ними (как зависимость пути от времени и т. д.). Как понятие действительного числа есть отвлеченный образ значения любой величины, так «переменная» есть отвлеченный образ изменяющейся величины — величины, необходимо принимающей в рассматриваемом процессе разные значения. Математическая переменная величина x есть не что иное, как «нечто», или, лучше сказать, что угодно, что может принимать разные численные значения. Это есть, стало быть, временная вообще; под ней можно разуметь и время, и путь, и любую другую величину.

Совершенно так же функция есть отвлеченный образ зависимости одной величины от другой. Утверждение, что y есть функция x, обозначает в математике только то, что каждому значению, которое может принять x, отвечает определенное значение y. (Функцией называют также самое соответствие или закон соответствия значений y значениям x.) Например, по закону падения, пройденный путь связан со временем падения формулой (1). Путь есть функция времени.

Энергия движущегося тела выражается через его массу и скорость по формуле

$E = mv2/2$ (2)

Для данного тела энергия E есть функция скорости v.

По известному закону количество тепла, выделяемое в проводе в единицу времени при прохождении тока, выражается формулой

$Q = RI2/2$, (3)

где I — сила тока, а R — сопротивление провода. При данном сопротивлении каждой силе тока I отвечает определенное количество тепла Q, выделяемое в единицу времени. Стало быть, Q есть функция I.

площадь прямоугольного треугольника

Рис. 5

Площадь S прямоугольного треугольника с данным острым углом a и прилежащим катетом x (рис. 5) выражается формулой

$S = 1/2x2$ tg a (4)

При данном угле a площадь есть функция катета x.

Все формулы (1)—(4) могут быть объединены в одной

$y = 1/2ax2$. (5)

Это и есть переход от конкретных переменных величин t, S, E, Q, v и т. д. к переменным вообще x и y, от конкретных зависимостей (1), (2), (3), (4) — к их общему виду (5). Если механика и теория электричества имеют дело с конкретными формулами (1), (2), (3), связывающими конкретные величины, то математическое учение о функциях имеет дело с общей формулой (5), не связывая ее ни с какими конкретными величинами.

Следующая ступень отвлечения от конкретного состоит в том, что рассматривают не данную зависимость y от x, как y = 1/2ax2 , y = sin x, y = lg x, а функциональную зависимость y от x вообще, выражаемую отвлеченной формулой

$$y = f(x).$$

Эта формула означает, что величина y есть вообще некоторая функция x, т. е. каждому значению, которое может принять x, каким-либо способом отвечает определенное значение y. Предметом математики становятся не только те или иные данные функции (y = 1/2ax2 , y = sin x и т. п.), но любые (точнее: более или менее любые) функции. Эти ступени отвлечения сначала от конкретных величин, а потом и от конкретных функций аналогичны ступеням абстракции, пройденным при образовании понятия о целом числе: сначала отвлечение от конкретных совокупностей предметов приводит к понятию об отдельных числах (1,3,12 и т. п.), а дальнейшее отвлечение приводит к понятию любого целого числа вообще. Это обобщение есть результат глубокого взаимодействия анализа и синтеза: анализа отдельных зависимостей и синтеза выявленных их общих черт в форме новых понятий.

Область математики, посвященная изучению функций, называется анализом, математическим анализом или, чаще, анализом бесконечно малых. Последнее название связано с тем, что важным средством изучения функций является понятие о бесконечно малой величине (содержание этого понятия и его значение разъясняются в главе II).

Так как функция есть отвлеченный образ зависимости одной величины от другой, то можно сказать, что анализ имеет своим предметом зависимости между переменными величинами, но не между теми или иными конкретными величинами, а между переменными вообще, в отвлечении от их содержания. Такое отвлечение обеспечивает широту применений анализа, так как в одной формуле, в одной теореме он охватывает бесконечное число возможных конкретных случаев. Пример тому дают уже наши простые формулы (1)—(5). Здесь видна полная аналогия анализа с арифметикой и алгеброй. Все они возникли из определенных практических задач и отражают в общем, отвлеченном виде реальные количественные отношения действительности.

2. Итак, новый период в математике, начавшийся в XVII в.,— период математики переменных величин, можно определить как период появления и развития анализа. (Это третий из перечисленных выше крупных этапов развития математики.) Понятно, однако, что никакая теория не возникает в результате одного образования новых понятий, так и анализ не мог появиться из одних понятий переменной и функции. Для создания теории, и тем более целой области науки, какой является математический анализ, нужно, чтобы новые понятия, так сказать, пришли в действие, чтобы через них открывались новые взаимосвязи, чтобы они позволяли решать новые задачи.

Более того, сами новые понятия зарождаются, развиваются, уточняются, обобщаются только на основе тех задач, которые они позволяют, решить, только на основе тех теорем, в которые они входят. Понятия переменной и функции не возникли сразу в готовом виде у Галилея, Декарта, Ньютона или кого-либо еще. Они зарождались у многих математиков (как, например, у Непера в связи с логарифмами), потом приняли более или менее отчетливую, но далеко не окончательную форму у Ньютона и Лейбница и уточнялись и обобщались дальше с развитием анализа. Современное определение их сложилось только в XIX в., но и оно не является абсолютно строгим и совершенно окончательным. Развитие самого понятия функции продолжается и в настоящее время.

Математический анализ создавался на материале зарождавшейся механики, на задачах геометрии и методах и задачах, идущих из алгебры.

Первым решительным шагом в создании математики переменных величин был выход в 1637 г. книги Декарта «Геометрия», где были заложены основы так называемой аналитической геометрии. Основные идеи Декарта следующие.

Пусть мы имеем, например, уравнение

x2 + y2 = a2. (6)

В алгебре x и y понимали как неизвестные, и так как данное уравнение не позволяет их определить, то оно не представляло для алгебры существенного интереса. Декарт же рассматривает x и y не как неизвестные, которые нужно находить из уравнения, но как переменные; само же уравнение выражает тогда зависимость между этими переменными. Такое уравнение в общем виде можно, перенося все члены в левую часть, записать так:

P(x,y) = 0.

Далее, Декарт вводит на плоскости координаты x, y, называемые теперь декартовыми (рис. 6). Тем самым с каждой парой значений x, y сопоставляется точка, и обратно: каждой точке отвечают ее координаты x, y. Благодаря этому уравнение P(x, y) = 0 определяет геометрическое место тех точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Это будет, вообще говоря, некоторая линия. Например, уравнение (6) определяет окружность радиуса a с центром в начале координат. В самом деле, как видно из рис. 7, по теореме Пифагора x2 + y2 есть квадрат расстояния от начала O до точки M с координатами x и y. Поэтому уравнение (6) определяет геометрическое место тех точек, расстояние которых от начала равно a, т. е. окружность.

декартовы координаты

Рис. 6.

квадрат расстояния от начала O до точки M

Рис. 7.

Обратно: геометрическое место точек, заданное тем или иным геометрическим условием, можно задавать уравнением, выражающим то же условие на языке алгебры с помощью координат. Так, например, геометрическое условие, определяющее окружность,— то, что она есть геометрическое место точек, равноудаленных от данной,— это условие на алгебраическом языке выражается уравнением (6).

Таким образом, общая задача и метод аналитической геометрии состоят в следующем: представить то или иное уравнение с двумя переменными линией на плоскости и по алгебраическим свойствам уравнения исследовать геометрические свойства соответствующей линии, и обратно: по геометрическим условиям, задающим линию, найти ее уравнение и потом опять по алгебраическим свойствам уравнения исследовать геометрические свойства этой линии. Таким путем геометрические задачи можно сводить на алгебраические и, в конце концов, на вычисление.

Содержание метода аналитической геометрии будет подробно объяснено в главе III. Сейчас мы хотим обратить внимание на то, что, как видно из нашего краткого изложения, источником этого метода служит сочетание геометрии, алгебры и общей идеи переменной величины. Главное геометрическое содержание начал аналитической геометрии составляет теория конических сечений (эллипс, гипербола, парабола). Эта теория, как уже упоминалось, была развита еще древними; выводы Аполлония уже содержали в геометрической форме уравнения конических сечений. Соединение этого геометрического содержания с алгебраической формой, подготовленной развитием математики после греков, и с общей идеей переменной величины, возникшей в связи с изучением движения, и дало аналитическую геометрию.

Если для греков конические сечения были предметом чисто математического интереса, то ко времени Декарта их изучение приобрело реальное значение для астрономии, механики и техники. Кеплер (1571—1630) открыл, что планеты движутся вокруг Солнца по эллипсам, а Галилей установил, что брошенное тело, будь то камень или пушечное ядро, летит по параболе (в первом приближении, если можно пренебречь сопротивлением воздуха). В результате вычисление разных данных, относящихся коническим сечениям, стало насущной необходимостью. Метод Декарта решал именно эту насущную задачу. Словом, он был подготовлен предшествующим развитием математики и вызван к жизни назревшими потребностями науки и техники.

3. Следующим решающим шагом в математике переменных величин было создание Ньютоном и Лейбницем во второй половине XVII в. дифференциального и интегрального исчисления. Это и было фактическим возникновением анализа, так как предмет этих исчислений составляют свойства функций самих по себе, в отличие от аналитической геометрии, предмет которой все-таки составляют еще геометрические фигуры. Ньютон и Лейбниц в действительности только завершили огромную подготовительную работу, в которой участвовали многие математики и начала которой восходят еще к приемам определения площадей и объемов, выработанным древними греками.

Мы не будем объяснять, здесь содержание основных понятий дифференциального и интегрального исчисления, а также последовавших за ними теорий анализа,— это будет сделано в главах, посвященных этим теориям. Мы хотим только обратить внимание на источники дифференциального и интегрального исчисления, которыми служили главным образом новые задачи механики и достаточно старые задачи геометрии: задачи проведения касательных к кривым линиям и определения площадей и объемов. Этими задачами занимались еще древние (достаточно упомянуть Архимеда); в начале XVII в. ими занимались многие математики, Кеплер, Кавальери и другие. Однако решающим было открытие замечательной связи обоих видов задач и формулировка общего метода их решения, — это составляло заслугу Ньютона и Лейбница.

В основе открытия названной связи задач механики и геометрии лежит вытекающая из метода координат возможность графического изображения зависимости одной величины от другой, т.е. графического изображения функций. Опираясь на графическое изображение функций линиями, легко формулировать, в чем состоит связь задач механики и геометрии, лежащая в истоках дифференциального и интегрального исчисления, и в чем содержание этих исчислений.

Дифференциальное исчисление в своей основе есть метод нахождения скорости, движения в любой данный момент времени, когда известна зависимость пути от времени. Эта задача решается «дифференцированием». Оказывается, она совершенно равносильна задаче проведения касательных к той линии, которая дает графическое изображение зависимости пути от времени. Скорость в момент времени t просто равна тангенсу угла наклона касательной в точке, отвечающей этому t на графике (рис. 8).

задача проведения касательной

Рис. 8

Интегральное исчисление в своей основе есть метод нахождения пройденного пути, когда известна зависимость скорости от времени (или вообще — нахождения суммарного результата действия переменной величины). Это задача, очевидно, обратная задаче дифференциального исчисления, т.е. задаче нахождения скорости: она решается «интегрированием». Оказывается, она совершенно равносильна задаче нахождения площади под кривой, которая дает графическое изображение зависимости скорости от времени. Путь, пройденный за промежуток времени от момента t1 до t2 просто равен площади под изображающей график скорости кривой, между прямыми, отвечающими на графике значениям t1 и t2 (рис. 9).

путь равен площади фигуры

Рис. 9.

Стоит отвлечься от механической формулировки задач дифференциального и интегрального исчисления и говорить о функциях вообще, а не о зависимости пути или скорости от времени, как мы получим общее понятие о задачах дифференциального и интегрального исчисления в их чистом виде.

В основе дифференциального и интегрального исчисления, как и всего анализа в его дальнейшем развитии, помимо понятий переменной л функции, лежит также сложившееся позже понятие предела. В период формирования анализа оно заменялось употреблением несколько расплывчатого в то время понятия бесконечно малой величины. Способы тактического вычисления скорости по закону изменения пути — «дифференцирование» и пути по скорости — «интегрирование» основаны на применении алгебры в соединении с понятием предела. Анализ возник в результате соединения этих понятий и приемов с упомянутыми задачами механики, геометрии и некоторыми другими (например, задачами на максимум и минимум). Он был насущно необходим для развития механики, в самой формулировке законов которой уже фигурируют, хотя бы в скрытом виде, понятия анализа. Второй закон Ньютона в формулировке самого Ньютона говорит, что «изменение количества движения пропорционально действующей силе». Точнее: скорость изменения количества движения пропорциональна силе. Стало быть, для того, чтобы пользоваться этим законом, нужно уметь определять скорость изменения которой величины, т. е. дифференцировать. Если мы будем формулировать тот же закон, говоря, что ускорение пропорционально силе, то проблема сохранится, потому что ускорение есть не что иное, как скорость изменения скорости. Само собой также понятно, что для определения закона движения, вызываемого данной переменной силой, т. е. проходящего с данным, вообще говоря, переменным ускорением, нужно уметь решать обратную задачу — находить самую величину по скорости изменения, т. е. нужно интегрировать. Можно сказать, что Ньютон просто вынужден изобрести дифференцирование и интегрирование, чтобы иметь возможность развивать механику.

4. Вместе с дифференциальным и интегральным исчислением зародились другие отделы анализа: теория рядов (см. главу II, § 14), теория дифференциальных уравнений (главы V и VI, том 2), применение анализа к геометрии, выделившееся позже в особую область геометрии — общую теорию кривых линий и поверхностей, называемую дифференциальной геометрией (глава VII, том 2). Все эти теории также были вызваны к жизни и побуждались к развитию задачами механики, физики и техники. Теория дифференциальных уравнений — важнейшая ветвь анализа — имеет дело с такими уравнениями, где неизвестной является уже не величина, а функция, т.е. закон зависимости одной величины от другой или от нескольких других величин. Легко понять, откуда возникают такие задачи. В механике требуется определить закон движения тела в данных условиях, а не какое-нибудь одно значение скорости или пути. В ме-

ханике жидкостей требуется найти распределение скоростей по всей массе текущей жидкости, т. е. найти зависимость скорости от всех трех координат в пространстве и еще от времени. Аналогично в теории электричества и магнетизма требуется найти напряжение поля во всем пространстве, т. е. зависимость этого напряжения от тех же трех координат. И тому подобное. Такого рода задачи постоянно возникали в механике, включая гидродинамику и теорию упругости, в акустике, в теории электричества и магнетизма, в теории тепла. Вообще с момента своего возникновения анализ развивался в самой тесной связи с развитием механики и вообще физики. Крупнейшие достижения анализа всегда были связаны с решением задач, поставленных этими науками. Начиная с Ньютона, величайшие аналитики Д. Бернулли (1700—1782) и Л. Эйлер (1707—1783), Ж. Лагранж (1736—1813) и А. Пуанкаре (1854—1912), М. В. Остроградский (1801—1861) и А. М. Лянунов (1857—1918), как и многие другие, в своих работах, прокладывавших новые пути в анализе, исходили, как правило, из насущных задач современного им точного естествознания.

Так возникли новые теории: Эйлер и Лагранж создают в прямой связи с механикой новую ветвь анализа — так называемое вариационное исчисление (см. главу VIII, том 2), а в конце XIX в. Пуанкаре и Ляпунов, опять-таки исходя из задач механики, создают так называемую качественную теорию дифференциальных уравнений (см. главу V, том 2, § 7).

В XIX в. анализ обогатился новой важной ветвью — теорией функций комплексного переменного (см. главу IX, том 2). Зачатки этой теории имелись еще в трудах Эйлера и некоторых других математиков, но оформление ее в стройную теорию произошло к середине XIX в. и исходило в большой степени от французского математика Коши (1789—1857). Эта теория скоро достигла значительного развития и приобрела большое значение вследствие богатства своего содержания, а также потому, что она позволила глубже проникнуть в ряд законов анализа и нашла существенные приложения к решению важных задач самой математики, физики и техники.

Анализ бурно развивался, став не только центром и главной частью математики, но и проникнув в более старые ее области: алгебру, геометрию и даже теорию чисел. Алгебру стали понимать в основном как учение о функциях, выражаемых в виде многочленов от одной или нескольких переменных [24]. В геометрии стала господствовать аналитическая и дифференциальная геометрия. Наконец, еще Эйлер ввел методы анализа в теорию чисел, положив тем самым начало так называемой аналитической теории чисел, с развитием которой связаны глубочайшие достижения науки о целом числе.

Через анализ с его понятиями переменной, функции и предела во всю математику проникает идея движения, изменения и, стало быть, диалектика. Точно так же, в основном через анализ, математика испытывает на себе влияние точного естествознания и техники и сама включается в их развитие в качестве метода точной формулировки его законов и решения его задач. Как у греков математика была в основном геометрией, так, можно сказать, после Ньютона она стала в основном анализом. Конечно, анализ не поглотил всей математики целиком; в геометрии, теории чисел и алгебре всегда сохранялись специфические для них задачи и методы. Так, еще в XVII в. одновременно с аналитической геометрией родилась другая глава геометрии — проективная геометрия, в которой господствовали чисто геометрические методы. Она имела своим источником задачи изображения предметов на плоскости (проектирование) и соответственно применяется, в частности, в начертательной геометрии.

Тогда же зародилась новая важная область математики — теория вероятностей, имеющая своим предметом закономерности, обнаруживаются в больших массах явлений, как серии выстрелов или бросаний монеты. Она приобрела в последнее время особое значение для физики и техники; ее расцвет, в достижении которого сыграли большую роль силы русских и советских математиков, также обусловлен идущими от естествознания и практики проблемами и применением методов анализа. Своеобразие этой теории состоит в том, что она имеет дело с законами «случайных событий», давая математические методы исследования необходимости, которая проявляется в случайности. Основы теории вероятности будут освещены в главе XI (том 2).

высота цистерны равна диаметру ее основания

Рис. 10.

5. Анализ со всеми его ответвлениями дал естествознанию и технике мощные методы решения разнообразнейших задач. Мы уже упоминали одну из них: нахождение скорости изменения какой-либо величины, когда известна зависимость самой величины от времени; определение площадей криволинейных фигур и объемов тел; определение суммарного результата какого-либо процесса или суммарного действия переменной величины. Так, интегральное исчисление позволяет определить работу газа при расширении, когда давление изменяется по из-

вестному закону; то же исчисление позволяет вычислять, например, напряжение электрического поля сколь угодно сложной системы зарядов, исходя из закона Кулона, определяющего напряжение поля от одного точечного заряда, и т.п. Далее, анализ дал метод нахождения наибольших и наименьших значений величин при тех или иных условиях. Так, с помощью анализа легко определить форму цилиндрической цистерны, которая при данном объеме имеет наименьшую поверхность и тем самым требует наименьшей затраты материала. Оказывается, это будет, когда высота цистерны равна диаметру ее основания (рис. 10). Анализ позволяет найти форму линии, по которой должно скатываться тело, чтобы в наименьшее время попасть из одной данной точки в другую (эта линия — так называемая циклоида; рис. 11).

циклоида - линия, по которой должно скатываться тело, чтобы в наименьшее время попасть из одной данной точки в другую

Рис. 11.

Как решаются эти и другие подобные задачи, читатель узнает из глав II и VIII (том 2).

Анализ, точнее теория дифференциальных уравнений, дает возможность находить не просто отдельные значения переменных величин, но и неизвестные функции, т. е. законы зависимости одних величин от других. Так, мы имеем возможность, исходя из общих законов электрического тока, рассчитывать зависимость силы тока от времени при включении напряжения в любой цепи с сопротивлением, емкостью и самоиндукцией. Мы имеем возможность определять закон течения жидкости, закон распределения скоростей во всей массе жидкости при данных условиях ее течения. Мы имеем возможность вывести общие законы колебаний струн, мембран, законы распространения колебаний в различных средах: это относится к звуковым волнам, электромагнитным волнам, упругим колебаниям, распространяющимся в земле при землетрясениях и взрывах; кстати, это дает новые методы разведки полезных ископаемых и глубинного исследования грунтов. Отдельные задачи такого рода читатель встретит в главах V и VI (том 2).

Наконец, анализ дает не только способы решения тех или иных задач, он дает общие методы для самой математической формулировки количественных законов точного естествознания. Как уже сказано раньше, основные законы механики нельзя формулировать математически, не прибегая к понятиям анализа, а без такой формулировки мы не имели бы возможности решать задачи механики. Точно так же общие законы теплопроводности, диффузии, распространения колебаний, течения химических реакций, основные законы электромагнетизма и многие, многие другие просто не могут быть математически точно формулированы без понятий анализа. Только благодаря такой формулировке эти законы дают почву для применения их в разнообразнейших конкретных случаях, дают основу для точных математических выводов в отдельных задачах, касающихся теплопроводности, колебаний, растворения, электромагнитного поля, в задачах механики, астрономии, всех многочисленных разделов физики, химии, теплотехники, энергетики, машиностроения, электрохимии и т. д. и т. п.

6. Подобно тому, как в истории геометрии у греков стро-

гое и систематическое изложение, данное Эвклидом, завершало долгий путь предшествующего развития, так по мере развития анализа нарастала необходимость его обоснования, более строгого и систематического, чем то, какое давали первые творцы его действенных методов: Ньютон, Эйлер, Лагранж и другие. Создаваемый ими анализ по мере своего роста, во-первых, шел к все более и более глубоким и трудным задачам, а во-вторых, самый его объем требовал уже большей систематичности и продуманности его основ. Так, количественный рост теории необходимо порождает задачу ее лучшего обоснования, систематизации, критического отбора ее основ. «Обоснование» теории появляется как итог ее известного развития, а не исходный пункт, потому что без теории попросту неизвестно еще, что же нужно обосновывать. «Принципы,— как сказал Ф. Энгельс, — не исходный пункт исследования, а его заключительный результат» [25]. Кстати, об этом забывают некоторые современно формалисты, полагающие наиболее целесообразным излагать и даже развивать теории, исходя из аксиом, не предваренных никаким разбором того реального содержания, которое они должны суммировать. Но аксиомы сами по себе нуждаются в содержательном обосновании; они лишь суммируют другой материал и дают начало логическому построению теории [26]. Необходимый период критики, систематизации и обоснования наступил для анализа к середине прошлого столетия. Усилиями ряда выдаются ученых эта важная и трудная работа была успешно выполнена.

В частности, получили строгие определения основные понятия действительного числа, переменной, функции, предела, непрерывности.

Впрочем, как мы уже имели случай заметить, никакое из этих определений нельзя считать абсолютно строгим и совершенно окончательным. Развитие этих понятий продолжается. Эвклид и все математики в течение двух тысяч лет после него, несомненно, считали эвклидовы «Начала» почти что пределом логической строгости. Но теперь, на современный взгляд, эвклидово обоснование геометрии выглядит довольно поверхностным. Этот исторический пример учит, что не следует обольщаться на счет «абсолютной» и «окончательной» строгости современной математики. В науке, которая еще не умерла и не превратилась в мумию, нет и не может быть ничего вполне завершенного. Однако мы можем сказать с уверенностью, что, во-первых, установленные теперь основания анализа достаточно хорошо отвечают современным задачам науки и современному понятию о логической точности и что, во-вторых, продолжающееся углубление этих понятий и идущая вокруг них дискуссия не заставляют и не заставят просто отбросить эти основания; но они ведут к новому, более точному и глубокому их пониманию, о результатах которого в полной мере пока еще, может быть, трудно судить.

Хотя установление принципов теории — это итог ее развития, но он не служит ее концом, а, напротив, служит новому ее движению. Так было с анализом. В связи с уточнением его основ возникла новая математическая теория — созданная немецким математиком Кантором в 70-х годах прошлого столетия общая теория бесконечных множеств любых абстрактных объектов, будьте множества чисел, точек, функций или других «вещей» в том же роде. На почве этих идей выросла новая глава анализа — так называемая теория функций действительного переменного — понятие о которой, так же как понятие об основаниях анализа и теории множеств, изложено в главе XV(том 3). Вместе с тем общие идеи теории множеств проникли во все области математики. Но эта «теоретико-множественная точка зрения» неразрывно связана с новым этапом в развитии математики, к краткому рассмотрению которого мы сейчас и перейдем.

Огл. § 7. Современная математика

1. Четырем этапам в развитии математики, о которых говорилось в § 5, естественно, отвечают ступени в математическом образовании, так что основному содержанию каждого из этих этапов можно довольно точно сопоставить уровень математических знаний, получаемых на разных ступенях обучения.

Основные результаты арифметики и геометрии, полученные в первый период развития математики, известны у нас всем и составляют предмет начального образования. Например, определяя количество материала, нужное для выполнения работы, скажем — настила пола, мы уже пользуемся этими первыми результатами математики.

Важнейшие достижения второго периода — периода элементарной математики — составляют предмет преподавания в средней школе.

Основные результаты третьего периода (основы анализа, теории дифференциальных уравнений, высшей алгебры и др.) составляют главное содержание математического образования каждого инженера; они изучаются так или иначе в каждой высшей школе, на каждом факультете, кроме гуманитарных. Таким образом, основные идеи и результаты математики этого периода широко известны, и ими пользуются в большем или шпынем объеме почти все инженеры и естествоиспытатели.

Напротив, идеи и результаты последнего, современного, этапа в развитии математики изучаются в основном только на специальных физико-математических факультетах. Кроме специалистов-математиков, ими пользуются научные работники в области механики, физики, ряде отраслей новой техники. Конечно, это вовсе не означает, что они удалены от приложений, но они представляют собой последние результаты развития науки, естественно, оказываются более сложными. Поэтому, переходя сейчас к общей характеристике последнего этапа в развитии математики, мы не можем рассчитывать на то, что все, о чем мы коротко скажем, окажется вполне ясным. Мы попытаемся в нескольких штрихах дать только самую общую характеристику новых разделов математики, содержание которых более подробно выяснится из соответствующих глав книги.

Если этот параграф покажется излишне трудным, его можно в первом чтении пропустить, с тем чтобы вернуться к нему после ознакомления со специальными главами.

2. Начало современного этапа в развитии математики характеризовалось глубокими изменениями во всех ее основных разделах: алгебре, геометрии, анализе. Быть может наиболее отчетливо это изменение можно проследить на примере геометрии. В 1826 г. Лобачевским и почти одноименно также венгерским математикам Яношем Бойай была развита новая неэвклидова геометрия. Идеи Лобачевского далеко не сразу стали понятны всем математикам: они были слишком смелы и неожиданны, однако именно с этого момента началось принципиально

новое развитие геометрии, изменилось самое понимание того, что такое геометрия. Ее предмет и область применений стали быстро расширяться. Важнейший после Лобачевского шаг в этом направлении был сделан в 1854 г. знаменитым немецким математиком Риманом. Он явно формулировал общую идею о неограниченности числа «пространств», которые может изучать геометрия, и указал вместе с тем возможный их реальный смысл.

В новом развитии геометрии характерны два обстоятельства.

Во-первых, если прежде геометрия изучала только пространственные формы и отношения материального мира (притом лишь в той мере, в какой они отражаются в рамках эвклидовой геометрии), то теперь ее предмет составляют также многие другие формы и отношения действительности, лишь сходные с пространственными и потому допускающие использование при их исследовании геометрических методов. В связи с этим термин «пространство» приобрел в математике новый, более широкий и в то же время более специальный смысл. Одновременно сами методы геометрии стали во много раз богаче и разнообразнее. (В свою очередь они дают более совершенные средства познания того окружающего нас физического пространства, от которого была абстрагирована геометрия в ее первоначальном виде.)

Во-вторых, даже в эвклидовой геометрии произошли важные сдвиги: в ней изучаются свойства несравненно более сложных фигур, вплоть до произвольных точечных множеств. Появляется также принципиально новый подход к самим исследуемым свойствам фигур. Выделяются отдельные группы свойств, которые подвергаются исследованию в отвлечении от других, причем это отвлечение, это абстрагирование уже внутри геометрии порождает своеобразные ее разделы, являющиеся по существу самостоятельными «геометриями». Развитие геометрии во всех этих направлениях продолжается, и предметом ее рассмотрения служат все новые и новые «пространства» и их «геометрии»: пространство Лобачевского, проективное пространство, эвклидовы и другие пространства разных чисел измерения, например четырехмерное, римановы пространства, финслеровы пространства, топологические пространства и т. д. Эти теории находят важные применения как в самой математике, помимо геометрии, так и в физике и механике, причем особенно замечательным является их применение в теории относительности современной физической теории пространства, времени и тяготения. Из сказанного можно видеть, что речь идет о качественном изменении геометрии.

Идеи современной геометрии и некоторые элементы учения о разных исследуемых в ней пространствах будут изложены в главах XVII и XVIII (том 3).

3. Качественное изменение претерпела также алгебра. В первой половине прошлого столетия в ней зарождаются новые теории, которые привели к ее изменению, расширению ее предмета и области приложений.

Алгебра в своей первоначальной основе была, как уже говорилось в § 5, учением об арифметических действиях над числами, рассматриваемых формально, в общем виде, в отвлечении от данных конкретных чисел. Это отвлечение нашло отражение в том, что в алгебре величины обозначаются буквами, с которыми производят выкладки по известным формальным правилам.

Современная алгебра, сохраняя эту основу, колоссально расширяет ее. В ней рассматривают теперь «величины» гораздо более общей природы, чем числа, причем изучаются действия над этими «величинами», аналогичные в той или иной степени по своим формальным свойствам обычным арифметическим действиям сложения, вычитания, умножения и деления. Простейший пример представляют векторные величины, которые тоже, как известно, можно складывать по правилу параллелограмма. Но обобщение, проводимое в современной алгебре, таково, что даже самый термин «величина» часто теряет смысл, и говорят вообще об «объектах», над которыми можно производить действия, подобные обычным алгебраическим. Так, например, два движения, произведенные одно за другим, как очевидно, равносильны некоторому одному суммарному движению, два алгебраических преобразования формулы могут быть равносильны одному итоговому преобразованию и т. п. Соответственно можно говорить своего рода «сложении» движений или преобразований. Все это и многое другое в том же роде изучает в общем отвлеченном виде современная алгебра.

Новые алгебраические теории, идущие в этом направлении, зародились в первой половине прошлого столетия в исследованиях ряда математиков, из которых особенно следует назвать французского математика Галуа (1811—1832). Понятия, методы и результаты современной алгебры находят существенные применения в анализе, геометрии, физике, кристаллографии и т.п. В частности, упомянутое в конце § 3 учение о симметрии кристаллов, развитое Е. С. Федоровым, опирается на соединение геометрии с одной из новых алгебраических теорий — так называемой теорией групп.

Мы видим, что речь идет о коренном, качественном обобщении предмета алгебры, об изменении самого понимания того, что такое алгебра. Идеи современной алгебры и элементы некоторых ее теорий будут изложены в главах XX и XVI, том 3).

4. Анализ со всеми его ответвлениями также претерпел глубокие сдвиги. Во-первых, как уже было сказано в предыдущем параграфе, были уточнены его основания, в частности получили точные и общие определения его основные понятия: функция, предел, интеграл и, наконец, само понятие переменной величины (было дано строгое определение действительного числа). Начало уточнения основ анализа исходит от чешского математика Больцано (1781—1848), французского математика Коши (1789—1857) и ряда других. Это уточнение относится к тому же периоду, что и новое развитие алгебры и геометрии; оно было в известной мере завершено к 80-м годам прошлого столетия немецкими математиками Вейерштрассом, Дедекиндом и Кантором. Последний, как уже было сказано в конце § 6, положил начало теории бесконечных множеств, сыгравшей большую роль в развитии новых идей математики. Уточнение понятий переменной и функции в связи с теорией множеств создало почву для дальнейшего развития анализа. Произошел переход к исследованию более общих функций; в соответствующем направлении обобщается аппарат анализа: интегральное и дифференциальное исчисления. Так, на пороге нашего столетия возникла уже упомянутая в § 6 новая глава анализа, называемая теорией функций действительного переменного. Развитие этой теории более всего обязано французским математикам Борелю, Лебегу и др. и потом особенно Н. Н. Лузину (1883—1950) и его школе. В целом новые гла-

вы анализа называют современным анализом, в отличие от прежнего, называемого классическим. В анализе возникли и другие новые теории. Так, выделилась в особую область теория приближения функций, которая изучает вопросы о наилучшем приближенном представлении общих функций различными «простыми» функциями, в первую очередь многочленами, т. е. функциями вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Теория приближения функций имеет важное значение уже по одному тому, что дает общие основания для практического вычисления функций, для приближенной замены сложных функций функциями более простыми. Зачатки этой теории восходят еще ко времени возникновения анализа. Новое направление было дано ей великим русским математиком Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821—1894). Направление это было позже развито в так называемую конструктивную теорию функцией, главным образом трудами советских математиков, особенно С. Н. Бернштейна (род. 1880), которому принадлежат здесь важнейшие результаты. Приближению функций посвящена глава XII (том 2).

Выше уже шла речь о развитии теории функций комплексного переменного. Мы должны еще упомянуть о так называемой качественной теории дифференциальных уравнений, берущей начало от работ Пуанкаре (1854—1912) и А. М. Ляпунова (1857—1918), о которой дается понятие в главе V (том 2), а также о теории интегральных уравнений и т. д. Последние теории имеют большое практическое значение для механики, физики и техники. Так, качественная теория дифференциальных уравнений решает задачи об устойчивости движения, работы механизмов, электроколебательных систем и т.п. Устойчивость процесса в самом общем смысле означает, что при малом изменении начальных данных или условий его течения весь его режим на всем протяжении времени будет изменяться также незначительно. Техническое значение такого рода вопросов едва ли нуждается в пояснениях.

5. На почве развития анализа и математической физики в соединении с новыми идеями геометрии и алгебры возникла новая обширная область — так называемый функциональный анализ, играющий исключительно важную роль в современной математике. В создании его принимали участие многие ученые; назовем, например, крупнейшего немецкого математика последнего времени Гильберта (1862—1943), венгерского математика Рисса (1880—1956) и польского математика Банаха (1892—1945). Важные результаты в этой области, связанные с математической физикой, принадлежат молодым советским ученым. Функциональному анализу посвящена отдельная глава XIX (том 3).

Сущность этой новой части математики коротко состоит в следующем. Если в классическом анализе переменной является величина — «число», то в функциональном анализе уже самая функция рассматривается как переменная. Свойства данной функции определяются здесь не сами по обе, а по отношению этой функции к другим функциям. Поэтому рассматриваются уже не отдельные функции, а сразу совокупности всех функций, характеризуемых тем или иным общим свойством, «например всех непрерывных функций. Такая совокупность функций объединяется в так называемое «функциональное пространство». Это соответствует, например, тому, что мы можем рассматривать совокупность всех кривых на плоскости или всех возможных движений данной механической системы, определяя свойства отдельных кривых, или движений по их отношениям к другим кривым, или другим движениям.

Переход от изучения или разыскания отдельных функций к рассмотрению переменной функции подобен переходу от неизвестных чисел x, y к переменным x, y, т.е. подобен указанной в предыдущем параграфе идее Декарта. В связи с этой идеей Декарт дал известное соединение алгебры и геометрии — уравнения с кривой, что послужило одним из решающих моментов возникновения анализа. Подобно этому теперь соединение понятия о переменной функции с идеями уже современной алгебры и современной геометрии породило новый, функциональный, анализ. Подобно тому, как анализ был необходим для развития создавшейся тогда механики, так функциональный анализ дал новые методы решения задач математической физики и представил математический аппарат для новой атомной, квантовой механики. История в известной мере повторяется, но по-новому, на более высокой ступени. Функциональный анализ соединяет, как мы уже сказали, основные идеи и методы анализа, современной алгебры и геометрии и в свою очередь оказывает влияние на их развитие.

Задачи, идущие от классического анализа, получают теперь новые общие решения часто как раз посредством функционального анализа. Здесь, как в фокусе, собираются и дают практические плоды наиболее общие и абстрактные идеи современной математики.

Из этого краткого очерка, из одного перечисления новых направлений анализа (теория функций действительного переменного, теория приближения функций, качественная теория дифференциальных уравнений, теория интегральных уравнений, функциональный анализ) можно понять, что речь идет действительно о существенно новом этапе в развитии анализа.

6. Во все времена технический уровень средств вычисления оказывал существенное влияние на сами математические методы. Однако наводящиеся в нашем распоряжении сродства выполнения вычислений до последнего времени оставались весьма ограниченными. Простейшие приспособления (типа счетов), таблицы логарифмов и логарифмическая линейка, арифмометр, наконец, счетно-аналитические машины и автоматизированный арифмометр — вот основные средства вычислений, существовавшие к 40-м годам XX в. Эти средства обеспечивают более или менее быстрое выполнение отдельных операций (сложения, умножения и т. п.). Но доведение до численного результата практически возникающих задач требует подчас колоссального числа подобных операций, следующих сложной программе, зависящей иногда от получаемых по ходу дела результатов. Решение таких задач оказывалось практически недоступным или полностью обесценивалось длительностью самого решения.

В последнее десятилетие на наших глазах происходит коренное изменение всего уровня вычислительной техники. Современные вычислительные машины, построенные на новых принципах, позволяют вести вычисления с исключительно большой скоростью и при этом автоматически проводить сложные цепи вычислений по заранее намечаемым для этого весьма гибким программам. Некоторые вопросы, связанные с устройством и значением современных счетных машин, будут освещены в главе XIV.

Новая техника не только делает доступными неосуществимые ранее исследования, но она заставляет изменить оценку многих известных математических результатов. Ею особенно стимулируется развитие приближенных методов, т. е. путей, дающих возможность посредством цепи элементарных операций подойти к необходимому численному результату с достаточно большой точностью. Сами методы приходится при этом оценивать с точки зрения удобства их реализации на соответствующих машинах.

В тесной связи с развитием новой вычислительной техники находится математическая логика. Она развилась прежде всего из внутренних потребностей математики в связи с возникшими в ней трудностями и имеет своим предметом анализ математических доказательств. Будучи, собственно, разделом математики, математическая логика включает в себя те разделы общей логики, которые объективно допускают формализацию и могут развиваться математическим методом.

Восходя, с одной стороны, к истокам и основаниям математики, математическая логика, с другой стороны, оказывается тесно связанной с наиболее современными вопросами вычислительной техники. Естественно, например, что доказательство, ведущее к созданию определенного процесса, позволяющего приблизиться к результату с произвольно высокой точностью, существенно отличается от более отвлеченных доказательств существования того или иного результата.

Возникает также своеобразный круг вопросов в связи с исследованием пределов общности тех классов задач, которые вообще могут быть хвачены заведомо ведущим к результату единообразным, вполне определенным методом. На этом пути в математической логике получены глубокие результаты, весьма важные также с общей познавательной точки зрения.

Не будет преувеличением сказать, что в современной математике с развитием новой вычислительной техники и достижениями математической логики связан новый период, характеризующийся тем, что предметом исследования становится не только тот или иной объект, но и те пути, формы, посредством которых этот объект задается, не только те или иные задачи, но и возможные способы их решения.

Ко всему сказанному остается только добавить, что и более старые области математики — теория чисел, эвклидова геометрия, классические алгебра и анализ, теория вероятностей — продолжают на протяжении всего периода современной математики бурно развиваться, обогащаясь новыми принципиальными идеями и результатами. Таковы, например, идеи и результаты, данные в теории чисел и наглядной геометрии русскими и советскими математиками П. Л. Чебышевым, Е. С. Федоровым, И. М. Виноградовым и другими. Широкое развитие теории вероятностей связано с чрезвычайно важными закономерностями статистической физики и современными техническими проблемами.

7. Каковы же наиболее общие характерные черты современной математики в целом, которые выявляются из только что рассмотренного развития геометрии, алгебры и анализа?

Это прежде всего громадное расширение предмета математики, расширение области ее приложений. Такое расширение предмета и области приложений математики означает вместе с тем громадный количественный и качественный ее рост, появление новых теорий и сильных математических методов, которые позволяют решать задачи, вовсе недоступные прежде. При этом расширение предмета математики характеризуется прежде всего тем, что современная математика сознательно ставит перед собой задачу изучения возможных типов количественных отношений и пространственных форм.

Другая характерная черта современной математики — это создание новых обобщающих понятий, новая, более высокая ступень абстракции.

Именно эта особенность обеспечивает сохранение единства математики, несмотря на рост и разнообразие ее ответвлений. В областях, самых далеких друг от друга, обобщающие понятия и теории вскрывают единое и общее. Они же обеспечивают достаточную общность методов, широту приложений и глубокое взаимное проникновение основных разделов математики, геометрии, алгебры, анализа.

К характерным чертам современной математики следует отнести то же известное господство теоретико-множественной точки зрения. Конечно, эта точка зрения сама приобретает смысл именно потому, что суммирует накопленный всем предшествующим развитием математики содержательный материал.

Наконец, одну из характерных черт современной математики составляет более глубокий анализ ее оснований, анализ взаимозависимости ее понятий, структуры отдельных теорий, анализ самых способов математических доказательств и выводов. Без такого анализа основ не могут совершенствоваться и развиваться дальше сами обобщающие принципы и теории.

Определяющую особенность современной математики можно видеть в том, что ее предмет составляет уже не только данные, но и возможные количественные отношения и формы. В геометрии речь идет не только о пространственных, но и о сходных с пространственными, возможных отношениях и формах. В алгебре речь идет о разных системах абстрактных объектов с возможными законами действий над ними. В анализе переменной становится не только величина, но самая функция рассматривается как переменная. В функциональное пространство объединяются все функции того или иного типа, т. е. возможные зависимости между переменными. Поэтому коротко можно сказать, что если элементарная математика есть математика постоянных величин, математика следующего периода — математика переменных величин, то современная математика есть математика возможных, вообще говоря переменных, количественных отношений и взаимосвязей между величинами. Это определение, конечно, неполно, но оно в общем верно выделяет ту характерную черту современной математики, которая обусловливает ее качественное отличие от математики предыдущих эпох.

Огл. § 8. Сущность математики

1. Теперь мы можем, опираясь на все изложенное, перейти к общим выводам о сущности математики.

Сущность математики была выражена Энгельсом в одном из разделов «Анти-Дюринга», и мы приведем здесь этот замечательный отрывок.

В формулировках Энгельса читатель легко узнает то, что говорилось выше, например, по поводу арифметики и геометрии; и это понятно: мы излагали фактическую историю возникновения и развития математики, руководствуясь в ее понимании диалектическим материализмом. Диалектический материализм приводит к верным выводам именно потому, что он ничего не навязывает фактам, но рассматривает факты, как они есть, т. е. в их необходимых связях и развитии.

Свое изложение сущности математики Энгельс начинает с критических замечаний по поводу вздорных взглядов Дюринга, в частности по поводу ложного мнения, будто математика занимается творениями «чистого разума» независимо от опыта. Энгельс пишет:

«Но совершенно неверно, будто в чистой математике разум имеет дело только с продуктами собственного творчества и воображения. Понятия числа и фигуры взяты не откуда-нибудь, а только из действительного мира. Десять пальцев, на которых люди учились считать, т. е. производить первую арифметическую операцию, представляют собой все, что угодно, только не продукт свободного творчества разума. Чтобы считать, надо иметь не только предметы, подлежащие счету, но обладать уже способностью отвлекаться при рассматривании этих предметов от всех прочих их свойств кроме числа, а эта способность есть результат долгого, опирающегося на опыт, исторического развития. Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствованы исключительно из внешнего мира, а не возникли в голове из чистого мышления. Должны были существовать вещи, имеющие определенную форму, и эти формы должны были подвергаться сравнению, прежде чем можно было дойти до понятия фигуры. Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное; таким путем мы получаем точки, лишенные измерений, линии, лишенные толщины и ширины, разные a и b, x и y, постоянные и переменные величины, и только в самом конце мы доходим до продуктов свободного творчества и воображения самого разума, а именно — до мнимых величин. Точно так же выведение математических величин друг из друга, кажущееся априорным, доказывает не их априорное происхождение, а только рациональную взаимную связь. Прежде чем притти к мысли выводить форму цилиндра из вращений прямоугольника вокруг одной из его сторон, нужно было исследовать некоторое количество реальных прямоугольников и цилиндров, хотя бы и в очень несовершенных формах. Как все другие науки, математика возникла из практических нужд людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и из механики. Но, как и во всех других областях мышления, законы, абстрагированные от реального мира, на известной ступени развития отрываются от реального мира, противопоставляются ему как нечто самостоятельное, как явившиеся извне законы, с которыми мир должен сообразоваться. Так было с обществом и государством, так а не иначе, чистая математика применяется впоследствии к миру, хотя она заимствована из этого самого мира и только выражает часть присущих ему форм связей,— и собственно только поэтому может вообще применяться» [27].

2. Таким образом, Энгельс подчеркивает, что математика отражает действительность, что возникла она из практических нужд людей и возникновение ее первых понятий и положений было результатом долгого, опирающегося на опыт исторического развития. Мы уже достаточно подробно проследили это на примере арифметики и геометрии.

Мы убедились, в частности, что именно так возникли понятия числа, величины, геометрической фигуры и что они отражают реальные количественные отношения и пространственные формы действительности. Точно так же основные понятия анализа отражают реальные количественные отношения, они складывались постепенно на основе обобщения громадного конкретного материала; так, понятие функции отражает в обобщенной, абстрактной форме разнообразные зависимости между реальными величинами.

Суммируя все это, Энгельс и приходит к основному выводу о том, что математика имеет своим предметом определенный вполне реальный материал, но рассматривает его в полном отвлечении от конкретного содержания и качественных особенностей. Этим, как мы видим, математика отличается от естественных наук, и Энгельс явно отделяет ее от естествознания [28].

Возможность такого абстрактного рассмотрения предмета математики имеет объективное основание в самом этом предмете. Те общие, не зависящие от качественных особенностей или конкретного содержания, формы, отношения, взаимосвязи и законы, которые отражаются в математике, существуют объективно, независимо от нашего сознания. Только существование числа как объективного свойства совокупности предметов, независимость взаимоотношений между числами от качественных особенностей предметов, богатство этих взаимоотношений сделали возможной арифметику. Там, где нет таких общих форм и отношений, безразличных к содержанию, невозможно и математическое рассмотрение.

3. Указанная основная особенность математики определяет другие характерные ее особенности. В § 2 мы рассматривали некоторые из них специально на примере арифметики. Это — специфический «язык формул», широта приложений, отвлеченный от опыта характер математических выводов, их логическая неизбежность и убедительность. Этот умозрительный характер математики является весьма существенной ее особенностью, и мы рассмотрим эту особенность подробнее.

Если мы отвлекли, скажем, понятие числа от его конкретных оснований и рассматриваем целые числа вообще, вне всякого отношения к тем или иным конкретным совокупностям предметов, то само собой ясно, мы не можем производить опытов над такими отвлеченными числами. Оставаясь на этом уровне абстракции и не возвращаясь к конкретным предметам, можно получать новые выводы о числах только путем рассуждения, исходя из самого понятия о числе. То же относится, конечно, ко всем другим математическим выводам. Оставаясь в пределах чистой геометрии г. е. рассматривая геометрические фигуры в полном отвлечении от всякого качественного, конкретного содержания, мы не можем получить новых выводов иначе как рассуждением, исходя из самого понятия о той или иной фигуре, из самих основных понятий или аксиом геометрии. Так, свойства круга выводят из понятия о круге как геометрическом месте точек, равноудаленных от данной точки, вовсе не думая уже о проверке каждой теоремы на опыте.

Стало быть, отвлеченный характер математики уже предопределяет тот факт, что математические теоремы доказываются только рассуждением, исходя ив самих понятий.

Можно сказать, что в математике исследуют количественные отношения, имея в виду лишь то, что содержится в самом их определении, ответственно математические выводы получают рассуждением, исходя из определений. Конечно, было бы неправильно понимать эти слова слишком буквально и предполагать, что достаточно строгие определения магматических понятий действительно формулировались раньше, чем создавалась соответствующая математическая теория; на самом деле самые понятия уточнялись вместе с развитием теории, в результате ее развития. Глубокий анализ понятия о целом числе, так же как точная формулировка аксиом геометрии, были даны не в древности, а к концу XIX в. Тем более неверно думать, будто есть какое-либо абсолютно точно определенное математическое понятие. Всякое понятие, как бы ни казалось оно точно определенным, все-таки подвижно, оно развивается и уточняется с развитием науки. Это вполне доказано развитием математики в отношении всех ее понятий и это только лишний раз подтверждает основное положение диалектики о том, что нет на свете ничего такого, что было бы совершенно неподвижно и никак не развивалось бы.

Поэтому и в отношении математических понятий можно говорить, во-первых, только о достаточной, но никак не совершенной их определенности, а во-вторых, нужно иметь в виду, что точность и ясность их определения, глубина их анализа развиваются с развитием математики. На этой подвижности математических понятий мы еще будем иметь случай остановиться в следующем параграфе, а сейчас, имея в виду сделанное замечание, обращаем внимание именно на достаточную их определенность.

Именно эта определенность математических понятий вместе с общезначимостью самой логики оказываются причиной характерной для математики внутренней убедительности и логической необходимости ее выводов. Неизбежность умозрительных выводов математики дает повод к ошибочному представлению, будто математика имеет основание в чистом мышлении, будто она априорна, а не исходит из опыта, будто она не отражает действительности. К такого рода взглядам пришел, например, знаменитый немецкий философ Кант. Это глубоко ошибочное идеалистическое представление происходит, в частности, от того, что математику рассматривают не в ее реальном возникновении и развитии, а в готовом виде. Но такой подход совершенно несостоятелен уже по той простой причине, что не соответствует фактическому положению дел. То, что математика не априорна, а возникла из опыта, — это твердо установленный факт. Кстати, о фактическом возникновении геометрии писал еще Эвдем Родосский, которого мы цитировали в § 3.

Не только самые понятия математики, но и ее выводы, ее методы отражают действительность. Это важное обстоятельство как раз и вскрывает Энгельс, когда пишет, что «выведение математических величин друг из друга, кажущееся априорным, доказывает не их априорное происхождение, а только их рациональную взаимную связь». Математические выводы и доказательства возникли как отражение реальных связей, которые люди исследовали на опыте. Сложение чисел отражает реальное соединение нескольких совокупностей предметов в одну. Известное доказательство теоремы о равенстве треугольников, в котором говорят об их наложении, несомненно, имеет своим источником операцию фактического прикладывания предметов друг к другу, которая постоянно производится при сравнении их размеров. Вычисление объемов интегрированием отражает в абстрактной форме реальную возможность складывать тела из тонких слоев или резать их на такие слои. Более сложные математические доказательства есть результат дальнейшего развития, исходящего из таких материальных оснований.

4. Полное отвлечение предмета математики от всякой конкретности и основанный на этом умозрительный характер математических выводов влекут за собою другую важную особенность математики: в математике исследуют не только такие количественные отношения и пространственные формы, которые непосредственно абстрагируются из действительности, но и такие отношения и формы, которые определяются внутри самой математики на основе уже сложившихся математических понятий и теорий. Именно на эту особенность математики обращает внимание Энгельс, когда, указав на возникновение понятий точки, линии, постоянной и переменной величины, говорит: «... и только в самом конце мы доходим до продуктов свободного творчества и воображения самого разума, а именно — до мнимых вели-

чин».

Историческим фактом является то, что мнимые числа не были взяты из действительности в том же смысле, как, скажем, цельте числа. Они появились первоначально внутри самой математики, из необходимого развития алгебры, как корни уравнений вида x2 = — a (где a > 0). И хотя постепенно с ними начали оперировать довольно свободно, их реальный смысл оставался долго неясным, почему за ними и закрепилось название «мнимых». Потом было открыто их геометрическое истолкование и они нашли многочисленные важные применения. Точно так же геометрия Лобачевского возникла как продукт творчества этого великого ученого; он не видел еще ее реального значения и называл ее потому «воображаемой геометрией». Но она была не свободной игрой ума, а неизбежным выводом из основных понятий геометрии, и Лобачевский рассматривал ее как возможную теорию пространственных форм и отношений. Поэтому «свободное творчество и воображение», о которых говорит Энгельс, нельзя понимать как простой произвол мысли. Свободное творчество в науке — осознанная логическая необходимость, определяющаяся исходными, взятыми из опыта понятиями и положениями.

На новом этапе развития математики, начало которому положило как раз построение геометрии Лобачевского и точной теории мнимых чисел, возникли и постоянно возникают новые понятия и теории, создаваемые на основе уже сложившихся понятий и теорий без того, чтобы заимствовать их непосредственно из действительности. Математика определяет и исследует возможные формы действительности, что как раз и составляет одну из решающих особенностей последнего этапа её развития.

Правильное понимание этой особенности дает теория познания диалектического материализма. Ленин писал: «Познание есть отражение человеком природы. Но это не простое, не непосредственное, не цельное отражение, а процесс ряда абстракций, формирования, образования понятий, законов. . . .» [29]. Метафизический материализм также признает познание, в частности математику, отражением природы. Однако, как отмечает Ленин, беда метафизического материализма состоит в неумении применять диалектику к теории отражения [30]. Метафизический материализм понимает сложности этого отражения, не понимает того, что оно идет через ряд абстракций, путем формирования новых понятий, построения новых теорий на основе уже сложившихся понятий и теорий, путем рассмотрения не только данного в опыте, но и возможного. Между тем такой переход от данного к возможному обнаруживается уже в образовании таких понятий, как любое целое число или бесконечная прямая, потому что в опыте не даны ни сколь угодно большие числа, ни бесконечные прямые. Но когда понятие числа выкристаллизовалось, то из самого этого понятия, из самого закона образования последовательных чисел путем прибавления единицы выявилась возможность бесконечного продолжения числового ряда. Совершенно так же из проведения прямых выявилась возможность неограниченного продолжения прямой, выраженная во втором постулате Эвклида: «каждую прямую можно неограниченно продолжить». Дальнейший процесс абстракции привел к понятиям о всем натуральном ряде чисел и о всей бесконечной прямой. На последнем этапе развития математики качественно новым явилось построение теорий, идущих через ряд абстракций и формирования понятий. Но, восходя по ступеням абстракции, математика вовсе не отрывается от действительности. Новое вырастает в ней на основе отражения действительности, вследствие логики самого ее предмета, и именно в силу этого возвращается к действительности в применениях к проблемам физики и техники, Так было с мнимыми числами. То же верно в отношении других математических теорий, как бы ни были они абстрактны.

Характерный пример представляют теории различных многомерных пространств. Они складывались как обобщение эвклидовой геометрии, в соединении с развитием алгебры и анализа, под влиянием механики и физики. Сочетание этих идей привело Римана к построению общей теории, которая была развита дальше другими математиками, нашла ряд важных приложений и, наконец, послужила готовым математическим аппаратом для построения Эйнштейном общей теории относительности, точнее, теории тяготения. Абстрактные геометрические теории нашли такие блестящие приложения не случайно, не вследствие «предустановленной гармонии природы и разума», а вследствие того, что сами они выросли на почве геометрии, возникшей непосредственно из опыта, и в своем возникновении связывались их творцами с задачей исследования реального пространства. Риман, в частности, прямо предвидел связь своей теории с теорией тяготения.

Так, в развитии математики осуществляется закон движения познания, формулированный В. И. Лениным: «Мышление, восходя от конкретного к абстрактному, не отходит — если оно правильное ... — от истины, а подходит к ней. Абстракция материи, закона природы, абстракция стоимости и т. д., одним словом все научные (правильные, серьезные, не вздорные) абстракции отражают природу глубже, вернее, полнее. От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективное реальности» [31].

Из сказанного ясно, что совершенно ложным является идеалистический взгляд, будто математические теории представляют собой только условные схемы, предназначенные для описания данных опыта или «упорядочения потока ощущений» на основе «принципа экономии мышления».

Энгельс отмечает (см. цитату на стр. 61), что положения математики абстрагированные от реального мира, как бы противопоставляются ему и применяются к его изучению, как некоторые готовые схемы. Мы, действительно, постоянно пользуемся, например, счетом, применяя его в готовом виде. Тем более это верно в отношении теорий, возникающих на более высоких ступенях абстракции. В качестве примера уже упоминалось, что риманова геометрия послужила готовой математической схемой для теории тяготения. Но Энгельс объясняет, что возможность такого применения математики к исследованию реального мира основана на том, что она заимствована из этого самого мира и только выражает часть присущих ему форм связей и собственно только потому может вообще применяться. Тот факт, что многие теории создаются внутри самой математики, ничего здесь не меняет. Возникая как теории возможных форм действительности, они вовсе не условны, потому что возникают необходимо, вследствие самой логики предмета и именно поэтому находят реальные применения. Так или иначе, математические теории отражают действительность и различие состоит лишь в том, что это отражение в одних случаях более непосредственно, тогда как в других идет через ряд абстракций, образования понятий и т. д.

5. Последний этап в развитии математики характерен не только более высокими ступенями абстракции, он характерен еще существенным расширением ее предмета, выходящего за рамки первоначального понимания количественных отношений и пространственных форм.

Фигуры в многомерных или бесконечномерных пространствах — это, конечно, не пространственные формы в обычном смысле, как их понимаем мы все, когда имеем в виду обычное реальное пространство, а не абстрактные пространства математики. Эти пространства имеют реальный смысл и отражают в отвлеченном виде определенные формы действительности, но эти формы только сходны с пространственными; поэтому в отношении к обычному реальному пространству их можно назвать «пространственно-подобными». Говоря о многомерном пространстве и о фигурах в нем, мы тем самым придаем понятию пространства новое содержание, так что необходимо ясно различать обобщенное абстрактное понятие пространства в математике, с одной стороны, и понятие пространства в его исходном смысле универсальной формы существования материи, с другой.

Другим примером выхода предмета математики за пределы пространственных форм и количественных отношений в первоначальном смысле этих слов может служить возникновение в конце прошлого века новой дисциплины — математической логики, достигшей теперь широкого развития. Предметом ее рассмотрения является строение математических выводов, иными словами, она изучает, какие предложения можно выводить из данных посылок данными средствами. Она исследует свой предмет так, как это свойственно именно математике, в полном отвлечении от содержания и потому заменяет предложения формулами, а правила умозаключения — правилами оперирования с этими формулами. Отношения между посылками и заключением, аксиомами и теоремами, конечно, не относятся к пространственным формам или в обычном смысле к количественным отношениям, скажем, к отношениям объемов понятий.

В качестве другого примера укажем на теорию групп, которую можно понимать как учение о симметрии в самом общем виде. Однако изменение симметрии кристалла, скажем, при переходе серы из ромбической формы в призматическую, есть коренное качественное изменение состояния вещества. Таким образом, теория групп есть учение о таких величинах или о таких определенностях предметов, изменение которых сопровождается коренным изменением самих предметов.

Итак, расширение предмета математики ведет к существенному расширению самого понятия количественных отношений и пространственных форм. Каковы же в таком случае характерные общие черты этого расширяющегося предмета математики?

Если отвечать на этот вопрос не перечислением, а постараться выяснить то общее и характерное, что есть в предмете математики при всем его разнообразии, то ответ мы находим по существу у Энгельса. Достаточно принять во внимание не только его указание на предмет математики, но также и на способ рассмотрения этого предмета: полное отвлечение форм и отношений от содержания. Этот абстрактный характер математики дает одновременно также определение ее предмета.

Предмет математики составляют те формы и отношения действительности, которые объективно обладают такой степенью безразличия к содержанию, что могут быть от него полностью отвлечены и определены в общем виде с такой ясностью и точностью, с сохранением такого богатства связей, чтобы служить основанием для чисто логического развития теории. Если такие отношения и формы и называть количественными в общем смысле слова, то можно коротко сказать, что математика имеет своим предметом количественные отношения и формы, взятые в их чистом виде.

Абстракция отнюдь не является привилегией математики. Однако другие науки интересуются прежде всего соответствием своих абстрактных схем какому-либо вполне определенному кругу явлений и включают как одну из важнейших задач исследование границ применимости к данному кругу явлений уже сложившейся системы понятий и соответствующей смены применяемой системы абстракций. Математика, напротив, исследуя общие свойства в полном отвлечении от конкретных явлений, рассматривает сами эти системы абстракций в их отвлеченной общности, вне границ их применимости к отдельным конкретным явлениям. Можно сказать, что для математики характерно своего рода абсолютизирование ее абстракций.

Именно указанное объективное безразличие к содержанию исследуемых в математике форм определяет основные особенности математики: ее умозрительный характер, логическую необходимость и кажущуюся непреложность ее выводов, возникновение внутри нее новых понятий и теорий; этим же безразличием к содержанию обусловлены особенности приложений математики. Когда мы смогли перевести практическую задачу на язык математики, мы одновременно смогли отвлечься от второстепенных конкретных особенностей задачи и, пользуясь общими формулами и выводами, получить определенный результат. Отвлеченность математики составляет, таким образом, ее силу, и эта отвлеченность практически необходима.

6. Возвращаясь теперь к суждению Энгельса о математике, мы видим, какая глубина и богатство содержания, какие возможности развития заключаются в этом суждении. Не будучи сам математиком, он дал столь глубокий анализ основ этой науки не только потому, что был гениальным мыслителем, но, что самое главное, потому, что владел диалектическим материализмом и руководствовался им в задаче выяснения сущности математики. Не мудрено поэтому, что никто до Энгельса и не мог дать столь глубокого и верного решения этого вопроса. Самые крупные математики не могли его решить в таком объеме.

Точно так же в дальнейшем Ленин дал такой анализ проблемы физики, который превосходит все, сделанное в этой области.

Это доказывает лишний раз значение и силу диалектического материализма; это доказывает, что для овладения наукой недостаточно знания отдельных положений, недостаточно даже быть творческим работником в этой науке — для этого нужно еще владеть верным общим методом, владеть диалектическим материализмом. Без этого выводы науки либо будут казаться бесформенной грудой, либо представляться в искаженном виде; вместо верного понимания науки получится ложное, метафизическое, идеалистическое представление о ней. Так, например, многие математики, не владеющие диалектическим материализмом, либо вовсе не ориентируются в общих вопросах своей науки, либо трактуют их совершенно неверно [32].

В то время, когда Энгельс писал «Анти-Дюринг», т. е. в 1876—1877 гг., неэвклидова геометрия и геометрия многомерных пространств только что получили признание среди математиков, теория групп только оформилась, теория множеств только что возникала, а математическая логика лишь зарождалась. Поэтому понятно, что особенности нового этапа в развитии математики не могли быть детально отражены Энгельсом; и тем не менее, в его суждениях мы находим указания и для их понимания.

Огл. § 9. Закономерности развития математики

В заключение мы попытаемся в кратких чертах охарактеризовать общие закономерности развития математики.

1. Математика не есть создание какой-либо одной исторической эпохи, какого-либо одного народа; она есть продукт ряда эпох, продукт работы многих поколений. Ее первые понятия и положения возникли, как мы видели, в глубокой древности и уже более двух тысяч лет назад были приведены в стройную систему. Несмотря на все преобразования математики, ее понятия и выводы сохраняются, переходя из одной эпохи к другой, как, например, правила арифметики или теорема Пифагора.

Новые теории включают в себя предшествующие достижения, уточняя, дополняя и обобщая их.

В то же время, как ясно из данного выше краткого очерка истории математики, ее развитие не только не сводится к простому накоплению новых теорем, но включает существенные, качественные изменения. Соответственно, развитие математики разделяется на ряд периодов, переходы между которыми как раз и обозначены такими коренными изменениями в самом предмете или структуре этой науки.

Математика включает в свою сферу все новые области, количественных отношений действительности. В то же время важнейшим предметом математики были и остаются пространственные формы и количественные отношения в простом, наиболее непосредственном смысле этих слов, и математическое осмысление новых связей и отношений неминуемо происходит на основе и в связи с уже сложившейся системой количественных и пространственных научных представлений.

Наконец, накопление результатов внутри самой математики необходимо влечет как восхождение к новым ступеням абстракции, к новым обобщающим понятиям, так и углубление в анализ основ и первоначальных понятий.

Как дуб в своем могучем росте утолщает старые ветви новыми слоями, выбрасывает новые ветви, тянется вверх и углубляется корнями вниз, так и математика в своем развитии накапливает новый материал в уже сложившихся своих областях, образует новые направления, восходит к новым вершинам абстракции и углубляется в своих основах.

2. Математика имеет своим предметом реальные формы и отношения действительности, но, как говорил Энгельс, чтобы изучить эти формы и отношения в чистом

виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное. Однако форм и отношений вне содержания не существует, математические формы и отношения не могут быть абсолютно безразличными к содержанию. Стало быть, математика, по самой своей сущности стремящаяся осуществить такое отделение, стремится осуществить невозможное. Это и есть коренное противоречие в самой сущности математики. Оно является специфическим для математики проявлением общего противоречия познания. Отображение мыслью всякого явления, всякой стороны, всякого момента действительности огрубляет, упрощает его, выхватывая его из общей связи природы. Когда люди, изучая свойства пространства, установили, что оно имеет евклидову геометрию, был совершен исключительно важный акт познания, но в нем же заключалось заблуждение: реальные свойства пространства были взяты упрощенно, схематично, в отвлечении от материи. Но без этого просто не было бы геометрии и именно на почве этого отвлечения (как из внутреннего его исследования, так и из сопоставления математических результатов с новыми данными других наук) зарождались и укреплялись новые геометрические теории.

Постоянное разрешение и восстановление указанного противоречия все более приближающихся к действительности ступенях познания и составляет сущность развития познания. При этом определяющим явится, конечно, положительное содержание познания, элемент абсолютной истины в нем. Познание идет по восходящей линии, а не топчется на месте в простом смешении с заблуждением. Движение познания есть постоянное преодоление его неточности и ограниченности. Указанное основное противоречие влечет за собой другие. Мы видели это на примере противоположностей дискретного и непрерывного. (В природе между ними нет абсолютного разрыва, и их разделение в математике :неизбежно влекло необходимость создания все новых понятий, глубже отображающих действительность и одновременно преодолевающих внутренние несовершенства существующей математической теории). Совершенно так же противоречия конечного и бесконечного, абстрактного и конкретного, формы и содержания и др. выступают в математике как проявления коренного противоречия. Но решающее его проявление состоит в том, что отвлекаясь от конкретного, вращаясь в кругу своих абстрактных понятий, математика тем самым отделяется от эксперимента и практики, вместе с тем она лишь постольку является наукой (т. е. имеет познавательную ценность), поскольку опирается на практику, поскольку оказывается не чистой, а прикладной математикой. Говоря несколько гегелевским языком, чистая математика постоянно «отрицает» себя как чистую математику; без этого она не может иметь научного значения, не может развиваться, не может преодолевать неминуемо возникающие внутри нее трудности.

В своем формальном виде математические теории противостоят реальному содержанию как некоторые схемы для конкретных выводов. Математика выступает при этом как метод формулировки количественных законов естествознания, как аппарат для разработки его теорий, как средство решения задач естествознания и техники. Значение чистой математики на современном этапе заключено прежде всего в математическом методе. И как всякий метод существует и развивается не сам по себе, только на основе своих применений, в связи с содержанием, к которому применяется, так и математика не может существовать и развиваться без применений. Здесь опять обнаруживается единство противоположностей: общий метод противостоит конкретной задаче, как средство ее решения он сам возникает из обобщения конкретного материала и существует, развивается и находит свое оправдание только в решении конкретных задач.

3. Общественная практика играет определяющую роль в развитии математики в трех отношениях. Она ставит перед математикой новые проблемы, стимулирует ее развитие в том или ином направлении и дает критерий истинности ее выводов.

Это чрезвычайно ясно видно на примере возникновения анализа. Во-первых, именно развитие механики и техники выдвинуло проблему изучения зависимостей переменных величин в их общем виде. Архимед, подойдя вплотную к дифференциальному и интегральному исчислению, оставался, однако, в рамках задач статики, тогда как в новое время именно исследование движения породило понятия переменной и функции и понудило к оформлению анализа. Ньютон не мог развить механику, не развивая соответствующего математического метода.

Во-вторых, именно потребности общественного производства побуждали к постановке и решению всех этих проблем. Ни в античном, ни в средневековом обществе этих стимулов еще не было. Наконец, весьма характерно, что математический анализ в своем возникновении находил обоснование своих выводов именно в приложениях. Только поэтому он и мог развиваться без тех строгих определений его основных понятий (переменная, функция, предел), которые были даны позже. Истинность анализа устанавливалась применениями в механике, физике и технике.

Сказанное относится ко всем периодам развития математики. Начиная с XVII в. наиболее непосредственное влияние на ее развитие оказывают вместе с механикой теоретическая физика и проблемы новой техники. Механика сплошной среды, а потом теория поля (теплопроводность, электричество, магнетизм, поле тяготения) направляют развитие теории дифференциальных уравнений в частных производных. Разработка молекулярной теории и вообще статистической физики, начиная с конца прошлого века, служила важным стимулом развития теории вероятностей, особенно теории случайных процессов. Теория относительности сыграла решающую роль в развитии римановой геометрии с ее аналитическими методами и обобщениями.

В настоящее время развитие новых математических теорий, как функциональный анализ и др., стимулируется проблемами квантовой механики и электродинамики, задачами вычислительной техники, статистическими вопросами физики и техники и т. д. и т. п. Физика и техника не только ставят перед математикой новые задачи, наталкивают ее на новые предметы исследования, но также пробуждают развитие нужных для них разделов математики, которые складывались первоначально в большей мере внутри нее самой, как это было с римановой геометрией. Короче, для интенсивного развития науки нужно, чтобы она не только подошла к решению новых задач, но чтобы необходимость их решения навязывалась потребностями развития общества. В математике в последнее время возникает много теорий, но только те из них получают развитие и прочно приходят в науку, которые нашли свои применения в естествознании и технике либо сыграли роль важных обобщений тех теорий, которые имеют такие приложения. Вместе с тем другие теории остаются без движения, как, например, некоторые рафинированные геометрические теории (недезарговы, неархимедовы геометрии), не нашедшие существенных применений.

Истинность математических выводов находит свое последнее основание не в общих определениях и аксиомах, не в формальной строгости доказательств, а в реальных приложениях, т. е. в конечном счете в практике.

В целом, развитие математики нужно понимать прежде всего как результат взаимодействия логики ее предмета, отраженной во внутренней логике самой математики, влияния производства и связей с естествознанием. Это различие идет сложными путями борьбы противоположностей, включая существенные изменения в основном содержании и формах математики. По содержанию развитие математики определяется ее предметом, но побуждается оно в основном и в конечном счете потребностями производства. Такова основная закономерность развития математики.

Конечно, мы не должны забывать при этом, что речь идет лишь об основной закономерности и что связь математики с производством, вообще говоря, является сложной. Из того, что говорилось выше, ясно, что было бы наивным пытаться обосновать появление каждой данной математической теории непосредственным «производственным заказом». Более того, математика, как и всякая наука, обладает относительной самостоятельностью, своей внутренней логикой, отражающей, как мы это подчеркивали, объективную логику, т. е. закономерность ее предмета.

4. Математика всегда испытывала самое существенное влияние не только общественного производства, но и всех общественных условий в целом. Ее блестящий прогресс в эпоху возвышения древней Греции, успехи алгебры в Италии в эпоху Возрождения, развитие анализа в эпоху, последовавшую за английской революцией, успехи математики во Франции в период, примыкающий к Французской революции, — все это убедительно демонстрирует неразрывную связь прогресса математики с общим техническим, культурным, политическим прогрессом общества.

Это также ярко видно на примере развития математики в России. Становление самостоятельной русской математической школы, идущей от Лобачевского, Остроградского и Чебышева, нельзя отделить от прогресса русского общества в целом. Время Лобачевского — это время Пушкина, Глинки, время декабристов, и расцвет математики был одним из элементов общего подъема.

Тем более убедительно влияние общественного развития в период после Великой Октябрьской социалистической революции, когда исследования фундаментального значения появлялись друг за другом с поразительной быстротой во многих направлениях: в теории множеств, топологии, теории чисел, теории вероятностей, теории дифференциальных уравнений, функциональном анализе, алгебре, геометрии.

Наконец, математика всегда испытывала и испытывает на себе заметное влияние идеологии. Как и во всякой науке, объективное содержание математики воспринимается и толкуется математиками и философами в рамках той или иной идеологии.

Короче, объективное содержание науки всегда укладывается в те или иные идеологические формы; единство и борьба этих диалектических противоположностей — объективного содержания и идеологических форм — в математике, как и во всякой науке, играют далеко не последнюю роль в ее развитии.

Борьба материализма, отвечающего объективному содержанию науки, с идеализмом, противоречащим этому содержанию и извращающим его понимание, идет через всю историю математики. Эта борьба ясно обозначена уже в древней Греции, где против материализма Фалеса, Демокрита и других философов, создававших греческую математику, выступал идеализм Пифагора, Сократа и Платона. С развитием рабовладельческого строя верхушка общества отрывалась от участия в производстве, считая его уделом низшего класса, и это порождало отрыв «чистой» науки от практики. Достойной внимания истинного философа признавалась лишь чисто теоретическая геометрия. Характерно, что появившиеся исследования некоторых механических кривых и даже конических сечений Платон считал остающимися за пределами геометрии, так как они «не приводят нас в общение с вечными и бестелесными идеями» и «нуждаются в применении орудий пошлого ремесла».

Яркий пример борьбы материализма против идеализма в математике представляет деятельность Лобачевского, который выдвинул и отстаивал материалистическое понимание математики против идеалистических взглядов кантианства.

Для русской математической школы вообще характер-на материалистическая традиция. Так, Чебышев явно подчеркивал решающее значение практики, а Ляпунов выразил стиль отечественной математической школы в следующих замечательных словах: «Детальная разработка вопросов, особенно важных с точки зрения приложения и в то же время представляющих особенные теоретические трудности, требующие изобретения новых методов и восхождения к принципам науки, затем обобщение полученных выводов и создание этим путем более или менее общей теории». Обобщения и абстракции не сами по себе, а в связи с конкретным материалом, теоремы и теории не сами по себе, а в общей связи науки, ведущей в конечном счете к практике,— вот что оказывается на самом деле важным и перспективным [33].

Таковы же были устремления таких великих ученых, как Гаусс и Риман.

Однако с развитием капитализма в Европе материалистические взгляды, отражавшие передовую идеологию возвышающейся буржуазии эпохи XVI — начала XIX вв., стали сменяться идеалистическими воззрениями. Так, например, Кантор (1846—1918), создавая теорию бесконечных множеств, прямо ссылался на бога, высказываясь в том духе, что бесконечные множества имеют абсолютное существование в божественном разуме. Крупнейший французский математик конца XIX — начала XX в. Пуанкаре выдвинул идеалистическую концепцию «конвенционализма», согласно которой математика есть схема условных соглашений, принимаемых для удобства описания многообразия опыта. Так, по мнению Пуанкаре, аксиомы эвклидовой геометрии суть не более как условные соглашения и значение их определяется удобством и простотой, но не соответствием реальной действительности. Поэтому Пуанкаре говорил, что, например, в физике скорее откажутся от закона прямолинейного распространения света, чем от эвклидовой геометрии. Эта точка зрения была опровергнута развитием теории относительности, которая, вопреки всей «простоте» и «удобству» Эвклидовой геометрии, в полном согласии с материалистическими идеями Лобачевского и Римана, привела к выводу, что реальная геометрия пространства отлична от эвклидовой.

На почве трудностей, возникших в теории множеств, и в связи с необходимостью анализа основных понятий математики, среди математиков начале XX в. появились разные течения. Единство в понимании содержания математики было утрачено; разные математики стали поразному рассматривать не только общие основы науки, что было и раньше, но даже по-разному стали оценивать смысл и значение отдельных конкретных результатов и доказательств. Выводы, казавшиеся осмысленными и содержательными для одних, другие объявляли лишенными смысла и значения. Возникли идеалистические течения «логицизма», «интуиционизма», «формализма» и др.

Логисты утверждают, что вся математика выводима из понятий логики. Интуиционисты видят источник математики в интуиции и придают смысл лишь интуитивно воспринимаемому. Поэтому они, в частности, вовсе отрицают значение канторовской теории бесконечных множеств. Более того, интуиционисты отрицают простой смысл даже таких утверждений, как теорема о том, что всякое алгебраическое уравнение n-й степени имеет n корней. Для них это утверждение пусто, пока не указан способ вычисления корней. Так, полное отрицание объективного смысла математики привело интуиционистов к опорочиванию, как «лишенной смысла», значительной части достижений математики. Наиболее крайние из них дошли до утверждения, что существует столько математик, сколько есть математиков.

Попытку по-своему спасти математику от такого рода нападок предпринял крупнейший математик начала нашего века — Д. Гильберт. Сущность его идей сводилась к тому, чтобы свести математические теории к чисто формальным операциям над символами согласно предписанным правилам. Расчет состоял в том, что при таком совершенно формальном подходе все трудности будут сняты, ибо предметом математики окажутся символы и правила действия с ними без всякого отношения к их смыслу. Это и есть установка формализма в математике. По словам интуициониста Брауэра, для формалиста истина математики на бумаге, тогда как для интуициониста она в голове математика.

Нетрудно, впрочем, видеть, что оба они неправы, ибо математика, а вместе с тем и то, что написано на бумаге, и то, что думает математик, отражает действительность, и истина математики заключается в ее соответствии объективной действительности. Отрывая математику от материальной действительности, все эти течения оказываются идеалистическими .

Идея Гильберта потерпела поражение в результате ее собственного развития. Австрийский математик Гедель доказал, что даже арифметику нельзя формализовать полностью, как на то рассчитывал Гильберт. Вывод Геделя явно вскрыл внутреннюю диалектику математики, которая не позволяет исчерпать ни одну ее область формальным исчислением. Даже простейшая бесконечность натурального ряда чисел оказалась неисчерпываемой конечной схемой символов и правил действия с ними. Так, было математически доказано то, что высказал в общем виде еще Энгельс, когда писал:

«Бесконечность есть противоречие... Уничтожение этого противоречия было бы концом бесконечности» [34]. Гильберт рассчитывал заключить математическую бесконечность в рамки конечных схем и тем самым ликвидировать все противоречия и трудности. Это оказалось невозможным.

Но в условиях капитализма конвенционализм, интуиционизм, формализм и другие подобные течения не только сохраняются, но и дополняются новыми вариантами идеалистических взглядов на математику. Теории, связанные с логическим анализом основ математики, существенно используются в некоторых новых вариантах субъективного идеализма. Субъективный идеализм использует теперь математику, в частности математическую логику, не меньше, чем физику, и потому вопросы понимания основ математики приобретают особую остроту.

Так, трудности развития математики породили в условиях капитализма идеологический кризис этой науки, сходный в своих основах с кризисом физики, сущность которого была выяснена Лениным в его гениальном произведении «Материализм и эмпириокритицизм». Этот кризис вовсе не означает, что математика в капиталистических странах совершенно задержана в своем развитии. Ряд ученых, стоящих на явно идеалистических позициях, делает важные, порой выдающиеся успехи в решении конкретных математических вопросов и развитии новых теорий. Достаточно сослаться на блестящую разработку математической логики.

Коренной порок распространенного в капиталистических странах взгляда на математику состоит в его идеализме и метафизике: в отрыве математики от действительности и пренебрежении ее реальным развитием. Логистика, интуиционизм, формализм и другие подобные направления выделяют в математике какую-нибудь одну ее сторону — связь с логикой, интуитивную ясность, формальную строгость и т. п., — неосновательно преувеличивают, абсолютизируют ее значение, отрывают ее от действительности и за глубоким анализом этой одной черты математики самой по себе теряют из виду математику в целом. Именно вследствие этой односторонности ни одно из этих течений при всей тонкости и глубине отдельных выводов не может привести к верному пониманию математики. В противоположность различным течениям и оттенкам идеализма и метафизики диалектический материализм рассматривает математику, как и всю науку в целом, такой, как она есть, во всем богатстве и сложности ее связей развития. И именно потому, что диалектический материализм стремится понять все богатство и всю сложность связей науки с действительностью, всю сложность ее развития, идущего от простого обобщения опыта к высшим абстракциям и от них к практике, именно потому, что самый свой подход к науке он постоянно приводит в соответствие с ее объективным содержанием, с ее новыми открытиями, именно поэтому и, в конечном счете только поэтому, он и оказывается единственной подлинно научной философией, ведущей к верному пониманию науки вообще и, в частности,— математики.

[1] Здесь мы только указываем этот пример, не вдаваясь в объяснения, которые читатель найдет в главе XVII (том 3).

[2] В самом деле, всякая совокупность предметов, будь то стадо овец или поленница дров, существует и непосредственно воспринимается во всей своей конкретности н сложности. Выделение в ней отдельных свойств и отношений есть результат известного анализа. Примитивное мышление еще не делает такого анализа, а берет объект только в целом. Подобно этому, например, человек, не занимавшийся музыкой, воспринимает музыкальное произведение, не выделяя в нем деталей мелодии, тональности и т. п., в то время как музыкант легко анализирует даже сложную симфонию.

[3] В образовании понятий о свойствах предметов, будь то цвет или численность совокупности, можно различить три ступени, которые, впрочем, нельзя слишком строго разграничивать. На первой ступени свойство определяется прямым сравнением предметов: такой же, как ворон; столько же, сколько на руке. На второй ступени появляется прилагательное: черный камень, аналогично — числительное: пять деревьев и т. п. На третьей ступени свойство отвлекается от предметов и может фигурировать «как таковое», как «чернота», как отвлеченное число «пять» и т. п.

[4] Слово «арифметика» происходит от греческого «искусство счета» («арифмос» — число и «техне» — искусство).

[5] Это понятно также из самых общих соображений. Любая абстракция, отделенная от конкретного основания,— как число отвлекается от конкретных совокуп-

ностей предметов,— «сама по себе» не имеет смысла, она живет только в связях с другими понятиями. Эти связи содержатся уже в любом высказывании, в самом неполном определении. Вне их она лишается содержания и значения, т. е. просто не существует. Содержание понятия отвлеченного числа лежит в законах, в связях системы чисел.

[6] Стоит заметить, что понятие о числах, которое вырабатывалось, как мы видели, с таким трудом в течение очень долгого времени, усваивается теперь ребенком сравнительно легко. Почему? Во-первых, конечно, потому, что ребенок слышит и видит, как взрослые постоянно пользуются числами, и они даже учат его этому. А во-вторых, потому,— и именно на это мы хотим обратить внимание,— что ребенок имеет готовые слова и обозначения для чисел. Он сначала выучивает эти внешние образы числа, а потом уже овладевает его смыслом.

[7] Первая индийская рукопись, где находят нуль, относится к концу IX в.; в ней есть запись числа 270 точно в наших обозначениях. Однако нуль, вероятно, был введен в Индии еще раньше — в VI в.

[8] Напоминаем, что простыми называются отличные от единицы положительные целые числа, которые делятся без остатка только на самоё себя и на единицу.

[9] Речь идет о границах земельных участков. Заметим, кстати, что геометрия и означает в переводе землемерие (по-древнегречески «ге»—земля, «метрео»— мерю).

[10] В форму мы включаем также и размеры.

[11] См. главу XX (том 3).

[12] Создание этой теории приписывается греческому

ученому Эвдоксу, жившему в IV в. до н. э.

[13] Вследствие того, что учение об измерении величин не подчинялось арифметике, а входило в геометрию, геометрия у греков поглощала математику. Такие вопросы, как, например, решение квадратных уравнений, которые мы теперь трактуем алгебраически, они ставили и решали геометрически. «Начала» Эвклида содержат немало таких вопросов и, по-видимому, представляли для современников сводку основ не одной геометрии в нашем смысле, но математики вообще. Это господство геометрии продолжалось до того, как Декарт, напротив, подчинил ее алгебре. Следы этого господства сохранились, например, в виде названий «квадрат» и «куб» для второй и третьей степени: «а куб» — это куб со стороной а.

[14] Речь идет не об описательном определении, а об определении, которое служит непосредственной основой для доказательств при изучении свойств действительных чисел. Естественно, что такие определения возникли в более позднюю эпоху, когда развитие математики, и главным образом анализа бесконечно малых, потребовало соответствующего определения действительного числа «переменной х». Это определение в разных формах было дано в 70-х годах прошлого века немецкими математиками Вейерштрассом, Дедекиндом и Кантором.

[15] Дроби с девяткой в периоде при этом не рассматриваются, они отождествляются соответствующей дробью без девяток в периоде по известному правилу, ясному из примера: 0,139999... =0,14000...

[16] В.И. Ленин. Философские тетради. Госполитиздат, 1947, стр. 329.

[17] Птолемей широко известен как автор системы, по которой центром мира считалась Земля и движение светил описывалось, как происходящее вокруг Земли. Эта система была опровергнута Коперником.

[18] Он дает «уравнения» конических сечений, отнесенных к вершине. Например, «уравнение» параболы y2 = 2px он формулирует так: квадрат со стороной y равновелик прямоугольнику со сторонами 2p и x. (Конечно, вместо обозначений p, x, y, у него фигурировали соответствующие отрезки).

[19] Для ориентировки во времени укажем периоды жизни некоторых выдающихся чатематиков Востока. Индийцы: Ариабхата — род. ок. 476 г.; Брамагупта — ок. 598—660 гг.; Бхаскара — XII в.; хорезмийцы: Аль-Хорезми — IX в.; Аль-Бируни — 973—1048 гг.; работавший в Азербайджане Насирэддин Туей — 1201—1274 гг.; работавший в Самарканде Гиясэддин Джемшид — XV в.

[20] Нужно иметь в виду, что связывать развитие математики того времени главным образом с арабами неверно. Термин «арабская» математика обусловлен преимущественно тем, что очень многие ученые Востока писали на арабском языке, распространявшемся вместе с арабскими завоеваниями.

[21] Стоит заметить еще, что математический термин «алгорифм», означающий метод, правила вычисления, происходит от имени того же Аль-Хорезми.

[22] Интересно отметить, что Непер определял логарифм не так, как теперь, когда говорят, что в формуле x = ay число y есть логарифм x при основании a. Такое определение логарифмов появилось позже. Определение Непера было связано с понятиями переменной величины и

бесконечно малых и сводилось к тому, что логарифм x есть такая функция $y = f(x)$, скорость роста которой обратно пропорциональна x, т. е. $y' = c/x$ (см. главу II). Таким образом, по существу исходным было дифференциальное уравнение, определяющее логарифм, хотя не были изобретены еще дифференциалы.

[23] Эта формула носит имя Ньютона не потому, что он впервые открыл ее, а потому, что он обобщил ее с целых положительных степеней и на любые дробные и иррациональные.

[24] То есть функции, например, такого вида y= a0xп +a1 xп+1 + . . . + an. Основная задача алгебры того периода — решение уравнения a0xп +a1 xп+1 + . . . + an = 0 — означает не что иное, как поиски тех значений x, при которых функция a0xп +a1 xп+1 + . . . + an обращается в нуль. Самое существование решения — корня уравнения, т.е. основная теорема алгебры, доказывается средствами анализа (см. главу IV, § 3).

[25] Ф. Энгельс. Анти-Дюринг. Госполитиздат, 1953, стр. 34.

[26] Эту двоякую роль аксиом упускают иногда из вида даже в сочинениях методического характера, придавая тем самым аксиоматическому построению несвойственное ему значение абсолютного обоснования теории.

[27] Ф. Энгельс. Анти-Дюринг, стр. 36—37.

[28] См. Ф. Энгельс. Анти-Дюринг, стр. 10—11.

[29] В. И. Ленин. Философские тетради, стр. 156. там же, стр. 330.

[30] Там же, стр. 330.

[31] В.И. Ленин. Философские тетради, стр. 146—147.

[32] Любопытно, например, отметить, что два известных американских геометра Веблен и Уайтхед в своей книге «Основания дифференциальной геометрии» пытаются подойти к определению того, что такое геометрия, и приходят к выводу, что такого определения дать нельзя, кроме разве следующего: «геометрия есть то, что называют геометрией специалисты».

[33] Вообще понимание необходимых связей отдельных областей математики друг другом, с естествознанием и практикой имеет чрезвычайно большое значение не только для верного взгляда на саму математику, но и для ориентировки ученых в выборе направлений и предметов исследования.

[34] Ф. Энгельс. Анти-Дюринг, стр. 49.