1998, janvier-février *vol. 53, n°1 (319)*

SUCCÈS DE LA SCIENCE MATHÉMATIQUE

LA VIE DES MATHÉMATIQUES

SUR LA DÉFINITION DES MATHÉMATIQUES[1]

Par Vladimir Arnold

Les mathématiques font partie de la physique. La physique est une science expérimentale qui étudie le monde qui nous entoure. Elle fait partie des sciences de la nature. Les mathématiques sont la partie de la physique où les expériences ne coûtent pas cher.

L'identité de Jacobi (selon laquelle les hauteurs d'un triangle se coupent en un même point) est un fait expérimental comparable au fait que la Terre est ronde (c'est-à-dire homéomorphe à une boule). Mais vous pouvez le découvrir à moindres frais.

Au milieu du XX[e] siècle, on a tenté de séparer les mathématiques de la physique. Les conséquences ont été désastreuses. Des générations entières de mathématiciens ont

1. Contribution de l'auteur à la discussion sur l'enseignement des mathématiques qui s'est tenue au Palais de la Découverte à Paris le 7 mars 1997. Le texte d'origine a été développé et publié en russe dans le journal russe « Succès de la science mathématique ». C'est la source de la présente traduction par André Cabannes qui a aussi traduit le livre d'Alexandrov, Kolmogorov, et Lavrentiev, Mathématiques: leur contenu, leurs méthodes, leur signification, Éditions du Bec de l'Aigle, 2020, qui présente les mathématiques avec l'approche russe.

grandi la moitié de leur science ne leur étant pas familière, et, naturellement, n'ayant aucune idée des autres sciences. Ils commencèrent à enseigner leurs pseudo-mathématiques scolastiques et laides d'abord aux étudiants, puis aux écoliers (oubliant l'avertissement de Hardy qu'il n'y avait pas de place sous le soleil pour les mathématiques laides).

Coupées de la physique, et comparables à la scolastique, les mathématiques n'étaient plus adaptées ni à l'enseignement ni aux applications dans d'autres sciences. Il en résulta une haine généralisée envers les mathématiciens, aussi bien de la part des infortunés élèves (dont certains devinrent ministres) que des utilisateurs.

L'édifice très laid, bâti par des mathématiciens à moitié éduqués, souffrant d'un complexe d'infériorité, à qui la physique n'est pas familière, ressemble à une harmonieuse théorie axiomatique des nombres impairs. Il est clair qu'une telle théorie peut être construite et qu'on peut inviter les étudiants à admirer la perfection et la cohérence interne de la structure qui émerge (dans laquelle, par exemple, la somme d'un nombre impair de termes et le produit de n'importe quel nombre de termes sont définis). Les nombres pairs, dans ce point de vue sectaire, peuvent soit être déclarés une hérésie, soit être finalement introduits dans la théorie, en la complétant (cédant aux besoins de la physique et du monde réel) avec des objets « idéaux ».

Malheureusement, c'est cette construction laide et perverse des mathématiques qui a dominé leur enseignement pendant des décennies. Née en France, cette perversion s'est rapidement répandue dans l'enseignement des mathématiques élémentaires, d'abord aux étudiants, puis aux élèves de tous niveaux (d'abord en France, puis dans les autres pays, y compris la Russie).

Un écolier français en primaire, à la question « combien font $2+3$? », répondit : « $3+2$ puisque l'addition est commutative. » Il ne savait pas combien ça faisait, et ne comprenait même pas quelle réponse on attendait de lui !

Un autre écolier français (à mon sens tout à fait raisonnable) définit les mathématiques ainsi : « Soit un carré, mais encore faut-il le démontrer. »

Dans mon expérience de l'enseignement en France, la compréhension des mathématiques par les élèves (y compris ceux étudiant à l'École normale supérieure – je suis triste pour la plupart de ces jeunes gens manifestement intelligents, mais dont l'instruction a été défigurée) est aussi lamentable que celle des deux écoliers.

Par exemple, ces élèves n'ont jamais vu un paraboloïde, et, quand on leur demande à quoi ressemble la surface dont l'équation est $xy = z^2$, même les étudiants en mathématiques à l'ENS sont frappés de stupeur. Dessiner dans le plan une courbe définie par des formules paramétriques (comme $x = t^3 - 3t$, $y = t^4 - 2t^2$) est un problème au-dessus de leurs moyens (et sans doute au-dessus de ceux de la plupart des professeurs de mathématiques en France).

Depuis le premier manuel d'analyse de L'Hôpital (*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*), à peu près jusqu'au livre de Goursat, savoir résoudre de tels problèmes était considéré (en même temps que connaître ses tables de multiplication) comme faisant partie du bagage de base de tout mathématicien.

Pour ne pas encourir les foudres divines, les zélotes des « mathématiques abstraites » nettoyèrent l'enseignement de toute trace de géométrie (par laquelle en mathématiques on fait la plupart du temps le lien avec la réalité physique). Les manuels d'analyse de Goursat, Hermite, Picard ont été récemment retirés des bibliothèques universitaires pour être jetés à la poubelle par les facultés Paris 6 et 7 (Jussieu), au motif qu'ils étaient obsolètes et par conséquent dangereux. (C'est seulement grâce à mon intervention qu'ils ont été sauvés.)

Des étudiants à l'ENS qui suivaient des cours de géométrie différentielle et algébrique (dispensés par d'éminents mathématiciens) s'avérèrent ne connaître ni la surface de Riemann de la courbe elliptique $y^2 = x^3 + ax + b$, ni plus généralement la classification topologique des surfaces (sans parler des intégrales elliptiques de première espèce ou des propriétés de groupe d'une courbe elliptique, c'est-à-dire du théorème d'addition d'Euler-Abel). On ne leur avait enseigné que les structures de Hodge et les variétés de Jacobi !

Comment une telle situation a-t-elle pu s'installer dans un pays comme la France qui a donné au monde Lagrange et Laplace, Cauchy et Poincaré, Leray et Thom ? Il me semble qu'une explication raisonnable a été fournie par I. G. Petrovski, qui m'a dit en 1966 : les vrais mathématiciens sont des solitaires qui ne se regroupent pas en bande, mais les bandes sont nécessaires aux plus faibles pour survivre. Les bandes peuvent être formées selon divers critères (ça peut être l'abstraction à outrance, l'antisémitisme, « les problèmes industriels appliqués ») ; mais l'essence d'une bande est toujours la même chose : la solution d'un problème social, la survie dans un environnement plus instruit que soi.

Rappelons, à ce sujet, l'avertissement de L. Pasteur : il n'existe pas et n'existera jamais de « sciences appliquées » ; il n'y a que les *applications des sciences* (très utiles !).

À l'époque, la remarque de Petrovski m'avait semblé sujette à caution, mais aujourd'hui je suis de plus en plus convaincu de sa pertinence. Une part significative de la construction de super abstractions se ramène au pillage à grande échelle sans vergogne des travaux de découvreurs et à leur attribution systématique à des épigones qui les ont généralisés. De même que l'Amérique ne porte pas le nom de Colomb, les résultats mathématiques ne portent presque jamais le nom de leurs découvreurs.

Afin d'éviter tout malentendu, je dois reconnaître que pour une certaine raison mes propres travaux n'ont jamais subi une telle attribution à d'autres, bien que cela soit fréquemment arrivé à mes maîtres (Kolmogorov, Petrovski, Pontryagin, Rokhline) et à mes étudiants. Le professeur Berry a un jour formulé deux principes :

> *Principe d'Arnold* : Si un concept porte le nom d'une personne, alors ce n'est pas le nom de son découvreur.
>
> *Principe de Berry* : Le principe d'Arnold s'applique à lui-même.

Mais revenons à l'enseignement des mathématiques en France.

Quand j'étais étudiant en première année de faculté de mathématiques à l'Université de Moscou, le topologiste spécialiste de théorie des ensembles L. A. Toumarkine était chargé du cours d'analyse, et il répétait consciencieusement un cours d'analyse classique à la française, du genre de Goursat. Il nous informa que les intégrales de fonctions rationnelles le long d'une courbe algébrique pouvaient être exprimées explicitement si la surface de Riemann correspondante était une sphère, mais, en règle générale, ne le pouvaient pas quand le genre était d'ordre supérieur, et que dans le cas de la sphéricité il suffisait qu'il y ait un nombre assez élevé de points doubles sur la courbe de degré donné (ce qui la forçait à être d'un seul tenant : ses points réels pouvaient être dessinés dans le plan projectif d'un seul trait sans lever le crayon).

Ces faits captivent tellement l'imagination (même énoncés sans démonstration) qu'ils offrent une compréhension bien plus profonde et exacte des mathématiques modernes que des volumes entiers du traité de Bourbaki. De fait, nous apprenons ici l'existence d'un lien remarquable entre des choses à première vue très éloignées : d'une part le lien entre l'existence d'une expression explicite des intégrales et la topologie de la surface de Riemann correspondante, et d'autre part entre le nombre de points doubles et le genre de la surface de Riemann correspondante, qui en outre se traduit par l'unicursalité de la courbe dans le domaine réel.

Jacobi avait déjà noté avec ravissement qu'en mathématiques une seule et même fonction gouverne à la fois la représentation des nombres entiers en somme de quatre carrés et le vrai mouvement du pendule.

Ces découvertes de liens entre objets mathématiques dissemblables peuvent être comparées à la découverte du lien entre électricité et magnétisme en physique, ou de la ressemblance entre la côte est de l'Amérique du Sud et la côte ouest de l'Afrique en géologie.

La satisfaction émotionnelle que provoquent de telles découvertes dans l'enseignement ne peut pas être surestimée. C'est par elles que nous sommes poussés à chercher et trouver la merveilleuse unité qui existe en toutes choses.

La dé-géométrisation de l'enseignement des mathématiques et leur divorce avec la physique détruisent ces relations. Par exemple, non seulement les étudiants, mais aussi les géomètres-algébristes modernes ignorent, pour la plupart d'entre eux, le fait suivant signalé par Jacobi : une intégrale elliptique de première espèce exprime un temps de parcours le long d'une phase dans le système dynamique hamiltonien correspondant.

Pour paraphraser une célèbre remarque sur l'électron et l'atome, on peut dire que l'hypocycloïde est aussi parfaite que l'est l'idéal pour un anneau de polynômes. Mais enseigner les idéaux à des étudiants qui n'ont jamais vu d'hypocycloïde est aussi absurde qu'enseigner l'addition des fractions à des enfants qui n'auraient jamais coupé (même mentalement) une pomme ou une tarte en parts égales. On ne doit pas être surpris, alors, que les enfants veuillent additionner le numérateur au numérateur et le dénominateur au dénominateur.

Mes amis français me disent que la tendance à la généralisation et l'abstraction est un trait de caractère national. Je n'exclus pas qu'il y ait en effet une maladie héréditaire à l'œuvre, mais je voudrais souligner que j'ai emprunté l'exemple de la pomme et de la tarte à Poincaré.

Le schéma de construction d'une théorie mathématique est exactement le même que pour n'importe quelle autre science de la nature. Nous commençons par considérer certains objets et observons leur comportement dans des cas particuliers. Puis nous essayons de trouver les limites d'applicabilité de nos observations, cherchant des contre-exemples qui nous protégeront contre une généralisation hâtive des observations à une classe trop vaste de phénomènes (exemple : le nombre de partitions des nombres impairs consécutifs 1, 3, 5, 7, 9 en un nombre impair d'entiers forment la séquence 1, 2, 4, 8, 16, mais le nombre suivant est 29).

Nous formulons ensuite aussi clairement que possible la découverte empirique que nous avons faite (par exemple l'hypothèse de Fermat, ou la conjecture de Poincaré). Puis vient une période fastidieuse de vérification de la fiabilité de nos trouvailles.

Arrivés ici, en mathématiques, on a développé une technique particulière, qui, appliquée au monde réel, est parfois utile, parfois illusoire. Cette technique est la modélisation et la simulation. Quand on construit un modèle, on procède à l'idéalisation suivante : certains faits, connus seulement avec une certaine probabilité et une certaine précision, sont considérés comme « absolument » certains et sont adoptés en tant qu'« axiomes ». Le sens de ce caractère « absolu » est précisément que nous nous autorisons à travailler avec ces « faits » en leur appliquant les règles de la logique formelle, et prononçons comme « théorème » toute conséquence qu'on peut en déduire.

Il est clair qu'il est impossible d'avoir une confiance totale en de telles déductions quand on travaille avec le monde réel. Une des raisons est que les paramètres des phénomènes étudiés ne nous sont jamais connus avec une exactitude parfaite, et qu'une petite variation dans les paramètres (par exemple les conditions initiales du processus) peut changer du tout au tout le résultat. C'est pourquoi, par exemple, les prévisions météorologiques dynamiques à long terme sont et resteront à jamais impossibles, quelles que soient la puissance de nos ordinateurs et la précision avec laquelle nos capteurs enregistrent les conditions initiales.

Exactement de même, un petit changement dans les axiomes (dont nous ne pouvons jamais être totalement sûrs) peut, en général, conduire à des conclusions différentes de celles énoncées par les théorèmes déduits des axiomes initialement retenus. Plus la chaîne de raisonnements (la « preuve ») est longue et sophistiquée, moins les résultats finaux sont fiables.

Les modèles complexes sont rarement utiles (sauf pour les étudiants écrivant une thèse).

La technique mathématique de la modélisation consiste à ignorer ce problème et à étudier les conséquences que l'on peut déduire du modèle comme s'il coïncidait avec la réalité.

Le fait que cette façon de procéder – manifestement erronée du point de vue des sciences de la nature – conduise souvent à des résultats utiles en physique est appelé « la déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature » [2] (ou « principe de Wigner »).

Ici on peut ajouter le commentaire par I. M. Gelfand : il y a un autre phénomène comparable à l'incompréhensibilité de l'efficacité des mathématiques en physique soulignée par Wigner, c'est l'inefficacité tout aussi incompréhensible des mathématiques en biologie.

« Le subtil poison de l'éducation mathématique » (pour reprendre les mots de F. Klein) pour un physicien consiste précisément en ce que le modèle pris comme un absolu est détaché de la réalité et cesse de lui être comparable. Voici l'exemple le plus simple qui soit : les mathématiques nous enseignent que la solution de l'équation de Malthus $\frac{dx}{dt} = x$ est déterminée de manière unique par les conditions initiales (c'est-à-dire que dans le plan $(t,\ x)$ les lignes intégrales de l'équation différentielle ne se coupent pas). Cette déduction à partir du modèle mathématique n'a pas grand-chose à voir avec la réalité. Une expérience avec un ordinateur montre que toutes les lignes intégrales ont en pratique des intersections communes sur le semi-axe des t négatifs. En effet, les courbes, mettons avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x(0) = 1$, se confondent presque pour $t = -10$, et à $t = -100$ un atome ne peut pas être glissé entre elles. Les propriétés de l'espace à une échelle aussi petite ne sont pas du tout décrites par la géométrie euclidienne. Faire référence au théorème d'unicité, dans ces conditions, est clairement une utilisation abusive de la précision du modèle. Dans les applications pratiques du modèle, on doit garder cela à l'esprit, si on ne veut pas rencontrer de sérieuses difficultés.

Notons que le même théorème d'unicité explique pourquoi l'étape finale d'accostage d'un navire à un quai est toujours effectuée manuellement : durant la manœuvre, si la vitesse

2. Voir `https://lapasserelle.com/documents/wigner.pdf`

d'accostage était fixée comme une fonction lisse (linéaire) de la distance au quai, cela prendrait un temps infini pour s'amarrer. Une alternative est de taper légèrement dans le quai (convenablement amorti par des bouées plus ou moins élastiques). D'ailleurs le problème s'est posé très concrètement lorsqu'il a fallu mettre au point l'atterrissage des premiers engins spatiaux sur la Lune et sur Mars ; et il se pose aussi pour l'amarrage des navettes aux stations spatiales – ici le théorème d'unicité travaille contre nous.

Malheureusement, aucun exemple de cette sorte ni aucune discussion des dangers d'un emploi fétichiste des théorèmes ne se trouvent dans les manuels modernes de mathématiques, y compris les meilleurs. J'ai même l'impression que les mathématiciens scolastiques (ceux qui ne sont pas familiers avec la physique) croient en une différence fondamentale entre les mathématiques axiomatiques et la modélisation ordinaire dans les sciences de la nature (qui demande toujours que l'on contrôle a posteriori nos conclusions avec des expériences).

Indépendamment de la nature relative des axiomes sélectionnés, il ne faut pas oublier l'inévitabilité d'erreurs logiques dans un long raisonnement (par exemple sous la forme d'un bug dans un ordinateur causé par un rayon cosmique ou une fluctuation quantique). N'importe quel mathématicien en activité sait que si on ne contrôle pas soi-même ses résultats (le mieux étant en les vérifiant avec des exemples), après seulement une dizaine de pages la moitié des signes dans les formules seront de travers, et les deux du dénominateur se seront infiltrés au numérateur.

La technique pour faire face à de telles erreurs est la même que dans toutes les sciences de la nature : exercer un contrôle externe avec des expériences et des observations. Cela devrait être enseigné aux écoliers dès l'école primaire.

Les tentatives pour créer des mathématiques « pures », fondées sur la méthode axiomatico-déductive, conduisirent à abandonner la procédure ordinaire en physique (observation – modèle – affinement du modèle – conclusions – vérification avec des expériences) et à la remplacer par le schéma : définition – théorème – démonstration. Il est impossible de comprendre une définition qui est donnée sans motivation, mais cela n'empêche pas les algébristes-axiomatiseurs de poursuivre leurs noirs desseins. Par exemple, ils seraient tout à fait disposés à définir la multiplication par l'algorithme avec lequel on fait les grosses multiplications de nombres entiers en les posant par écrit. Dans ce cas, la commutativité de la multiplication devient un théorème difficile à démontrer – qui est néanmoins une conséquence logique des axiomes. On peut ensuite imposer l'apprentissage de ce théorème et de sa démonstration aux infortunés élèves (afin d'accroître l'autorité à la fois de la science et de ses enseignants). Il est clair que ni cette définition ni cette démonstration, que ce soit dans un but pédagogique ou pour les applications, ne peut causer autre chose que des dommages.

La commutativité de la multiplication peut être comprise en comptant des soldats défilant en formation rectangulaire en lignes et en colonnes, ou en comparant la surface d'un rectangle posé horizontalement à celle du même rectangle posé verticalement. Chercher à se passer en mathématiques de ce lien avec la physique et la réalité n'est que sectarisme et isolationnisme. Cela détruit l'image des mathématiques en tant qu'activité humaine utile aux yeux des personnes sensées.

Je vais révéler quelques autres secrets (dans l'intérêt des pauvres étudiants).

Le *déterminant* d'une matrice est le volume (orienté) du parallélépipède, droit ou incliné, dont les arêtes sont les vecteurs-colonne de la matrice. Si on révèle aux étudiants ce secret (qui est soigneusement caché dans les enseignements émasculés de l'algèbre), alors toute la théorie des déterminants devient un chapitre aisément abordable de la théorie des formes linéaires. Si on définit les déterminants différemment, toute personne sensée développera une aversion pour les déterminants, les jacobiens, et le théorème des fonctions implicites pour le restant de ses jours.

Qu'est-ce qu'un *groupe* ? Les algébristes nous enseignent que c'est un ensemble G muni de deux opérations qui satisfont une collection d'axiomes qui vous sortiront vite de l'esprit. Cette définition déclenche une protestation naturelle : pourquoi une personne raisonnable aurait-elle besoin de cette paire d'opérations ? « Au diable les mathématiques ! » – conclut l'étudiant (qui deviendra peut-être ministre de la Recherche scientifique).

La situation devient complètement différente si nous commençons non pas avec le groupe G, mais avec le concept de transformation au sein d'un ensemble quelconque E (une application bijective de l'ensemble E vers lui-même), comme c'est historiquement l'origine des groupes. Un ensemble de transformations au sein d'un ensemble E quelconque est appelé un groupe, qu'on nommera par exemple G, si pour toute paire de transformations appartenant à G le résultat quand on les applique l'une après l'autre est encore une transformation qui fait partie de G, et si pour une transformation quelconque de G, son inverse en fait aussi partie.

Toute la définition – ce qu'on appelle les « axiomes » – consiste simplement en les propriétés (évidentes) des groupes de transformations. Ce que les axiomatiseurs appellent les « groupes abstraits » sont simplement les groupes de transformations de différents ensembles, considérés à un isomorphisme près (une correspondance bijective qui préserve les opérations). Il n'existe pas d'« autres groupes abstraits » dans la nature, comme l'a montré Cayley. Pourquoi les algébristes continuent-ils à torturer les étudiants avec une définition abstraite ?

Dans les années 60, soit dit en passant, j'ai enseigné à Moscou la théorie des groupes à des *collégiens*. Évitant les axiomes et restant aussi près que possible de la physique, en six mois j'ai atteint le théorème d'Abel sur l'impossibilité de résoudre dans le cas général l'équation du cinquième degré par radicaux (couvrant en chemin, avec les élèves, les nombres complexes, les surfaces de Riemann, les groupes fondamentaux et les groupes de monodromie des fonctions algébriques). Ce cours fut plus tard publié par un des élèves qui avaient suivi le cours, Valery Borissovitch Alekseev, sous la forme d'un livre intitulé *Le théorème d'Abel par les problèmes* (disponible à `https://math.ru/lib/270`).

Qu'est-ce qu'une *variété lisse* ? J'ai lu, dans un livre américain récent, que Poincaré lui-même n'était pas familier avec ce genre d'objet (qu'il avait pourtant introduit en mathématiques) et que la définition « moderne » avait été donnée vers la fin des années 20 par Oswald Veblen : une variété est un espace topologique satisfaisant une kyrielle d'axiomes.

Pour l'expiation de quels péchés, les étudiants sont-ils contraints d'accomplir un tel parcours du combattant ? En fait, l'*Analysis Situs* de Poincaré offre une définition très explicite de ce qu'il entend par variété lisse, qui est bien plus lumineuse et utile qu'une définition « abstraite ».

Une variété lisse de dimension k de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, tel que dans le voisinage de chacun de ses points la variété est un mapping lisse (i.e. différentiable) de $\mathbb{R}^k$ vers $\mathbb{R}^{n-k}$. C'est une généralisation directe des courbes lisses ordinaires dans le plan (par exemple le cercle $x^2 + y^2 = 1$), ou des courbes et surfaces lisses dans l'espace à trois dimensions.

On définit ensuite de façon naturelle un mapping lisse entre deux variétés lisses. Un difféomorphisme est un mapping lisse tel que son inverse l'est aussi.

Une variété lisse « abstraite » est une variété lisse d'un espace euclidien, considérée à un difféomorphisme près. Il n'existe pas dans la nature d'autres variétés lisses de dimension finie « plus abstraites » que celles-là (théorème de Whitney). Pourquoi continue-t-on à martyriser les étudiants avec des définitions abstraites ? Ne serait-il pas préférable de leur démontrer le théorème sur la classification explicite des variétés fermées de dimension deux (surfaces) ?

C'est ce théorème remarquable (énonçant, par exemple, que n'importe quelle surface compacte orientée connexe est – à une déformation continue près – semblable à la surface d'une sphère dotée d'un certain nombre de poignées comme l'anse d'une tasse) qui donne une idée correcte de ce que sont les mathématiques contemporaines, et non les généralisations super-abstraites des variétés naïves de l'espace euclidien, qui en réalité n'ajoutent rien, mais sont présentées par les axiomatiseurs comme de nouveaux résultats.

Le théorème de classification des surfaces est une authentique réussite mathématique, comparable à la découverte de l'Amérique ou à celle des rayons X. C'est la vraie découverte de la nature mathématique de la réalité ; et il est même difficile de dire si ce fait appartient lui-même aux mathématiques ou à la physique. Du point de vue de son importance pour les applications, et pour se faire une idée correcte de la structure de la réalité, il est très supérieur aux « réussites » des mathématiques comme la résolution du problème de Fermat ou la démonstration qu'au-delà d'un certain nombre tous les nombres impairs sont la somme de trois nombres premiers.

Pour faire de la réclame, les mathématiciens actuels font parfois passer de telles réussites pour les résultats les plus extraordinaires de leur discipline. Il est clair que non seulement cela ne contribue pas à créer une haute opinion des mathématiques dans le grand public, mais qu'au contraire cela engendre des doutes salutaires sur la nécessité de consacrer des efforts (comme l'alpinisme) à des questions aussi exotiques, dont on ne sait ni à qui ni pourquoi cela peut servir.

Le théorème de classification des surfaces devrait faire partie du programme de mathématiques du lycée (probablement sans démonstration), mais pour une certaine raison il n'est même pas inclus dans les cours à l'université (desquels en France, du reste, toute géométrie a été éliminée ces dernières décennies).

Il est urgent, particulièrement en France, que l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux abandonne son babillage scolastique et retourne à l'exposition des résultats les plus importants de cette science de la nature. Cela a été une surprise pour moi de constater que les étudiants français ne connaissaient pratiquement pas les plus grands livres de mathématiques ni les plus importants sur le plan méthodologique (il semble qu'ils n'aient pas tous été traduits en français) comme : *Nombres et figures* par Rademacher et Toeplitz, *Géométrie et imagination* par Hilbert et Cohn-Vossen, *Qu'est-ce que les mathématiques ?* par Courant et Robbins, *Comment le résoudre ?* et *Mathématiques et raisonnement plausible* par Polya, *Leçons sur le développement des mathématiques au XIX^e^ siècle* par Félix Klein.

Je me souviens encore de la forte impression que fit sur moi quand j'étais étudiant le cours d'analyse d'Hermite (qui, soit dit en passant, existait dans une traduction en russe !).

Il contenait, pour la première fois, semble-t-il, ou à peu près, une présentation des surfaces de Riemann. Toute l'analyse était bien sûr en nombres complexes, comme il se doit. Les intégrales asymptotiques étaient étudiées à l'aide de la déformation de chemins sur les surfaces de Riemann quand les points de branchement sont déplacés – ce qu'on appellerait de nos jours la théorie de Picard-Lefschetz. Picard était d'ailleurs le gendre d'Hermite. Les talents mathématiques passent souvent de beau-père à gendre : la dynastie J. Hadamard – P. Lévy – L. Schwartz – U. Frisch est un autre exemple célèbre à l'Académie des sciences de Paris.

Le cours « obsolète » d'Hermite qui a plus d'un siècle (et dont les bibliothèques universitaires françaises se sont probablement toutes débarrassées) était bien plus moderne que les fastidieux manuels d'analyse avec lesquels on torture les étudiants aujourd'hui.

Si les mathématiciens ne retrouvent pas leurs esprits, alors les utilisateurs qui auront toujours besoin d'une théorie moderne – dans le meilleur sens du terme – des mathématiques, et qui sont immunisés, comme toute personne raisonnable, contre le babillage axiomatique stérile, vont refuser les services des scolastiques à moitié éduqués qui peuplent à l'heure actuelle les universités et les écoles. Un enseignant de mathématiques qui n'a pas maîtrisé au moins une partie du cours de physique en dix volumes de Landau & Lifchitz deviendra un fossile comme l'est aujourd'hui quelqu'un qui ne connaît pas la différence entre un ouvert et un fermé.

Vladimir I. Arnold