

Exercice II.22.6 : Voici un exemple d'exercice où on a l'impression qu'on va pouvoir le résoudre simplement en appliquant plusieurs fois Thalès et Pythagore, mais ce n'est pas le cas !

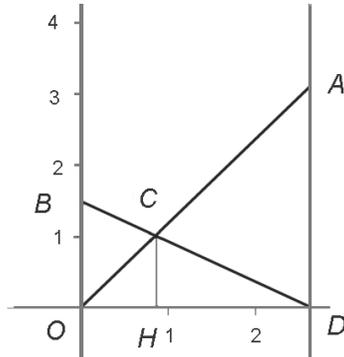


Figure II.22.11 : Deux échelles de respectivement 3 m et 4 m sont posées en travers d'un couloir. Sachant qu'elles se croisent à un mètre du sol, on veut calculer la largeur du couloir.

Les données sont :

$$OA = 4 \text{ m}$$

$$BD = 3 \text{ m}$$

$$CH = 1 \text{ m}$$

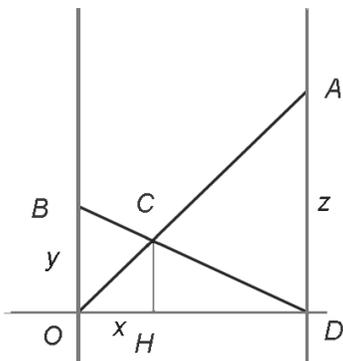
Montrer que $OD = 2,603\dots \text{ m}$.

Aide : En écrivant les différentes relations géométriques qu'on a, on arrive à une équation du 4^e degré pour OH , et on la résout numériquement comme on l'a déjà fait de nombreuses fois.

Solution : Introduisons quelques quantités pour l'instant inconnues.

- $x = OH$
- $y = OB$
- $z = DA$
- $t = OD$

$$\begin{aligned} OA &= 4 \\ BD &= 3 \\ CH &= 1 \\ OD &= t \end{aligned}$$



Dans le triangle ODA , appliquons Thalès. Cela nous donne

$$\frac{1}{x} = \frac{z}{t}$$

ou encore

$$t = xz \quad (1)$$

Et par Pythagore on a aussi

$$t^2 + z^2 = 16 \quad (2)$$

De même, dans le triangle ODB , par Thalès on a

$$\frac{1}{t-x} = \frac{y}{t}$$

ou encore

$$t(y-1) = xy \quad (3)$$

Et par Pythagore on a aussi

$$t^2 + y^2 = 9 \quad (4)$$

Maintenant on va faire de l'algèbre (= « tourner la manivelle ») pour parvenir à une équation qui soit une contrainte sur une seule variable.

On va utiliser les équations (1) à (4) – qui synthétisent tout ce qu'on sait – pour faire des éliminations et parvenir à une équation à une inconnue.

Observer qu'on a quatre équations pour quatre inconnues, donc la situation se présente a priori bien.

D'abord on peut éliminer t et parvenir à

$$\begin{cases} x^2 z^2 + z^2 = 16 \\ z(y - 1) = y \\ x^2 z^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Puis on peut éliminer x en soustrayant la troisième équation à la première. On calculera x après. On obtient

$$\begin{cases} z^2 - y^2 = 7 \\ z(y - 1) = y \end{cases}$$

Enfin on obtient une équation à une inconnue en y

$$\frac{y^2}{(y - 1)^2} - y^2 = 7$$

Cela donne

$$y^4 - 2y^3 + 7y^2 - 14y + 7 = 0$$

C'est une équation polynomiale à une inconnue du 4e degré. Même si Ludovico Ferrari (1522, 1565) a montré comment les résoudre avec des formules algébriques exactes, nous n'allons pas faire comme lui. Nous allons chercher la valeur de y par approximation. On sait que y est quelque part entre 1 et 2. Alors essayons différentes valeurs.

On commence à chercher entre 1 et 2 avec un pas de 0,1 :

pas	0.1
y	valeur du polynôme
1.0	-1.0000
1.1	-1.1279
1.2	-1.1024
1.3	-0.9079
1.4	-0.5264
1.5	0.0625
1.6	0.8816
1.7	1.9561
1.8	3.3136
1.9	4.9841
2.0	7.0000

On voit que y est entre 1,4 et 1,5. Essayons entre ces deux valeurs avec un pas de 0,01 :

pas	0.01
y	valeur du polynôme
1.40	-0.5264
1.41	-0.4772
1.42	-0.4259
1.43	-0.3725
1.44	-0.3170
1.45	-0.2592
1.46	-0.1994
1.47	-0.1373
1.48	-0.0729
1.49	-0.0064
1.50	0.0625

La valeur inconnue y est entre 1,49 et 1,50. En continuant un peu on arrive à

$$y \approx 1,490935$$

On en déduit toutes les autres inconnues.

D'abord

$$z = \frac{y}{y-1} \approx 3,036930$$

Puis

$$x = \sqrt{\frac{16-z^2}{z^2}} \approx 0,857207$$

Et

$$t = xz \approx 2,603279$$

Épilogue : on a bien utilisé seulement Thalès et Pythagore. Mais cela ne nous a pas conduit seulement à des équations trinômes du second degré avec lesquelles on est familier. Cela nous a conduit à une équation du 4e degré à une variable (en l'occurrence y , mais on aurait pu en construire avec une autre variable).

On a utilisé notre méthode favorite pour résoudre une équation quelconque, même quand elle est difficile voire impossible par l'algèbre : on a essayé une collection de valeurs, pour trouver approximativement sa racine qui nous conduirait à la solution de notre problème.

Une fois qu'on a eu y , il était immédiat de trouver les autres inconnues.

Noter que notre polynôme du 4e degré en y a une autre racine réelle vers 0,73301, mais on sait que ça ne peut pas être la valeur de y que l'on recherche.

C'est l'occasion de rappeler l'un des grands messages de tous nos livres de maths : l'essence des mathématiques n'est pas la résolution d'équations à l'aide de calculs impressionnants. Ça c'est seulement une technique parmi d'autres à une étape de la résolution de notre problème.

On a même dit que les mathématiques ne sont que le domaine plus ou moins abstrait dans lequel on arrive quand on a mathématisé notre problème de la vie réelle.

Le travail du scientifique est d'abord de bien comprendre et formuler son problème réel afin de pouvoir le mathématiser. Cette mathématisation est, selon nous, l'étape la plus importante du scientifique qui utilise les mathématiques. Ensuite c'est de l'intendance :-)

L'école se focalise trop sur les *techniques* mathématiques et pas assez sur la *mathématisation* des problèmes de la vie réelle (pour ceux qui se prêtent à une mathématisation).

Il y a un siècle, du temps du certificat d'étude où il y avait des trains qui se croisaient et des citernes qui se remplissaient, les problèmes posés aux écoliers étaient plus proches de problèmes réels. L'écolier devait les mathématiser pour les résoudre. C'était plus significatif et instructif que de demander : donner les quatre racines du polynôme

$$y^4 - 2y^3 + 7y^2 - 14y + 7 = 0$$

ou, montrer qu'il a deux racines réelles, et encore un trinôme sans racine réelle (on appelle un tel trinôme, un trinôme irréductible).

Catalogue des
ÉDITIONS DU BEC DE L'AIGLE



www.amazon.fr/dp/2957239159
Cours de mathématiques du collège.

Volume 1 : 6e et 5e.

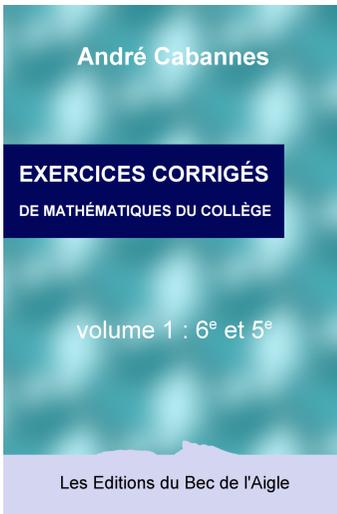
à l'intention des collégiens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2957239167
Cours de mathématiques du collège.

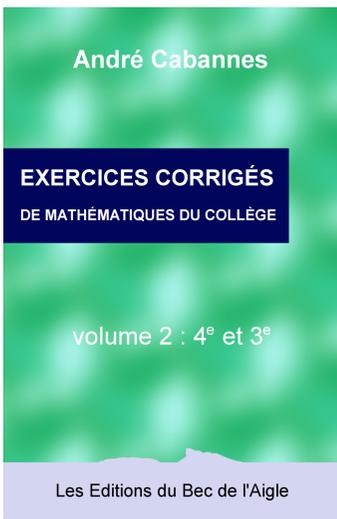
Volume 2 : 4e et 3e.

à l'intention des collégiens et de leurs parents



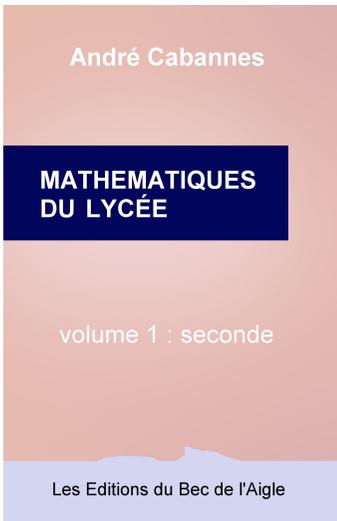
www.amazon.fr/dp/2958738566
Maths du collège volume 1

Le livre de CORRIGÉS
des exercices



www.amazon.fr/dp/2958738574
Maths du collège volume 2

Le livre de CORRIGÉS
des exercices

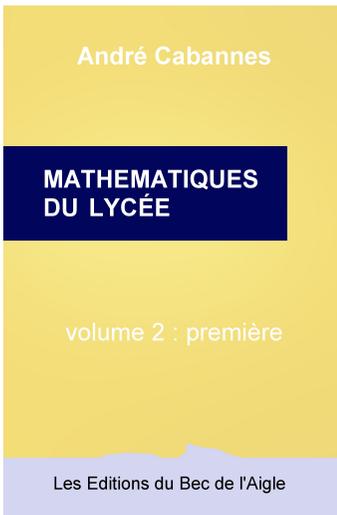


www.amazon.fr/dp/2957239183
Cours de mathématiques de se-
conde

à l'intention des lycéens et de
leurs parents

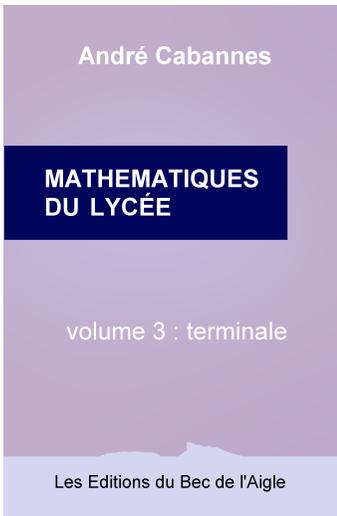
CORRIGÉS

www.amazon.fr/dp/2958738582



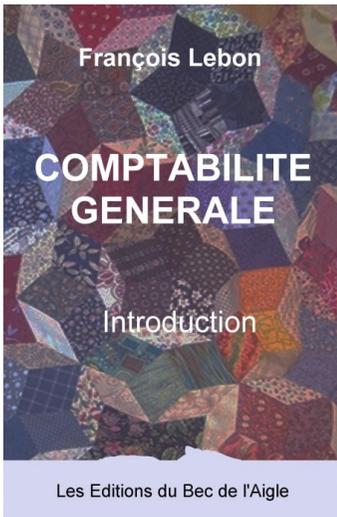
www.amazon.fr/dp/2957239191
Cours de mathématiques de pre-
mière

à l'intention des lycéens et de
leurs parents

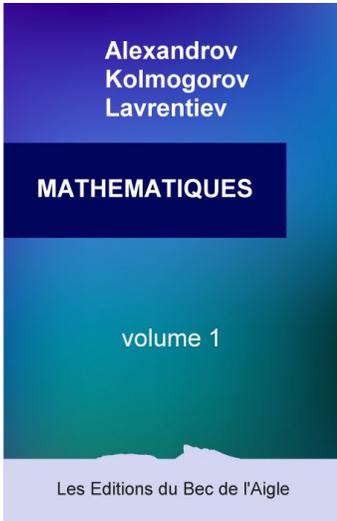


www.amazon.fr/dp/2958738507
Cours de mathématiques de terminale

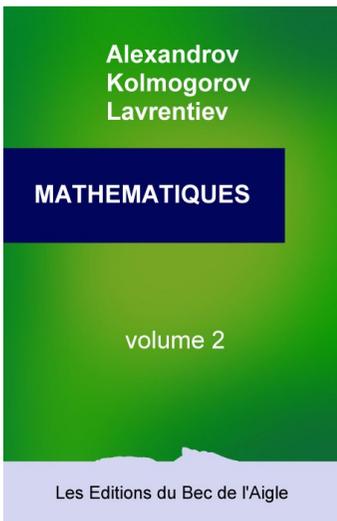
à l'intention des lycéens et de leurs parents



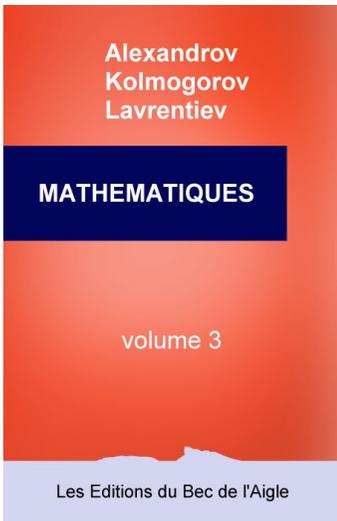
www.amazon.fr/dp/2957239140
Cours de comptabilité (niveau baccalauréat)



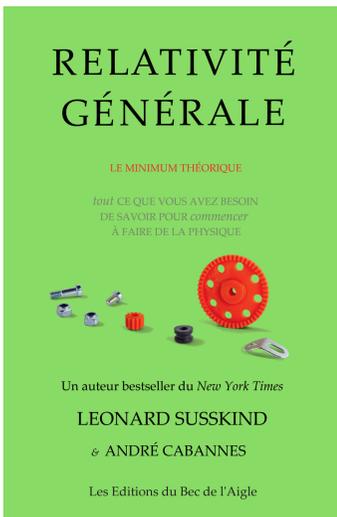
www.amazon.fr/dp/2957239124
Introduction aux mathématiques
(niveau baccalauréat)



www.amazon.fr/dp/2957239116
Les mathématiques pour l'utilisateur
(niveau première année
d'université)

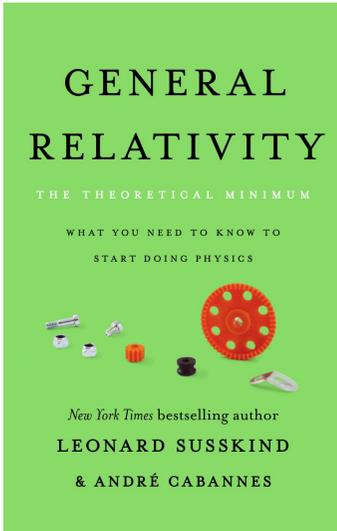


www.amazon.fr/dp/2957239132
Les mathématiques pour l'étudiant spécialisé et le chercheur (niveau licence)



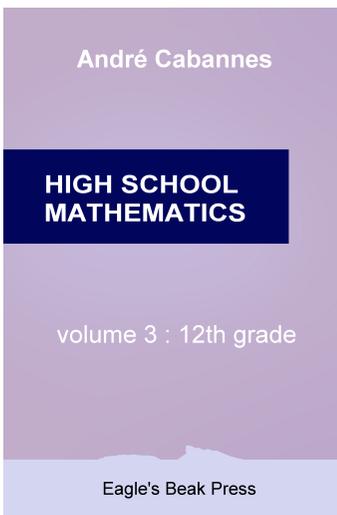
www.amazon.fr/dp/2957239175
Cours de physique (niveau maîtrise)

English titles by André Cabannes



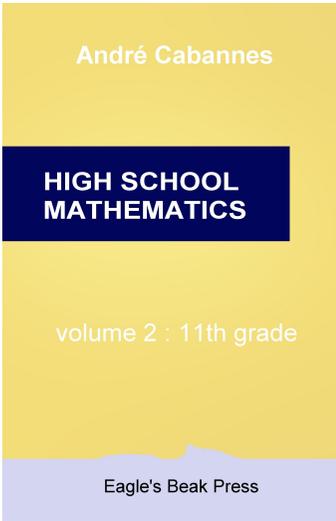
www.amazon.com/dp/B09ZB613QY
General Relativity

Graduate studies.



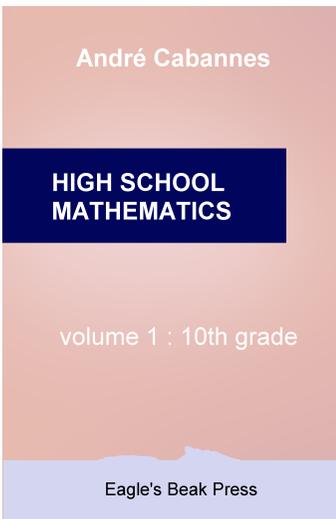
www.amazon.com/dp/2958738515
High school mathematics

Volume 3 : 12th grade



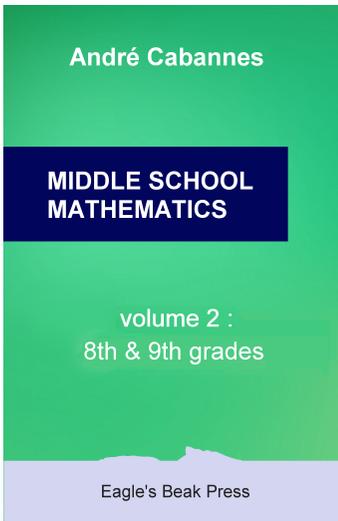
www.amazon.com/dp/2958738523
High school mathematics

Volume 2 : 11th grade



www.amazon.com/dp/2958738531
High school mathematics

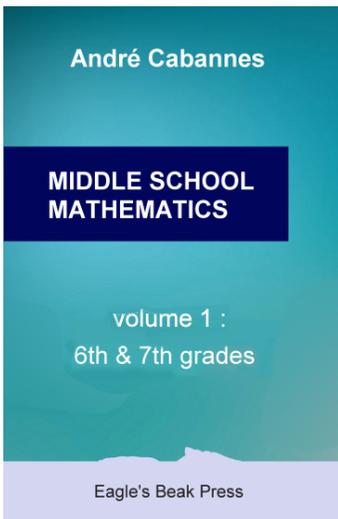
Volume 1 : 10th grade



www.amazon.com/dp/295873854X
Middle school mathematics

Volume 2 : 8th & 9th grades

for middle school students and
their parents



www.amazon.com/dp/2958738558
Middle school mathematics

Volume 1 : 6th & 7th grades

for middle school students and
their parents