

Chapitre IX

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

par Mstislav V. Keldych

Contenu :

- IX.1 Nombres complexes et fonctions d'une variable complexe
 - IX.2 Lien entre les fonctions d'une variable complexe et les problèmes de la physique mathématique
 - IX.3 Lien entre les fonctions d'une variable complexe et la géométrie
 - IX.4 Intégrales curvilignes. Formule de Cauchy et ses conséquences
 - IX.5 Propriété d'unicité et prolongement analytique
 - IX.6 Conclusion
- Suggestions de lecture

IX.1 Nombres complexes et fonctions d'une variable complexe

Les nombres complexes et leur signification pour l'algèbre. Les nombres complexes ont été introduits en mathématiques dans le cadre de la résolution des équations algébriques. L'impossibilité de résoudre l'équation algébrique

$$x^2 + 1 = 0 \tag{IX.1}$$

dans le champ des nombres réels conduisit à l'introduction d'un nouveau nombre « conventionnel », l'unité imaginaire i , défini par l'égalité

$$i^2 = -1 \tag{IX.2}$$

Les nombres de la forme $a + bi$, où a et b sont des nombres réels, reçurent le nom de *nombres complexes*¹. Les mathématiciens commencèrent à opérer avec ces nombres comme avec les nombres réels, les additionnant et les multipliant comme des binômes. Si nous utilisons l'égalité (IX.2), les quatre opérations de base de l'arithmétique sur les nombres complexes (addition, soustraction, multiplication, division) conduisent toujours à d'autres nombres complexes. Autrement dit, elles ne nécessitent pas l'introduction encore d'autres nouveaux nombres.

Les nombres complexes sont connus de la lectrice et du lecteur depuis le lycée, et nous n'allons pas exposer en détail toute leur théorie élémentaire. Nous l'avons fait de manière succincte dans le volume 1, chapitre IV, section IV.3.

La division des nombres complexes en particulier, définie comme l'inverse de la multiplication, s'avère être toujours une opération sans ambiguïté, sauf si le diviseur est zéro auquel cas elle est impossible. Par exemple, dans la division

$$\frac{a + bi}{c + di}$$

1. L'auteur résume en trois phrases une histoire de trois siècles. Sans rentrer dans les détails, rappelons que des manipulations algébriques par les mathématiciens italiens du XVI^e siècle sur l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ pour tenter de trouver ses racines, les conduisirent à l'expression formelle

$$\sqrt[3]{2 + 11 \times \sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11 \times \sqrt{-1}} = 4$$

où apparaissait le nombre impossible $\sqrt{-1}$. Comme pour les nombres négatifs, aux XII^e et XIII^e siècles, les mathématiciens procédèrent de manière prudente et pragmatique avant d'accepter, progressivement, ce nouveau nombre et de se familiariser avec les règles et propriétés des nombres de la forme $a + bi$. Voir volume 1, chapitre I sur l'histoire du développement des mathématiques, et chapitre IV sur les équations algébriques.

on peut, si on applique les règles ordinaires de l'arithmétique, multiplier en haut et en bas par $c - di$, conduisant ainsi clairement encore à un nombre de la forme $e + fi$.

Ainsi, au premier abord, l'introduction des nombres complexes révéla une structure intéressante quoique formelle (voulant dire par là, n'ayant pas le caractère concret des nombres réels²) : à côté des nombres réels, il y a d'autres nombres, appelés complexes, avec lesquels les opérations arithmétiques habituelles sont encore possibles.

L'étape suivante fut la représentation géométrique des nombres complexes. Chaque nombre complexe peut être représenté, de manière bijective, par un point dans le plan Oxy . Le nombre complexe $a + bi$ est représenté par le point de coordonnées (a, b) . On peut aussi lui associer le vecteur allant de l'origine au point (a, b) . Cette représentation géométrique – proposée indépendamment au tournant du XIX^e siècle par plusieurs mathématiciens, dont le Danois Caspar Wessel (1745-1818) et le Genevois Jean-Robert Argand (1768-1822) – engendra une nouvelle façon de voir les nombres complexes. Ce sont tout simplement les paires (a, b) de nombres réels, sur lesquelles sont définies certaines opérations d'addition et de multiplication, obéissant à des règles analogues étendant naturellement celles sur les nombres réels.

En même temps, on observa le fait suivant : la somme de deux nombres complexes

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

s'interprète géométriquement comme la diagonale du parallélogramme construit sur les deux vecteurs (a, b) et (c, d) (figure IX.1).

2. On a vu dans le chapitre I (volume 1) que les auteurs attachent la plus grande importance au caractère concret, issu de l'observation de la réalité, de *tous les concepts mathématiques*. Les nombres complexes à cet égard demandent un effort. Dans une approche philosophique plus idéaliste – que les auteurs combattent vigoureusement – la solution n'est pas tant d'insister sur le caractère en définitive concret des nombres complexes, que sur celui en réalité abstrait des nombres 1, 2, 3, ... et d'une manière plus générale de toute idée et représentation.

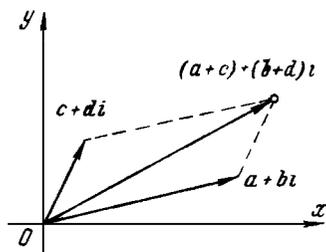


Figure IX.1 : La somme de deux nombres complexes correspond à la somme des deux vecteurs qui les représentent.

Autrement dit, les nombres complexes s'additionnent de la même façon que les vecteurs qu'on rencontre en mécanique et en physique : forces, vitesses, accélérations. Cela fit passer les nombres complexes du statut d'« objets formels », plutôt mystérieux tant qu'on voulait y voir des nombres analogues aux nombres entiers ou réels pour compter ou mesurer, à celui de nouveau type d'outils – ayant des caractéristiques très similaires à celles des vecteurs à deux dimensions, mais ayant encore des aspects numériques³ – pouvant servir pour représenter des quantités physiques très concrètes.

Nous allons voir plus loin comment ce nouveau point de vue a conduit à des réussites spectaculaires dans différents problèmes de physique mathématique.

Cependant, l'introduction des nombres complexes apporta d'abord une meilleure compréhension des lois de l'algèbre et de l'analyse. L'ensemble des nombres réels, bien que clos pour les quatre opérations arithmétiques, ne l'est pas pour l'algèbre. Même une équation aussi simple que l'équation (IX.1)

3. En fait, ils dynamitèrent la notion naïve de nombre, et pavèrent la voie à la compréhension que les mathématiques utilisent avant tout des structures d'objets définies essentiellement par leurs règles de fonctionnement. Il faudra attendre Évariste Galois (1811-1832) et son étude des groupes de permutation pour que cette vision prenne corps. Le caractère « concret » ou « abstrait » des structures n'a plus d'importance. Ce qui est important c'est leur utilité éventuelle, en particulier pour représenter des phénomènes. Ainsi les nombres complexes ont été les précurseurs de la vision moderne des mathématiques (cf. vol. 3, chap. XX, sect. XX.11).

n'a pas de racine dans l'ensemble des nombres réels. Un fait remarquable est le théorème fondamental de l'algèbre qui énonce que n'importe quelle équation

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

à coefficients complexes a n racines complexes (voir vol. 1, chapitre IV, section IV.3).

Ce théorème montre que les nombres complexes forment un système de nombres, dans un certain sens, complet par rapport aux opérations algébriques. Il n'était pas du tout évident a priori qu'en ajoutant aux nombres réels *un seul nouveau nombre*, la racine i de l'équation (IX.1), et en créant les nombres de la forme $a + bi$, cela conduise à un ensemble complet pour toutes les équations algébriques. Le théorème fondamental de l'algèbre a montré que la théorie des polynômes, ou si l'on préfère des fonctions polynomiales, même seulement à coefficients réels, ne peut être complète que si on laisse la variable indépendante parcourir le plan complexe – la variable dépendante le parcourant alors aussi. Les développements ultérieurs de la théorie des polynômes algébriques ont encore renforcé ce point de vue. Les propriétés des polynômes apparaissent au grand jour seulement quand on les considère comme des fonctions d'une variable complexe.

Séries entières et fonctions d'une variable complexe. Le développement de l'analyse a montré que l'introduction des nombres complexes était essentielle non seulement dans la théorie des polynômes, mais aussi dans une autre classe très importante de fonctions – celles représentables sous forme de série entière

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots \quad (\text{IX.3})$$

Comme il a été dit au chapitre II (volume 1), le développement de l'analyse infinitésimale a nécessité de clarifier le concept de fonction et les différentes façons de les définir en mathématiques. Sans nous arrêter ici sur ces questions fort intéressantes, rappelons seulement qu'au début de l'analyse

les fonctions les plus fréquemment rencontrées étaient des développements en série entière autour de chaque point de leur domaine de définition. Par exemple, c'est une propriété qu'ont toutes celles qu'on appelle les *fonctions élémentaires*.

La plupart des problèmes concrets en analyse conduisent à des fonctions que l'on exprime en série entière. D'un autre côté, il y avait le souhait de toujours relier la définition d'une « fonction mathématique » à une « formule mathématique ». À cet égard, les séries entières semblaient l'outil de choix, d'une manière générale, pour représenter une fonction à l'aide d'une formule. Cela conduisit même à de sérieuses tentatives pour limiter l'analyse infinitésimale à l'étude des fonctions qu'on peut développer en série entière. Celles-ci portent le nom de *fonctions analytiques*. Le développement ultérieur de la science a toutefois montré qu'une telle limitation était trop contraignante. Les problèmes de physique mathématique commencèrent à demander l'emploi de fonctions qui n'étaient plus seulement, par exemple, des fonctions analytiques par morceaux avec éventuellement des coudes ou des sauts. Cependant, la classe des fonctions analytiques, à cause de ses propriétés remarquables et de ses applications très vastes, est devenue la classe de fonctions la plus importante étudiée en mathématiques.

Le paragraphe précédent parlait des fonctions d'une variable indépendante réelle, et à valeur réelle.

Étant donné que le calcul de chaque terme d'une série entière ne demande que des opérations arithmétiques, la valeur de la fonction représentée en série entière peut être calculée pour des valeurs complexes de l'argument, pourvu que l'on soit à l'intérieur de son rayon de convergence. Quand on étend ainsi une fonction à variable réelle aussi aux valeurs complexes de l'argument, on parle de son « prolongement » complexe. Une fonction analytique, de même qu'un polynôme, peut ainsi être considérée non seulement pour les valeurs réelles, mais aussi pour les valeurs complexes de la variable indépendante. En outre il est naturel de considérer alors des séries entières à coefficients complexes. Les proprié-

tés des fonctions analytiques, comme celles des polynômes, sont révélées au grand jour seulement quand on travaille dans le domaine complexe, c'est-à-dire dans le corps \mathbb{C} des nombres complexes, et non plus seulement dans le corps \mathbb{R} des nombres réels. Pour l'illustrer, prenons un exemple.

Considérons les deux fonctions à variable réelle

$$e^x \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x^2}$$

Ces deux fonctions sont finies, continues, et différentiables jusqu'à n'importe quel ordre sur tout l'axe Ox des réels. On peut les développer en série de Taylor, par exemple, autour de l'origine $x = 0$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (\text{IX.4})$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad (\text{IX.5})$$

La première converge pour toutes les valeurs de x , tandis que la seconde converge seulement pour $-1 < x < +1$. L'examen de la fonction, du côté gauche de l'expression (IX.5), pour les valeurs réelles de x ne révèle pas les raisons de la divergence de sa série de Taylor pour $|x| \geq 1$. Le passage dans le domaine complexe va nous permettre de comprendre ce qui se passe. Considérons la série, du côté droit de l'expression (IX.5), pour les valeurs complexes de l'argument

$$1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots \quad (\text{IX.6})$$

La somme des n premiers termes de cette série

$$s_n = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots + (-1)^{n-1} z^{2n-2}$$

se calcule comme pour les valeurs réelles. Par exemple, on la multiplie par z^2 et on lui rajoute cette valeur, ce qui fait disparaître tous les termes intermédiaires comme des dominos

$$s_n + z^2 s_n = 1 - (-1)^n z^{2n}$$

On en déduit la formule pour la somme partielle :

$$s_n = \frac{1 - (-1)^n z^{2n}}{1 + z^2}$$

Cette expression montre que pour $|z| < 1$ (on parle maintenant de module)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 + z^2}$$

puisque $|z|^{2n} \rightarrow 0$. Ainsi, pour les complexes z , satisfaisant l'inégalité $|z| < 1$, la série (IX.6) converge et a pour somme $\frac{1}{1+z^2}$. Pour $|z| \geq 1$ la série (IX.6) diverge, puisque dans ce cas la différence $s_n - s_{n-1} = (-1)^{n-1} z^{2n-2}$ ne tend pas vers zéro.

Quand $|z| < 1$, le point z est à une distance de l'origine inférieure à l'unité. Ainsi, les points pour lesquels la série (IX.6) converge dans le plan complexe forment un disque ouvert, c'est-à-dire sans sa circonférence, centré à l'origine. Sur la circonférence du disque, c'est-à-dire les complexes de module un, se trouvent les deux points i et $-i$ où la fonction a une valeur infinie⁴.

On voit ainsi que c'est l'examen du comportement de la fonction $\frac{1}{1+z^2}$ dans le plan complexe qui nous a permis de comprendre ce qui se passait : la présence des deux points i et $-i$ (en dehors de l'axe des réels où il n'y a pas de problème) explique pourquoi le domaine de convergence de la série (IX.6) est borné.

Noter que dans l'expression (IX.5), *du côté de la fonction* $\frac{1}{1+z^2}$, il n'y a de problème nulle part sauf en i et $-i$. Du côté de la série, elle ne converge que sur le disque unité ouvert. En dehors elle ne converge jamais. Autrement dit, quand on est en dehors du disque ouvert, la série (IX.6) ne peut pas servir à représenter la fonction. Mais la fonction elle-même est parfaitement définie, sauf en i et $-i$.

4. Plus précisément, quand nous aurons étoffé notre compréhension des fonctions d'une variable complexe, nous verrons que le module de la fonction $\frac{1}{1+z^2}$ tend vers plus l'infini quand l'argument se rapproche d'un de ces deux points. En ces deux points mêmes, elle n'est tout simplement pas définie.

Domaine de convergence des séries entières. Considérons la série entière suivante

$$a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots + a_n(z - a)^n + \dots \quad (\text{IX.7})$$

où les a_i sont une suite quelconque donnée de coefficients complexes, et a est un nombre complexe donné. Alors, dans le plan complexe, il existe un disque c centré en a (éventuellement réduit au seul point a) dans lequel la série converge.

Démontrons cette proposition, qui porte le nom de *théorème d'Abel*, du nom du mathématicien norvégien Niels Henrik Abel (1802-1829).

Observons tout d'abord que la série dont les termes sont les nombres complexes w_n , c'est-à-dire

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots \quad (\text{IX.8})$$

peut être vue comme deux séries composées respectivement des parties réelles et imaginaires des nombres $w_n = u_n + iv_n$,

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (\text{IX.9})$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (\text{IX.10})$$

La somme partielle s_n de la série (IX.8) s'exprime à l'aide des sommes partielles σ_n et τ_n des deux séries (IX.9) et (IX.10)

$$s_n = \sigma_n + \tau_n$$

Après ces remarques, le lemme suivant devient évident.

Si les termes de la série (IX.8) sont plus petits en valeur absolue, terme à terme, que ceux de la série géométrique convergente

$$A + Aq + \dots + Aq^n + \dots$$

où A et q sont des nombres positifs – on parle donc dans leur cas de nombres réels – et $q < 1$, alors la série (IX.8) converge. (Pour les nombres complexes, on continue à parler parfois de « valeur absolue » comme on le faisait pour les nombres réels, mais on veut naturellement dire « module » ; c'est-à-dire la longueur du vecteur associé.)

En effet, si $|w_n| < Aq^n$, alors

$$|u_n| \leq |w_n| < Aq^n \quad (1)$$

$$|v_n| \leq |w_n| < Aq^n$$

donc (voir vol 1, chapitre II, section II.14) les séries (IX.9) et (IX.10) convergent, et par conséquent la série (IX.8) aussi.

Montrons maintenant que si la série entière (IX.7) converge quand la variable z prend une certaine valeur z_0 , alors elle converge sur tout un disque c centré en a , sur la circonférence duquel se trouve z_0 (figure IX.2).

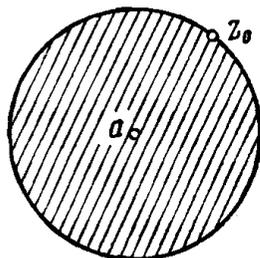


Figure IX.2 : Étude de la convergence sur le disque.

On déduit aisément de ce fait que la région de convergence de la série (IX.7) est soit tout le plan complexe, soit le seul point $z = a$, soit un certain disque de rayon fini autour de a .

Supposons, donc, que la série (IX.7)

$$a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots + a_n(z - a)^n + \dots$$

converge quand $z = z_0$. Chaque terme de la série, dans ce cas, tend vers zéro quand $n \rightarrow \infty$. Cela signifie tous les termes sont dans un certain disque autour de zéro. Dénotons par A le rayon de ce disque. Alors on a pour tout n

$$|a_n(z_0 - a)^n| < A \quad (IX.11)$$

Prenons maintenant un point quelconque z , plus près de a que ne l'est z_0 , et montrons que la série converge nécessairement aussi en ce point z .

Il est clair que

$$|z - a| < |z_0 - a|$$

donc en dénotant par q le ratio des deux distances, on a

$$q = \frac{|z - a|}{|z_0 - a|} < 1 \quad (\text{IX.12})$$

Regardons le terme général de la série (IX.7) au point z pour essayer de lui trouver une borne supérieure commode

$$|a_n(z - a)^n| = |a_n(z - a)^n \left(\frac{z - a}{z_0 - a} \right)^n| = |a_n(z - a)^n| q^n$$

En vertu de l'inégalité (IX.11), on arrive à

$$|a_n(z - a)^n| < Aq^n$$

c'est-à-dire que le terme général de rang n de la série (IX.7), calculé au point z , est plus petit, en module, que le terme de rang n d'une série géométrique convergente. Sur la base du lemme qu'on vient de démontrer, on en conclut que la série (IX.7) converge au point z .

Le disque dans lequel la série entière converge et en dehors duquel elle diverge est appelé le *disque de convergence*; le rayon de ce disque est appelé le *rayon de convergence* de la série entière. Il s'avère que le cercle, qui est la frontière du disque de convergence, passe toujours par les points les plus proches de a dans le plan complexe où la fonction cesse d'avoir un comportement normal.

La série (IX.4) converge quelle que soit la valeur prise par la variable sur l'ensemble du plan complexe; la série (IX.5), comme on l'a vu, a un rayon de convergence égal à l'unité.

Séries exponentielle et trigonométriques d'une variable complexe. Les séries entières peuvent servir à « prolonger » les fonctions d'une variable réelle dans le domaine complexe. Par exemple, pour les valeurs complexes de z nous *définissons* la fonction e^z par la série entière

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (\text{IX.13})$$

On introduit de même les fonctions trigonométriques d'une variable complexe

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \quad (\text{IX.14})$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad (\text{IX.15})$$

Ces séries convergent sur tout le plan complexe.

Il est intéressant de noter le lien, qui devient visible quand on passe dans le plan complexe, entre les fonctions exponentielle et trigonométriques.

Dans la série (IX.13), si l'on remplace z par iz , on obtient

$$e^{iz} = 1 + i\frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

En regroupant les termes sans le facteur i et ceux avec le facteur i , on obtient

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (\text{IX.16})$$

De même

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \quad (\text{IX.16}')$$

Les formules (IX.16) et (IX.16') portent le nom de *formules d'Euler*. Dans l'autre sens, en résolvant (IX.16) et (IX.16') pour $\cos z$ et $\sin z$, on obtient

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \end{aligned} \quad (\text{IX.17})$$

Il est particulièrement important que pour les valeurs complexes de l'argument (et donc aussi pour ses valeurs réelles), la règle très simple d'addition des exposants que l'on connaît bien pour les nombres entiers, reste vraie

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad (\text{IX.18})$$

Étant donné que pour les valeurs complexes de l'argument nous avons *défini* la fonction e^z par la série (IX.13) – et on se rappelle quand on écrit $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$ qu'on veut dire que $f(z)$ est la *limite* des sommes partielles –, la formule (IX.18) demande à être démontrée à partir de sa définition. Faisons-le. Nous partons donc de l'identité ci-dessous⁵ :

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \left(1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \dots \right) \cdot \left(1 + \frac{z_2}{1!} + \frac{z_2^2}{2!} + \dots \right)$$

Nous allons multiplier les séries terme à terme. Les termes obtenus peuvent être organisés en une sorte de tableau carré. Sur la première ligne on a la multiplication de la deuxième série par 1. Sur la deuxième ligne on a la multiplication de la deuxième série par $\frac{z_1}{1!}$, etc.

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{z_2}{1!} + 1 \cdot \frac{z_2^2}{2!} + 1 \cdot \frac{z_2^3}{3!} + \dots \\ \dots \frac{z_1}{1!} \cdot 1 + \frac{z_1}{1!} \cdot \frac{z_2}{1!} + \frac{z_1}{1!} \cdot \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_1}{1!} \cdot \frac{z_2^3}{3!} + \dots \\ \dots \frac{z_1^2}{2!} \cdot 1 + \frac{z_1^2}{2!} \cdot \frac{z_2}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} \cdot \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_1^2}{2!} \cdot \frac{z_2^3}{3!} + \dots \\ \dots \frac{z_1^3}{3!} \cdot 1 + \frac{z_1^3}{3!} \cdot \frac{z_2}{1!} + \frac{z_1^3}{3!} \cdot \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} \cdot \frac{z_2^3}{3!} + \dots \end{array}$$

Nous regroupons maintenant les termes dont la somme des exposants en z_1 et z_2 est la même. On voit que ces termes sont rangés en diagonale. Il est facile de montrer qu'en réorganisant le tableau ainsi, le terme résiduel, quand on va de plus en plus loin dans la somme des exposants, tend vers zéro.

5. En écrivant ceci, nous n'avons pas réellement avancé dans notre démonstration. Nous avons simplement écrit chaque fonction à gauche sous la forme de la série qui la définit à droite. Pour établir le résultat qui nous intéresse, on va construire une nouvelle série dont la limite des sommes partielles sera égale à la limite du produit des sommes partielles des deux séries initiales. Et comme ces deux sommes partielles des séries initiales sont convergentes, ce sera aussi le produit de leurs limites. Cette nouvelle série sera celle de $e^{z_1+z_2}$.

Nous obtenons

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = 1 + \left(\frac{z_2}{1!} + \frac{z_1}{1!} \right) + \left(\frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_2 z_1}{1! 1!} + \frac{z_1^2}{2!} \right) + \dots \quad (\text{IX.19})$$

Les termes de cette série sont tous de la forme

$$\begin{aligned} & \frac{z_2^n}{n!} + \frac{z_2^{n-1}}{(n-1)!} \frac{z_1}{1!} + \frac{z_2^{n-2}}{(n-2)!} \frac{z_1^2}{2!} + \dots + \frac{z_1^n}{n!} = \\ & = \frac{1}{n!} \left\{ z_2^n + \binom{n}{1} z_2^{n-1} z_1 + \binom{n}{2} z_2^{n-2} z_1^2 + \dots + z_1^n \right\} \end{aligned}$$

où on a utilisé la notation usuelle $\binom{n}{p}$ pour $\frac{n!}{p!(n-p)!}$, notée parfois aussi C_n^p . Entre les accolades on a simplement le développement du binôme de Newton

$$(z_1 + z_2)^n$$

On est donc arrivé à

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = 1 + \frac{(z_1 + z_2)}{1!} + \frac{(z_1 + z_2)^2}{2!} + \frac{(z_1 + z_2)^3}{3!} + \dots$$

Autrement dit, le terme général de la série (IX.19) coïncide avec le terme général de la série représentant la fonction $e^{z_1+z_2}$. Par conséquent le produit de e^{z_1} par e^{z_2} est bien égal à $e^{z_1+z_2}$ comme énoncé par la formule (IX.18).

Le théorème d'addition des exposants et les formules d'Euler permettent de déduire une expression finie pour la fonction e^z à l'aide de fonctions de variables réelles (finie voulant dire sans utiliser de série, ni donc de limite). En effet, en posant

$$z = x + iy$$

nous obtenons

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

et puisque

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

cela donne

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (\text{IX.20})$$

Cette formule est très commode pour étudier les propriétés de la fonction e^z . Soulignons deux d'entre elles :

1. la fonction e^z ne prend jamais la valeur zéro quand z parcourt le plan complexe ; en effet, quel que soit x , $e^x \neq 0$; et dans la formule (IX.20) les fonctions $\cos y$ et $\sin y$ ne peuvent pas s'annuler ensemble ;
2. la fonction e^z a la période $2\pi i$, c'est-à-dire

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

L'égalité ci-dessus découle du théorème sur l'addition des exposants et de l'égalité

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

Les deux formules (IX.17) permettent d'étudier les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ dans le domaine complexe. Nous laissons à la lectrice et au lecteur le soin de montrer que dans le domaine complexe les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ ont la période 2π et que les formules trigonométriques bien connues sur le sinus d'une somme d'angles et le cosinus d'une somme d'angles restent vraies.

Concept général de fonction d'une variable complexe et différentiabilité des fonctions. Les séries entières sont l'outil pour définir et étudier les fonctions analytiques d'une variable complexe. Cependant, il est parfois intéressant d'étudier les opérations qu'on peut faire avec des fonctions arbitraires d'une variable complexe, en premier lieu la différentiation. La différentiation des fonctions complexes va nous conduire à des éclairages et des résultats profonds. Comme nous le verrons plus loin (pp. 357-358), d'une part, une fonction qui a une dérivée première en tous les points d'un voisinage d'un certain point z_0 a nécessairement des dérivées de tous les ordres dans le voisinage de z_0 ; d'autre part, elle est développable en série entière autour de ce point :

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

c'est-à-dire qu'elle est analytique. Ainsi, en considérant les fonctions différentiables d'une variable complexe, nous sommes amenés de nouveau dans la classe des fonctions analytiques. D'un autre côté, l'étude de la dérivée va nous révéler l'aspect géométrique des fonctions d'une variable complexe et le lien entre leur théorie et les problèmes de la physique mathématique.

Compte tenu de ce qui vient d'être expliqué, nous dirons désormais de toute fonction ayant une dérivée en tous les points d'un voisinage de z_0 qu'elle est *analytique au point* z_0 .

Nous appuyant sur la définition générale d'une fonction, nous dirons que la variable complexe w est une fonction de la variable complexe z , s'il existe une loi spécifique permettant de connaître la valeur de w quand on connaît la valeur de z .

Chaque nombre complexe $z = x + iy$ est représenté, comme on l'a vu, par un point (x, y) dans le plan Oxy . Les nombres $w = u + iv$ seront représentés, quant à eux, par des points dans leur *propre plan* Ouv , qu'on appellera le plan des valeurs de la fonction. Aussi, d'un point de vue géométrique, la fonction d'une variable complexe

$$w = f(z)$$

défini-elle une loi de correspondance entre les points du plan Oxy où évolue l'argument, c'est-à-dire la variable indépendante z , et les points du plan Ouv où évolue la valeur de la fonction, c'est-à-dire la variable dépendante w . En d'autres termes, une fonction d'une variable complexe est une transformation – on dit aussi un « mapping » – du plan de l'argument vers le plan de la fonction. Établir une fonction d'une variable complexe veut dire établir une correspondance entre les paires de points (x, y) et (u, v) . Par conséquent, établir une fonction d'une variable complexe est équivalent à établir deux fonctions réelles chacune à deux variables réelles

$$u = \phi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$$

avec bien sûr

$$w = u + iv = \phi(x, y) + i \psi(x, y)$$

Par exemple, si

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

alors

$$u = \phi(x, y) = x^2 - y^2, \quad v = \psi(x, y) = 2xy$$

La dérivée d'une fonction d'une variable complexe est définie formellement de la même manière que la dérivée d'une fonction d'une variable réelle. La dérivée est la limite du ratio entre l'incrément de la fonction et l'incrément de l'argument, quand l'incrément de l'argument tend vers zéro,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (\text{IX.21})$$

si la limite existe.

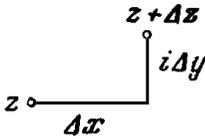


Figure IX.3 :

Direction d'approche de $z' = z + \Delta z$ vers z .

Même si nous faisons l'hypothèse que les deux fonctions réelles $u(x, y)$ et $v(x, y)$, apparaissant dans la définition de $w = f(z)$, ont chacune des dérivées partielles en x et en y , cela n'est pas encore suffisant pour garantir que la dérivée de la fonction $f(z)$ existe. La limite du ratio des incréments dépend en règle générale de la direction dans laquelle le point $z' = z + \Delta z$ s'approche du point z (figure IX.3).

Pour que la dérivée $f'(z)$ existe, il faut que cette limite ne dépende pas de la façon dont z' s'approche de z . Regardons, par exemple, les deux cas où z' s'approche de z dans la direction de l'axe Ox ou dans la direction de l'axe Oy .

Dans le premier cas, $\Delta z = \Delta x$. Alors l'incrément de w est

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) &= \\ &= u(x + \Delta x, y) - u(x, y) + i [v(x + \Delta x, y) - v(x, y)] \end{aligned}$$

Le ratio des incréments est donc

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \\ &= \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Quand $\Delta x \rightarrow 0$, il tend vers

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{IX.22})$$

Dans le second cas, $\Delta z = i \Delta y$. Le ratio des incréments est maintenant

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \\ &= -i \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \end{aligned}$$

Le $-i$ devant le premier terme provient du fait que l'incrément de z est $i\Delta y$. Toute l'expression tend vers

$$\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{IX.23})$$

Si la fonction $w = f(z)$ a une dérivée, les deux expressions obtenues doivent être égales. Par conséquent on doit avoir

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{IX.24})$$

La satisfaction de ces deux équations est une condition nécessaire pour l'existence de la dérivée de la fonction $w = u + iv$. Il se trouve que c'est aussi une condition suffisante (si les fonctions u et v ont chacune une différentielle totale). Nous allons omettre la preuve du caractère suffisant des conditions

(IX.24). Les conditions (IX.24) s'appellent les *équations de Cauchy-Riemann*⁶.

Il est facile de vérifier que nombre des règles de différentiation s'appliquant aux fonctions d'une variable réelle sont transférées sans changement aux fonctions d'une variable complexe. C'est le cas pour les règles de différentiation d'une somme, d'un produit et d'un quotient. La façon même dont a démontré ces règles dans le domaine réel reste identique, il suffit juste de remplacer les variables réelles par des variables complexes. Cela permet de démontrer que n'importe quel polynôme de la variable complexe z

$$w = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$$

est partout différentiable. N'importe quelle fraction rationnelle, c'est-à-dire le ratio de deux polynômes,

$$w = \frac{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + \dots + b_mz^m}$$

est différentiable en tous les points où le dénominateur n'est pas nul.

Pour s'assurer de la différentiabilité de la fonction $w = e^z$, on peut utiliser les conditions de Cauchy-Riemann. Dans notre cas, en utilisant la formule (IX.20) on a

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

et en insérant ces fonctions dans (IX.24), on vérifie que les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites. La dérivée peut être calculée à l'aide, par exemple, de la formule (IX.22) – puisque la direction utilisée est indifférente quand on sait que la fonction est différentiable. On obtient immédiatement

$$\frac{dw}{dz} = e^z$$

6. Nommées à la suite des travaux du mathématicien français Augustin Cauchy (1789-1857) et du mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866).

qui est l'extension naturelle de la différentiation de la fonction exponentielle dans le cas réel.

En se basant sur la formule (IX.17), il est facile de vérifier la différentiabilité des fonctions trigonométriques. Et là encore, les formules classiques de l'analyse réelle restent valides.

Fonction Ln z . Nous n'allons pas étudier ici toutes les fonctions élémentaires d'une variable complexe. Cependant, il va être important pour nous d'être familiers avec les propriétés de la fonction Ln z , c'est-à-dire la fonction logarithme, mais considérée *dans le domaine complexe*. C'est la raison pour laquelle on utilise un L majuscule devant le n, pour la distinguer de son homologue dans le domaine réel. Comme dans le domaine réel, nous posons

$$w = \text{Ln } z$$

si

$$z = e^w$$

Dans la formule $w = \text{Ln } z$, la variable z est la variable indépendante, notée généralement $x + iy$, et w est la variable dépendante, notée $u + iv$. Afin d'analyser cette fonction Ln z , écrivons le nombre z non pas sous sa forme générale $x + iy$, mais sous sa forme trigonométrique

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$$

D'autre part, en appliquant à l'exponentielle e^w le théorème sur le produit d'exponentielles qui devient une addition des exposants, nous avons aussi pour l'expression de z

$$z = e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = e^u (\cos v + i \sin v)$$

La comparaison de ces deux expressions obtenues pour z implique

$$e^u = r \tag{\alpha}$$

$$\cos v + i \sin v = \cos \phi + i \sin \phi \tag{\beta}$$

Gardant à l'esprit que u et r sont des nombres réels, de la formule (α) nous déduisons

$$u = \ln r$$

où $\ln r$ est la notation habituelle pour le logarithme naturel, dit encore « logarithme népérien », du nombre réel positif r . L'égalité (β) ne peut être satisfaite que si

$$\cos v = \cos \phi, \quad \sin v = \sin \phi$$

Mais, en ce qui concerne v et ϕ , ils peuvent différer par un multiple de 2π

$$v = \phi + 2\pi n$$

Quel que soit n , si v et ϕ sont liés ainsi, la formule (β) sera satisfaite. Sur la base des expressions obtenues pour u et v , nous pouvons écrire

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\phi + 2\pi n) \quad (\text{IX.25})$$

La formule (IX.25) définit la fonction $\operatorname{Ln} z$ pour toutes les valeurs complexes de z différentes de zéro. Elle ne donne pas seulement la valeur du logarithme pour les réels positifs, mais aussi pour les réels négatifs et enfin pour tous les nombres complexes.

La présence du nombre entier arbitraire n dans l'expression de $\operatorname{Ln} z$ veut dire que le logarithme complexe est une *fonction à valeurs multiples*⁷. Pour n'importe quelle valeur de n nous obtenons une des valeurs parmi les valeurs possibles de $\operatorname{Ln} z$. Si nous fixons la valeur de n , alors nous obtenons une des formes possibles de cette fonction.

Cependant, les différentes valeurs de $\operatorname{Ln} z$ apparaissent organiquement liées les unes aux autres. En effet, plaçons-nous au point z_0 et fixons, par exemple, la valeur $n = 0$. Faisons maintenant parcourir au nombre complexe z la boucle C , démarrant à z_0 , faisant le tour de l'origine des coordonnées, et revenant à z_0 (figure IX.4).

7. C'est une des généralisations de la notion de fonction qu'on apprend au lycée. L'autre – très différente – est la notion de *distribution* que nous avons abordée brièvement à la fin du chapitre VI sur les EDP.

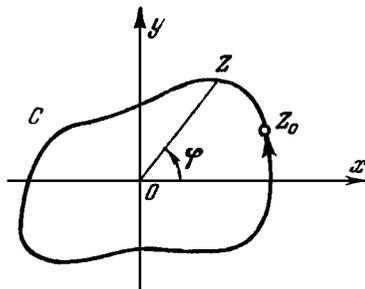


Figure IX.4 : Illustration du caractère multiple de la fonction logarithme complexe de z .

À mesure que z progresse sur la boucle, l'angle ϕ va croître continûment, et après un tour complet il aura augmenté de 2π . Ainsi, si on a choisi au départ

$$(\text{Ln } z)_0 = \ln r_0 + i\phi_0$$

et nous faisons tourner le nombre complexe z le long de C , entourant l'origine, nous allons retourner au point z_0 , mais la valeur du logarithme complexe de z sera maintenant

$$(\text{Ln } z)_0 = \ln r_0 + i(\phi_0 + 2\pi)$$

Cela nous convainc qu'il est possible de passer de manière continue d'une valeur de $\text{Ln } z$ à une autre, au même point z . Pour cela, il faut se déplacer sur une courbe qui tourne autour de l'origine le nombre de fois qu'il est nécessaire avant de revenir à notre point de départ. On dit du point $z = 0$ que c'est un *point de branchement* ou un *point de ramification* pour la fonction $\text{Ln } z$.

Si nous voulons nous limiter à l'étude d'une seule valeur de la fonction $\text{Ln } z$, nous devons interdire les points z obtenus au terme d'un trajet le long d'une boucle fermée contournant l'origine $z = 0$. On peut le faire en traçant une ligne continue allant de l'origine jusqu'à l'infini et en interdisant au point z de croiser cette ligne, appelée une *coupure*. Si z se déplace

dans le plan complexe sur lequel nous avons tracé une coupure qu'il ne peut pas franchir, alors il est impossible d'effectuer une transition continue d'une valeur de $\text{Ln } z$ à une autre au même point. Et en partant d'une valeur définie pour le logarithme complexe en un certain point z_0 , nous attribuerons à chaque point du plan, en nous déplaçant jusqu'à lui, une valeur unique pour son propre logarithme complexe. Les valeurs de la fonction $\text{Ln } z$ sélectionnées ainsi forment ce qu'on appelle une ramification ou *branche univoque* de la fonction logarithme complexe.

Par exemple, si nous traçons une coupure le long de la partie négative de l'axe des réels, pour chaque choix, en un point quelconque donné z_0 , du nombre n dans la formule (IX.25), nous obtiendrons une branche univoque de $\text{Ln } z$. Si nous avons choisi $n = k$, alors tous les arguments⁸ des logarithmes complexes satisferont

$$(2k - 1)\pi < \phi \leq (2k + 1)\pi$$

sur la branche correspondante.

Une fois qu'on a choisi une branche univoque de la fonction logarithme complexe, nous pouvons étudier sa différentiabilité. En posant

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}$$

il est facile de vérifier que $\text{Ln } z$ satisfait les conditions de Cauchy-Riemann. Et la dérivée calculée, par exemple, par la formule (IX.22) sera égale à

$$\frac{d \text{Ln } z}{dz} = \frac{1}{z}$$

Soulignons que la dérivée de $\text{Ln } z$ est une fonction à valeur unique.

8. En mathématiques, « argument » veut dire « variable indépendante d'une fonction », mais aussi « angle d'un nombre complexe avec l'axe des réels ». Le contexte permet de savoir de quoi on parle. Ici on parle de l'angle du nombre complexe $\text{Ln } z$ avec l'axe Ox .

IX.2 Lien entre les fonctions d'une variable complexe et les problèmes de la physique mathématique

Liens avec les problèmes d'hydrodynamique. Les conditions de Cauchy-Riemann établissent un lien entre les problèmes de la physique mathématique et la théorie des fonctions d'une variable complexe. Illustrons-le avec des problèmes d'hydrodynamique.

Parmi tous les mouvements possibles d'un milieu liquide, les *mouvements stationnaires* jouent un rôle particulièrement important. C'est le nom qu'on donne aux mouvements du fluide, tels que la distribution des vitesses en chaque point de l'espace ne change pas au cours du temps. Par exemple, un observateur posté sur un pont et regardant l'écoulement de la rivière autour d'une pile du pont voit un flux stationnaire.

Parfois le flux devient stationnaire pour un observateur qui se déplace d'une manière ou d'une autre. Par exemple, le courant peut ne pas être stationnaire aux yeux de quelqu'un posté sur la berge, mais néanmoins l'être pour quelqu'un dans un bateau sur la rivière. Pour un passager assis dans un avion volant à vitesse constante, le mouvement de l'air perturbé par le passage de l'avion apparaîtra stationnaire⁹.

Dans un mouvement stationnaire, le vecteur vitesse V des particules de liquide, en un point donné de l'espace, ne change pas au cours du temps. Et si le mouvement est stationnaire aux yeux d'un observateur en mouvement, alors le vecteur vitesse est constant dans le temps en des points qui ont des coordonnées fixes par rapport au repère de l'observateur.

Parmi tous les mouvements d'un fluide, la classe des *écoulements en plans parallèles identiques* est particulièrement importante¹⁰. Ce sont les mouvements dans lesquels les vitesses des particules sont toutes parallèles à un certain plan, et dans

9. Il y a de nombreuses façons de créer une situation stationnaire dans un repère et pas dans un autre. Noter que l'exemple de l'avion est essentiellement le même que celui de la pile de pont.

10. C'est un cas particulièrement simple d'*écoulement laminaire*. Mais ces derniers comprennent d'autres types de mouvements (consulter un manuel de mécanique des fluides pour plus de détails).

chaque plan parallèle à celui-ci la distribution des vitesses est la même.

Si nous imaginons une masse infinie de fluide s'écoulant autour d'un corps cylindrique perpendiculairement à sa génératrice, alors dans tous les plans perpendiculaires à cette génératrice, la distribution des vitesses sera la même et l'écoulement sera en plans parallèles identiques. Parfois le mouvement d'un fluide peut être considéré comme approximativement de ce type. Par exemple, si nous voulons étudier la distribution des vitesses du flux d'air dans un plan perpendiculaire à une aile d'avion, quand ce plan n'est pas trop près du fuselage ou de l'extrémité de l'aile, le flux d'air peut être considéré comme approximativement planaire (on ne répète pas « parallèle identique » mais c'est implicite).

Voyons comment la théorie des fonctions d'une variable complexe peut être appliquée à l'étude des mouvements stationnaires de fluide en écoulement planaire. Nous allons aussi faire l'hypothèse que le liquide est incompressible, c'est-à-dire que sa densité ne change pas avec la pression. Par exemple, l'eau a cette propriété. Il s'avère que l'air peut aussi être considéré comme incompressible quand on étudie son mouvement, à la condition que les vitesses ne soient pas très grandes. L'hypothèse de l'incompressibilité de l'air n'introduit pas de distorsions notables – dans l'étude d'un écoulement d'air stationnaire – si la vitesse du courant d'air n'excède pas 60% à 80% de la vitesse de la vitesse du son (dans les conditions ordinaires elle est d'environ 340 mètres par seconde).

Le flux d'un liquide est caractérisé par la distribution des vitesses de ses particules¹¹. Si l'écoulement est en plans parallèles identiques, alors il est suffisant de connaître les vitesses des particules dans l'un des plans du mouvement.

Nous allons dénoter par $V(x, y, t)$ le vecteur vitesse de la particule qui passe par le point de coordonnées x, y au temps t . Dans le cas qui nous intéresse, le mouvement est

11. Rappel : par « particule » on ne veut pas dire « molécule », mais « petit volume de matière ». Nous sommes dans la physique des *milieux continus*. Voir chapitre VI où ces questions ont déjà été abordées.

stationnaire, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du temps. Le vecteur V sera donné par ses projections u et v sur les axes de coordonnées. Considérons les trajectoires des particules de fluide. Dans le cas d'un écoulement stationnaire, la trajectoire d'une particule qui est passée, à un moment donné, par un certain point de l'espace ne changera pas au cours du temps. Si le champ des vitesses est connu, c'est-à-dire, si les composantes de la vitesse sont des fonctions connues de x , y , alors les trajectoires des particules de fluide peuvent être déterminées en utilisant le fait que la vitesse d'une particule est toujours tangente à sa trajectoire. Cela donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x, y)}{u(x, y)}$$

L'équation qui en résulte est une équation différentielle pour les trajectoires. Ces trajectoires des particules dans un écoulement stationnaire sont appelées des *lignes de courant*. Par chaque point du plan passe une ligne de courant.

Les lignes de courant ayant été expliquées, nous allons maintenant expliquer le concept de fonction de courant qui joue aussi un rôle important. Nous fixons dans un plan P du flux une ligne de courant C_0 , et regardons aussi une ligne C_1 (proche ou distante, peu importe). Et nous regardons aussi leurs correspondantes dans un plan P' du flux, distant de P d'une unité. Nous considérons alors le canal d'écoulement imaginaire bordé d'une part par les deux surfaces cylindriques (avec une génératrice perpendiculaire au plan du flux) passant par ces deux lignes de courant, et d'autre part les plans P et P' (figure IX.5).

Si nous considérons deux sections transversales arbitraires, dénotées γ_1 et γ_2 , de notre canal d'écoulement, alors la quantité de fluide passant par ces deux sections par unité de temps sera la même. En effet, à l'intérieur d'un volume quelconque donné, dans l'espace du milieu fluide, par exemple le volume défini par C_1 , C_0 , γ_1 , γ_2 , et l'épaisseur d'une unité entre P et P' , la quantité de liquide – étant de densité constante – ne peut pas changer au cours du temps. D'autre part, les murs

latéraux du canal sont construits sur les lignes de courant C_0 et C_1 , et les plans P et P' sont des plans du mouvement, par conséquent aucun liquide ne les traverse. Il en résulte que la quantité de fluide entrant par γ_1 par unité de temps est nécessairement la même que celle sortant par γ_2 .

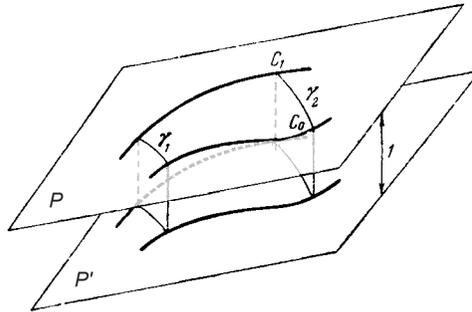


Figure IX.5 : Canal d'écoulement imaginaire du flux entre les lignes de courant C_0 et C_1 , avec une épaisseur d'une unité entre deux plans du flux.

On appelle *fonction de courant* la fonction $\psi(x, y)$ prenant sur une ligne de courant C_1 la valeur constante égale à la quantité de liquide s'écoulant par unité de temps à travers une section transversale d'un canal construit comme on vient de le faire sur les lignes C_0 et C_1 .

La fonction de courant est déterminée à une constante arbitraire près, dépendant du choix de la ligne de courant initiale C_0 . Si on connaît la fonction de courant au sein du milieu liquide – fonction qui, on le rappelle, ne dépend que de deux variables pour un écoulement planaire –, alors l'équation des lignes de courant devient manifestement

$$\psi(x, y) = \text{const.}$$

Les composantes de la vitesse du flux s'expriment à l'aide des dérivées de la fonction de courant. Pour les obtenir, considérons un canal d'écoulement formé par une ligne de courant C ,

passant par un point donné $M(x, y)$, et la ligne C' , passant par le point proche $M'(x, y + \Delta y)$, et, comme toujours, deux plans parallèles au mouvement du fluide, distants d'une unité. Calculons la quantité de liquide q qui s'écoule sur une période de temps dt à travers la section MM' du canal (figure IX.6).

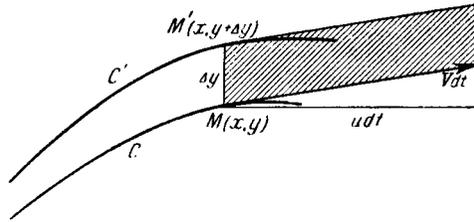


Figure IX.6 : Calcul de la dérivée partielle par rapport à y de la fonction de courant $\psi(x, y)$. Le dessin représente le plan P (fig. IX.5). Il faut garder à l'esprit que toute la figure a aussi une épaisseur d'une unité dans la direction perpendiculaire à la feuille.

D'un côté, en vertu de la définition de la fonction de courant

$$q = (\psi' - \psi) dt = \Delta\psi dt$$

où $\psi = \psi(x, y)$, c'est-à-dire la valeur de la fonction de courant sur toute la ligne de courant passant par M . Et $\psi' = \psi(x, y + \Delta y)$, c'est-à-dire la valeur de la fonction de courant sur toute la ligne de courant passant par M' . Leur différence est la quantité de liquide passant par unité de temps par la coupure M et M' .

D'un autre côté – se rappelant que la vitesse d'une particule de liquide passant par le point $M(x, y)$ est dénotée par $V(x, y)$ – la quantité q est égale au volume obtenu en traçant le vecteur $V dt$ à partir de chaque point de la coupure MM' (partie hachurée sur la fig. IX.6). Si MM' est petit, nous pouvons considérer que V est constante sur tout MM' , et est égale à sa valeur en M .

Le volume de la partie hachurée (en tenant compte de l'épaisseur 1 entre les deux plans) est égal à $\Delta y \times 1$ multiplié par la hauteur du parallélogramme, c'est-à-dire la projection du vecteur Vdt sur l'axe Ox . Celle-ci est égale à $u dt$. Par conséquent

$$q \approx u \Delta y dt$$

d'où, en divisant par dt ,

$$u \Delta y \approx \Delta \psi$$

Enfin en divisant cette égalité par Δy et en passant à la limite nous obtenons

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (\text{IX.26})$$

Un raisonnement analogue donne la deuxième composante

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{IX.26}')$$

Nous avons ainsi obtenu les composantes du vecteur vitesse à partir des dérivées partielles de la fonction de courant.

Pour travailler avec le champ des vitesses, en plus de la fonction de courant, on introduit une autre fonction. Son existence est liée à des considérations sur la rotation sur elles-mêmes ou non des petites particules de liquide. En effet, si nous imaginons qu'une petite particule de liquide s'est solidifiée, alors, en général, elle peut aussi avoir un mouvement de rotation sur elle-même. Cependant, si le mouvement du liquide a démarré au repos et qu'il n'y a pas de frottements internes entre les particules de liquide, alors on peut montrer qu'elles ne peuvent pas acquérir de mouvement de rotation sur elles-mêmes en plus du mouvement général d'écoulement du fluide.

Chapitre VI, dans le cadre de la présentation générale des équations aux dérivées partielles de la physique mathématique, nous avons déjà brièvement abordé ces sujets (p. 92). Nous avons vu que de tels mouvements, sans rotation des particules sur elles-mêmes, sont appelés *irrotationnels*.

Les écoulements irrotationnels jouent un rôle fondamental dans l'étude du mouvement des corps liquides. En hydrodynamique, on établit que pour ce type de mouvements de liquides il existe une fonction $\phi(x, y)$, permettant de calculer les composantes de la vitesse à l'aide des formules

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (\text{IX.27})$$

Comme on l'a vu, la fonction ϕ s'appelle le *potentiel vitesse* du mouvement¹². Et les mouvements irrotationnels portent aussi le nom de mouvements potentiels ou à potentiel.

Dans la suite, nous considérons des mouvements ayant un potentiel vitesse.

La comparaison des jeux de formules (IX.26) et (IX.27) pour les composantes de la vitesse, d'une part en termes de la fonction de courant, et d'autre part en termes du potentiel vitesse, conduit à la conclusion remarquable suivante. La paire de fonctions réelles, chacune à deux variables réelles, que sont le potentiel vitesse $\phi(x, y)$ et la fonction de courant $\psi(x, y)$ d'un écoulement de fluide irrotationnel, satisfont les conditions de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{IX.28})$$

Autrement dit, la fonction d'une variable complexe

$$w = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

est une fonction *différentiable* d'une variable complexe. Réciproquement : si nous partons d'une fonction arbitraire différentiable d'une variable complexe, alors, comme nous le savons, ses parties réelles et imaginaires satisfont les conditions

12. Dans le chapitre VI sur les EDP, cette fonction était dénotée $U(x, y, z, t)$, et nous étions dans un cas plus général que les écoulements planaires identiques dans chaque plan, et stationnaires, considérés ici, qui ramènent les coordonnées spatiales à seulement x et y et éliminent la variable t .

de Cauchy-Riemann et elle peuvent être considérées respectivement comme le potentiel vitesse et la fonction de courant de l'écoulement (planaire, identique dans chaque plan, et stationnaire) d'un liquide incompressible. La fonction w s'appelle la *fonction caractéristique du flux* ou du mouvement.

Regardons aussi la signification de la dérivée de w . En employant, par exemple, la formule (IX.22), nous avons

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

En vertu de (IX.27) et (IX.26), nous trouvons

$$\frac{dw}{dz} = u - iv$$

ou, en passant aux complexes conjugués,

$$u + iv = \overline{\left(\frac{dw}{dz}\right)} \quad (\text{IX.29})$$

où la barre au-dessus de $\frac{dw}{dz}$ signifie qu'il faut prendre le complexe conjugué de la dérivée¹³.

Ainsi, le vecteur vitesse du flux (ou plus précisément le nombre complexe qui lui est associé) est égal au conjugué de la dérivée de la fonction caractéristique du flux.

Exemples de mouvement de fluide planaire parallèle identique. Regardons quelques exemples.

Commençons par le flux planaire le plus simple. On considère la fonction caractéristique suivante

$$w = Az \quad (\text{IX.30})$$

où A est une grandeur complexe constante. Il découle de (IX.29) que

$$u + iv = \overline{A}$$

13. Le nombre complexe conjugué de $a + ib$ est le nombre complexe $a - ib$. Si $z = a + ib$, son complexe conjugué est noté \bar{z} . Et réciproquement le complexe conjugué de \bar{z} est z .

Ainsi, la fonction linéaire (IX.30) définit un flux de fluide ayant un vecteur vitesse constant. Si nous posons

$$A = u_0 - iv_0$$

alors, en séparant les parties réelles et imaginaires de w , nous aurons

$$\phi(x, y) = u_0x + v_0y \quad (2)$$

$$\psi(x, y) = u_0x - v_0y$$

On voit que les lignes de courant seront des lignes droites parallèles au vecteur vitesse (figure IX.7).

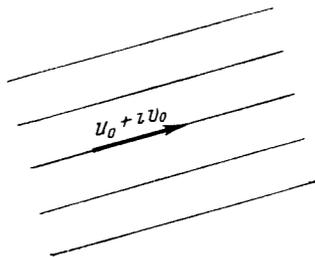


Figure IX.7 : Flux planaire le plus simple. Dans chaque plan (où le mouvement est identique) le mouvement est un écoulement parallèle à vitesse uniforme dans une direction donnée.

Comme deuxième exemple, considérons la fonction caractéristique

$$w = Az^2$$

où cette fois-ci A est une quantité réelle constante, positive ou négative. Pour représenter la configuration générale du flux, il faut déterminer les lignes de courant. Dans le cas présent la fonction de courant, qui est la partie imaginaire sans le facteur i de la fonction caractéristique, est

$$\psi(x, y) = 2Axy$$

et l'équation des lignes de courant est

$$xy = \text{const.}$$

Ce sont des hyperboles dont les asymptotes sont les axes Ox et Oy (figure IX.8).

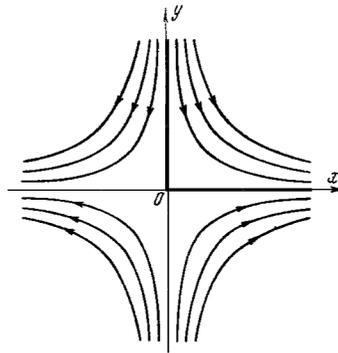


Figure IX.8 : Flux planaire correspondant à la fonction caractéristique $w = Az^2$ (où A est un nombre réel, ici positif). Les lignes de courant sont des hyperboles.

Les flèches montrent la direction du mouvement des particules le long des lignes de courant quand $A > 0$. Les axes Ox et Oy sont aussi des lignes de courant.

Si la friction dans le fluide est très faible, alors remplacer quelques lignes de courant par un mur de même forme ne perturbera pas le reste du flux. Les particules de liquide glisseront le long du mur. Fort de ce principe, en mettant des murs carrément le long des directions positives des axes de coordonnées (fig. IX.8 on les a représentés avec un trait plus épais), nous obtenons dans cet exemple le dessin général de l'écoulement d'un liquide sans turbulences y compris lors du passage dans un coin.

Troisième exemple. Un cas important de flux est celui ayant pour fonction caractéristique

$$w = a \left(z + \frac{R^2}{z} \right) \quad (\text{IX.31})$$

où a et R sont des constantes réelles positives.

La fonction de courant sera

$$\psi = a \left(y - \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \right)$$

et, par conséquent, l'équation des lignes de courant

$$y - \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} = \text{const.}$$

En particulier, en prenant la constante égale à zéro, nous obtenons $y = 0$ ou $x^2 + y^2 = R^2$. On voit ainsi que le cercle de rayon R est une ligne de courant. Si nous remplaçons l'intérieur de cette ligne de courant par un corps solide, nous obtenons le flux autour d'un cylindre circulaire (en gardant à l'esprit la troisième dimension z où sur tous les plans $z = \text{const.}$ le flux planaire est le même). La configuration des lignes de courant est montrée figure IX.9. Nous pouvons déterminer la vitesse du flux à l'aide de la formule (IX.29)

$$u + iv = a \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right)$$

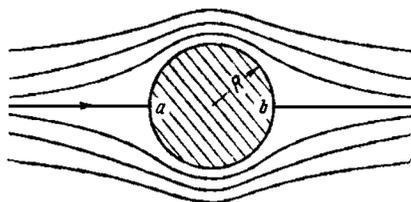


Figure IX.9 : Lignes de courant d'un flux globalement uniforme contournant un cylindre circulaire (vue en coupe).

Loin du cylindre nous trouvons

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (u + iv) = a$$

C'est-à-dire que loin du cylindre la vitesse tend vers une valeur constante, et par conséquent le flux devient uniforme.

Ainsi, la formule (IX.29) exprimant sous forme de nombre complexe le vecteur vitesse, et que l'on obtient en dérivant la fonction caractéristique puis en prenant son conjugué, détermine la configuration qu'il prend quand un flux uniforme rencontre et s'écoule autour d'un obstacle en forme de cylindre circulaire perpendiculaire à son mouvement.

Idées fondamentales de la théorie d'une aile d'avion. Théorème de Joukovski. L'application de la théorie des fonctions d'une variable complexe à l'étude des écoulements de fluide planaires parallèles identiques conduisit N. I. Joukovski¹⁴ et S. A. Tchaplyguine¹⁵ à des découvertes remarquables en aérodynamique. Lors de leur étude du flux autour de divers corps ils découvrirent la loi de formation de la force de portance d'une aile d'avion. Pour comprendre la progression des idées qui amenèrent jusqu'à cette découverte, il nous faut considérer encore un autre exemple particulier de flux. Considérons la fonction caractéristique

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Ln } z$$

où Γ est une constante réelle. Comme nous l'avons vu, bien que la fonction w soit à valeurs multiples, sa dérivée

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} \quad (\text{IX.32})$$

est à valeur unique, et par conséquent notre fonction caractéristique conduit à un champ de vitesse bien défini pour un certain écoulement de fluide. En posant $z = re^{i\theta}$ le potentiel vitesse et la fonction de courant peuvent être calculés à l'aide de la formule (IX.25)

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi i} \theta, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln r$$

14. Nikolaï Iegorovitch Joukovski (1847-1921), mathématicien et physicien russe, l'un des contributeurs importants à l'hydrodynamique et l'aéronautique, après les travaux des grands fondateurs au XVIII^e siècle Daniel Bernoulli, Jean le Rond d'Alembert et Leonhard Euler.

15. Sergueï A. Tchaplyguine (1869-1942), mathématicien et physicien russe, élève de Joukovski.

La seconde des ces formules montre que les lignes de courant sont les cercles concentriques $r = \text{const.}$ (figure IX.10).

La vélocité du courant est donnée par la formule (IX.29)

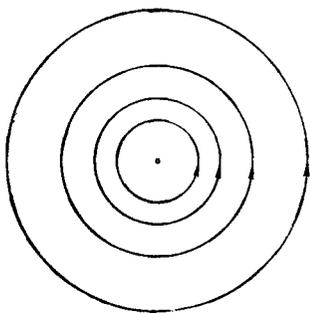


Figure IX.10 : Lignes de courant.

$$u + iv = -\frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}$$

Il en découle, en particulier, que la vitesse est

$$V = |u + iv| = \frac{|\Gamma|}{2\pi i} \frac{1}{z}$$

C'est-à-dire, la vitesse est constante sur chaque ligne de courant. Une étude plus détaillée montre que le flux tourne dans le sens des aiguilles d'une montre si $\Gamma < 0$ et dans le sens positif si $\Gamma > 0$.

Si nous remplaçons une de ces lignes de courant par une frontière solide de même forme, alors nous obtiendrons un mouvement circulaire du fluide autour d'un cylindre. Un tel mouvement est appelé une *circulation*.

Le potentiel de notre mouvement n'est plus une fonction à valeur unique. Quand on parcourt une boucle fermée autour du cylindre, le potentiel change d'une valeur Γ en plus ou en moins selon le sens. Ce changement du potentiel est appelé la *circulation du flux*.

Si nous ajoutons à la fonction caractéristique du flux uniforme rencontrant un cylindre – équation (IX.31) et figure IX.9 – celle de la circulation autour du cylindre (dans le sens des aiguilles d'une montre¹⁶), nous obtenons la nouvelle fonction caractéristique

$$w = a\left(z + \frac{R^2}{z}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Ln } z \quad (\text{IX.33})$$

16. Dans la formule (IX.33), on prend un Γ positif, mais avec un signe moins devant.

Cette fonction caractéristique représente aussi un flux rencontrant un cylindre de rayon R . En fait, la fonction de courant sera constante sur le cercle de rayon R , puisque ses coefficients réels et imaginaires seront tous deux constants. La vitesse du courant, déterminée par la fonction (IX.33), va à nouveau avoir pour limite a quand $z \rightarrow \infty$. Cela montre que pour n'importe quelle valeur de Γ la fonction caractéristique (IX.33) représente un flux s'écoulant globalement vers la droite avec une vitesse uniforme a , mais rencontrant et contournant un cylindre – ce qui perturbe évidemment localement le flux.

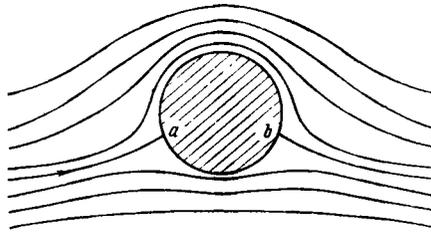


Figure IX.11 : Flux dont l'équation caractéristique est (IX.33).

La figure IX.11 montre comment le flux ayant pour fonction caractéristique (IX.33) se comporte autour du cylindre quand Γ est positif. Ce flux n'a plus de symétrie, et les points a et b , d'arrivée et départ du flux dans une direction normale au cylindre, qui sur la figure IX.9 se trouvaient de part et d'autre d'un diamètre, sur la figure IX.11 se sont déplacés vers le bas. Le potentiel de ce flux est une fonction à valeurs multiples. Il changera de la valeur Γ lors d'une boucle autour du cylindre.

Pour les flux tournant simplement autour du cylindre (sans flux concomitant uniforme vers la droite), à cause de la symétrie circulaire de l'équation (IX.32), le flux présentera généralement une symétrie circulaire. Mais pour des corps différents asymétriques, il se trouve qu'en règle générale on aura un potentiel à valeurs multiples. Nous expliquerons plus loin les raisons physiques pour ce fait. Les méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe permettent de déterminer

les flux possibles autour de corps de n'importe quelle forme. Dans la section suivante, nous parlerons de ces méthodes. Des flux dont le potentiel est à valeur unique ou à valeurs multiples peuvent être construits dans le voisinage d'un cylindre ou de n'importe quel corps.

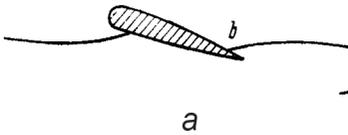


Fig. IX.12a

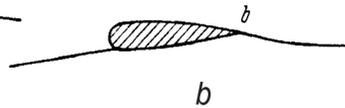


Fig. IX.12b

Quand on étudie le flux autour d'une aile d'avion, on a affaire à des corps avec une pointe effilée en aval. Le profil d'une aile d'avion a toujours cette forme. Si, pour un tel profil, on construit un flux avec un potentiel à valeur unique, alors le point b où le flux quittera l'obstacle ne correspondra pas à sa pointe effilée (fig. IX.12a). Il se trouve qu'un tel flux est physiquement impossible. (Des vitesses infinies et une dépression infinie apparaîtraient à la pointe de l'aile.) Le flux pour lequel le point b coïncide avec la pointe de l'aile (fig. IX.12b) est le seul possible, et ce flux, en règle générale, aura un potentiel à valeurs multiples. Autrement dit ce sera un flux circulaire, au sens que son potentiel change de valeur quand on fait un tour complet de l'aile. La circulation Γ d'un flux de ce genre est encore une fois définie comme le changement du potentiel quand on fait un tour complet de l'aile.

L'hypothèse de la possibilité physique d'un flux irrotationnel enveloppant une aile d'avion ayant un profil effilé en aval porte le nom de *postulat de Tchaplyguine*.

La découverte remarquable de N. I. Joukovski est la suivante : en présence d'une circulation dans le flux, une force de portance apparaît qui soulève l'aile dans la direction perpendiculaire au flux qui arrive. Cette portance a une magnitude,

proportionnelle à la vitesse du flux, donnée par la formule

$$\rho a \Gamma$$

où ρ est la densité du milieu, et Γ la circulation (figure IX.13).



Figure IX.13 : Portance s'exerçant sur l'aile due au flux arrivant à la vitesse a . La direction de la portance dépend du sens de la circulation Γ , laquelle dépend de la position de l'aile dans le flux.

Le théorème de Joukovski sur la force de portance s'exerçant sur une aile d'avion est à la base de l'aérodynamique moderne¹⁷. Nous n'allons pas le démontrer ici. Notons néanmoins que la plupart des démonstrations utilisent la théorie des intégrales de fonctions d'une variable complexe.

L'aérodynamique, aux fondations de laquelle ont largement contribué N. I. Joukovski et S. A. Tchaplyguine, a été ensuite l'objet de travaux et développements importants par les savants soviétiques.

Applications à d'autres problèmes de physique mathématique. La théorie des fonctions d'une variable complexe trouve de vastes applications non seulement dans la théorie du vol des avions, mais aussi dans de nombreux problèmes d'hydrodynamique.

Le champ d'application de la théorie de ces fonctions ne se limite, cependant, pas à l'aéro- et l'hydrodynamique : il est

17. On le rencontre aussi sous le nom de théorème de Kutta-Joukovski, du nom du mathématicien allemand Wilhelm Kutta (1867-1944), que nous avons déjà rencontré dans les méthodes de Runge-Kutta qui généralisent la méthode d'Euler pour résoudre les EDO (chap. V, p. 43).

encore bien plus vaste. Ses méthodes sont utilisées dans de nombreux problèmes de physique mathématique. Pour l'éclairer, retournons aux conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

et déduisons-en une équation que satisfait la partie réelle d'une fonction analytique d'une variable complexe. Si on différentie par rapport à x la première des deux équations, et par rapport à y la seconde, et qu'on les ajoute, on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Cette équation (que nous avons déjà rencontrée chapitre VI sur les équations aux dérivées partielles, EDP) porte le nom d'*équation de Laplace*. Un grand nombre de problèmes en physique et en mécanique sont liés à l'équation de Laplace. Par exemple, si un corps est en équilibre thermique¹⁸, alors la fonction mesurant sa température en chaque point satisfait l'équation de Laplace. L'étude d'un champ gravitationnel ou d'un champ électrostatique est liée à cette équation. Quand on étudie l'infiltration d'un liquide dans un milieu poreux, on arrive aussi à l'équation de Laplace. Dans tous ces problèmes où l'équation de Laplace joue un rôle, les méthodes de la théorie des fonctions complexes ont trouvé de vastes applications.

Pas seulement l'étude de l'équation de Laplace, mais aussi l'étude d'équations plus générales de la physique mathématique peut être associée à la théorie des fonctions d'une variable complexe. L'un des exemples les plus remarquables de ce genre est fourni par les problèmes de la théorie de l'élasticité dans le plan. Les savants soviétiques Guri V. Kolosov

18. On parle d'équilibre thermique *dynamique*, avec de la chaleur qui entre par certains points de la frontière et qui sort par d'autres, dans un régime stationnaire (cf. chapitre VI, section VI.2).

(1867-1936) et Nicolas Muskhelichvili (1891-1976) posèrent les fondations pour l'application des fonctions complexes dans ce domaine.

IX.3 Lien entre les fonctions d'une variable complexe et la géométrie

Propriétés géométriques des fonctions complexes différentiables. Comme dans la théorie des fonctions d'une variable réelle, dans la théorie des fonctions analytiques, la représentation géométrique du comportement des fonctions joue un rôle important. On peut sans risque dire qu'une approche géométrique des propriétés des fonctions d'une variable complexe non seulement sert à visualiser leurs propriétés analytiques, mais conduit même à toute une problématique particulière à cette théorie. L'ensemble des problèmes associés aux propriétés géométriques des fonctions s'appelle la *théorie géométrique des fonctions*. Comme dit plus haut, d'un point de vue géométrique, une fonction d'une variable complexe $w = f(z)$ est un mapping du plan des z vers le plan des w ¹⁹. Ce mapping peut être spécifié par les deux fonctions réelles, chacune de deux variables réelles,

$$\begin{aligned}u &= u(x, y) \\v &= v(x, y)\end{aligned}\tag{4}$$

Si nous voulons étudier le comportement d'un mapping lisse dans un petit voisinage d'un certain point (x_0, y_0) , nous pouvons développer ces deux fonctions en séries de Taylor et nous limiter aux premiers termes de l'expansion

19. Une fonction d'une variable réelle était un mapping de la droite des x vers la droite des y , et, comme l'avait montré Descartes, se prêtait à une représentation géométrique très commode dans le plan (cf. vol 1, chap. III). Maintenant la droite ou axe des x est remplacé par le *plan* des z , et l'axe des y par le *plan* des w . Étant donné que l'esprit humain ne voit pas naturellement les constructions dans l'espace à 4 dimensions, nous allons employer d'autres moyens pour « voir » ou investiguer géométriquement les liens entre z et $w = f(z)$.

$$u - u_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 (y - y_0) + \dots \quad (5)$$

$$v - v_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 (y - y_0) + \dots$$

où les dérivées partielles sont prises au point (x_0, y_0) . Par conséquent, dans le voisinage d'un point, un mapping lisse quelconque peut être regardé, en première approximation, comme une transformation affine (voir vol. 1, chap. III, section III.11)

$$u - u_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) \quad (6)$$

$$v - v_0 = c(x - x_0) + d(y - y_0)$$

où

$$a = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0, \quad b = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \quad (7)$$

$$c = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0, \quad d = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0$$

Considérons maintenant les propriétés du mapping effectué par une fonction f analytique dans le voisinage d'un point $z = x + iy$. Soit, dans le plan de la variable indépendante, une ligne courbe lisse quelconque C partant du point z ; lui correspond, dans le plan de la variable dépendante, une ligne courbe Γ , partant du point w . Si z' est un point proche de z et w' le point correspondant, alors quand $z' \rightarrow z$ on aura $w' \rightarrow w$ et

$$\frac{w' - w}{z' - z} \rightarrow f'(z) \quad (\text{IX.34})$$

En particulier, il s'ensuit que

$$\frac{|w' - w|}{|z' - z|} \rightarrow |f'(z)| \quad (\text{IX.35})$$

On peut formuler en français ce fait comme ceci :

La limite du ratio des longueurs des arcs de courbes, correspondant l'un à l'autre dans le plan des w et dans le plan des z , en un point donné $z = x + iy$ et son image w , est le même quelle que soit la courbe issue de z (et son image issue de w). Ou, comme l'on dit, le ratio des éléments linéaires dans le plan w et le plan z , en un point donné, pour une fonction analytique f donnée, ne dépend pas de la façon avec laquelle on s'éloigne de $z = x + iy$ dans le plan de la variable indépendante.

La grandeur $|f'(z)|$, mesurant l'accroissement des éléments linéaires, s'appelle le *coefficient de dilatation* effectuée par f au point z .

Faisons l'hypothèse, maintenant, qu'en un certain point z la dérivée $f'(z) \neq 0$. Alors la grandeur $f'(z)$ a un argument bien défini, à la valeur $2\pi n$ près (cf. vol. 1, chap. IV, section IV.3). Calculons-le à l'aide de la formule (IX.34)

$$\arg \frac{w' - w}{z' - z} = \arg(w' - w) - \arg(z' - z)$$

Mais $\arg(w' - w)$ est l'angle β' que fait la corde ww' avec l'axe des réels du plan image, et $\arg(z' - z)$ est l'angle α' que fait la corde zz' avec l'axe des réels du plan des z .

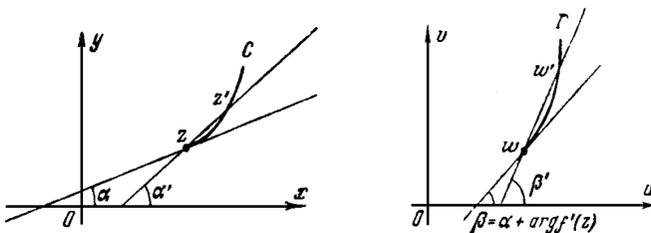


Figure IX.14 : Étude du comportement d'une fonction analytique près d'un point z et une courbe lisse C issue de z , dans le plan des $z = x + iy$, et leurs images dans le plan des $w = u + iv$.

Aux points z et w , si nous dénotons par α et β les angles des tangentes aux courbes respectives C et Γ (figure IX.14), alors

quand $z' \rightarrow z$

$$\alpha' \rightarrow \alpha, \quad \beta' \rightarrow \beta$$

D'où l'on déduit, en passant à la limite, que

$$\arg f'(z) = \beta - \alpha \quad (\text{IX.36})$$

Cette égalité montre que $\arg f'(z)$ est égal à l'angle ϕ dont il faut faire tourner la direction de la tangente à la courbe C au point z pour obtenir la direction de la tangente à la courbe Γ au point w . Pour cette raison, $\arg f'(z)$ est appelé la *rotation du mapping* effectuée au point z .

À l'aide de la formule (IX.36), la lectrice et le lecteur démontreront aisément les assertions suivantes.

Dans la transformation opérée par f du plan des z vers le plan des w , les tangentes à toutes les courbes issues d'un point z donné subissent une rotation du même angle.

Si C_1 et C_2 sont deux courbes issues du point z , et Γ_1 et Γ_2 les courbes correspondantes issues de w , alors l'angle entre Γ_1 et Γ_2 au point w est le même que celui entre C_1 et C_2 au point z .

Ainsi, dans un mapping effectué par une fonction analytique, en chaque point où $f'(z) \neq 0$, tous les éléments linéaires sont dilatés ou contractés avec le même changement d'échelle, et les angles entre les courbes, en leur point de croisement, sont préservés.

Les mappings ayant cette propriété sont appelés des mappings conformes ou des *transformations conformes*. (Dans le contexte de ce chapitre, nous utilisons les deux termes « mapping » et « transformation » de manière totalement synonyme.)

Au vu des propriétés géométriques des mappings qu'on vient de montrer, dans le voisinage des points où $f'(z_0) \neq 0$, il est naturel de s'attendre à ce que dans une petite région autour de z_0 le mapping soit biunivoque, c'est-à-dire qu'à chaque point près de z_0 corresponde un point et un seul près de w_0 (comme il se doit pour une fonction à valeur unique), mais aussi, du côté de l'image, que chaque point près de w_0

soit l'image d'un et d'un seul point près de z_0 . Autrement dit, f est localement bijective. Cela peut en effet être démontré rigoureusement.

Afin de mieux comprendre en quoi les transformations conformes se distinguent des autres sortes de transformations, il est utile de considérer une transformation quelconque dans un petit voisinage d'un point donné. Si nous regardons les premiers termes des développements de Taylor respectifs des fonctions réelles u et v , chacune dépendant des deux variables réelles x et y , nous obtenons, comme on l'a déjà vu plus haut,

$$u - u_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \dots \quad (8)$$

$$v - v_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \dots$$

Dans un petit voisinage du point x_0, y_0 où nous pouvons négliger les termes d'ordre supérieur, notre transformation va se comporter comme une transformation affine. C'est une transformation inversible si son déterminant est non nul

$$\Delta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 \neq 0$$

Si $\Delta = 0$, alors afin de comprendre le comportement du mapping dans le voisinage du point x_0, y_0 , il faut prendre en compte des termes d'ordre supérieur. Le mapping n'est plus même localement affine (cf. vol. 1 chap. III, section III.11).

Dans le cas où $u + iv$ est une fonction analytique, nous pouvons utiliser les conditions de Cauchy-Riemann pour exprimer les dérivées partielles par rapport à y en termes des dérivées partielles par rapport à x . Nous arrivons à l'expression intéressante suivante pour le déterminant :

$$\Delta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0^2 = \left|\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0\right|^2 = |f'(z_0)|^2$$

Autrement dit, le déterminant est le carré du module de la dérivée complexe, et donc le mapping est inversible quand

$f'(z_0) \neq 0$. Si nous posons $f'(z_0) = r(\cos \phi + i \sin \phi)$, alors

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 = r \cos \phi$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = -r \sin \phi$$

et le mapping, dans le voisinage du point (x_0, y_0) , a la forme

$$u - u_0 = r [(x - x_0) \cos \phi - (y - y_0) \sin \phi] + \dots \quad (9)$$

$$v - v_0 = r [(x - x_0) \sin \phi + (y - y_0) \cos \phi] + \dots$$

Ces formules montrent que dans le cas d'une fonction analytique $w = u+iv$ le mapping dans le voisinage du point (x_0, y_0) n'est autre qu'une rotation d'un angle ϕ et une homothétie d'un facteur r . En effet, les expressions entre crochets sont les formules habituelles en géométrie analytique pour une rotation dans le plan d'un angle ϕ (cf. vol. 1, chap.III, pp. 347-348) et le nombre r en facteur devant crée une dilatation ou contraction de cette échelle.

Pour aider à comprendre ce qui peut se passer dans le plan image aux points où $f'(z) = 0$, un éclairage est fourni par la fonction

$$w = z^n \quad (\text{IX.37})$$

La dérivée de cette fonction est $w' = nz^{n-1}$. Elle prend la valeur zéro pour $z = 0$. Ce mapping (IX.37) est mieux appréhendé en coordonnées polaires ou si l'on préfère à l'aide de la forme trigonométrique des nombres complexes. Soit

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (10)$$

$$w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Gardant à l'esprit, quand on multiplie des nombres complexes, que les modules sont multipliés et les arguments additionnés, nous obtenons

$$z^n = r^n(\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

et donc

$$\rho = r^n \tag{11}$$

$$\theta = n\phi$$

Par la seconde formule, nous voyons que le rayon $\phi = \text{const.}$ dans le plan des z va devenir le rayon $\theta = n\phi = \text{const.}$ dans le plan des w . Il s'ensuit qu'un angle α entre deux rayons dans le plan de départ est transformé en un angle $\beta = n\alpha$ dans le plan image. Il s'ensuit aussi que le mapping z^n du plan z vers le plan w n'est plus à valeur unique. En effet, un point donné w , de module ρ et d'argument θ , peut être obtenu comme l'image des n points ayant tous le même module $r = \sqrt[n]{\rho}$, mais la collection d'arguments

$$\phi = \frac{\theta}{n}, \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}(n-1)$$

En élevant à la puissance n , le module va devenir ρ , et l'argument deviendra l'un de ceux-ci

$$\theta, \theta + 2\pi, \dots, 2\pi(n-1)$$

Et puisque l'addition d'un multiple de 2π à son argument ne change pas la position géométrique d'un nombre complexe dans le plan d'Argand – ou même, plus simplement, ne change pas le nombre complexe –, toutes les images dans le plan des w vont coïncider.

Transformations conformes. Si la fonction analytique $w = f(z)$ transforme, par un mapping *biunivoque*, le domaine D du plan des z en le domaine Δ du plan des w , alors on dit que c'est une transformation conforme de D en Δ .

Le rôle des transformations conformes dans la théorie des fonctions complexes et ses applications découle du théorème trivial suivant.

Si $\zeta = F(w)$ est une fonction analytique sur le domaine Δ , alors la fonction composée $F[f(z)]$ est une fonction analytique sur le domaine D . Ce théorème découle de l'égalité

$$\frac{\Delta\zeta}{\Delta z} = \frac{\Delta\zeta}{\Delta w} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

Ayant à l'esprit que les fonctions $\zeta = F(w)$ et $w = f(z)$ sont analytiques, on en déduit que les deux facteurs du côté droit ont des limites, et par conséquent, en chaque point du domaine D , le ratio $\frac{\Delta\zeta}{\Delta z}$ a une limite bien définie $\frac{d\zeta}{dz}$. Cela démontre l'analyticité de la fonction $\zeta = F[f(z)]$.

Le théorème qu'on vient de prouver montre que l'étude des fonctions analytiques dans un domaine Δ peut être ramenée à l'étude des fonctions analytiques dans un domaine D . Si la structure géométrique de la région D est plus simple que celle de Δ , cela simplifie aussi l'étude de la fonction.

La classe la plus importante de domaines sur lesquels il convient d'abord d'étudier les fonctions analytiques est la classe des domaines dit simplement *simplement connexes*. Ce sont les domaines dont la frontière est d'un seul tenant (figure IX.15a), par opposition à ceux dont la frontière est en plusieurs morceaux (par exemple, figures IX.15b et 15c)

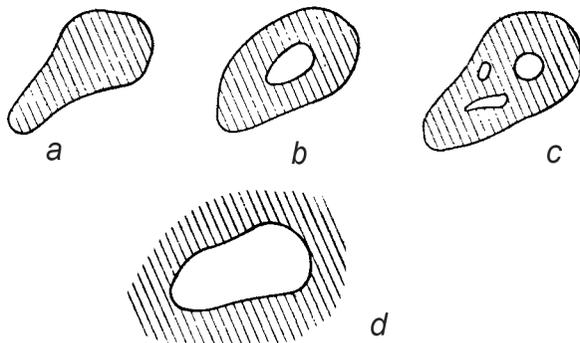


Figure IX.15 : Domaines présentant différents types de connectivité entre leurs points.

Noter qu'il est parfois nécessaire d'étudier des fonctions dans une région qui n'est pas à l'intérieur d'une frontière, mais à l'extérieur. Si la frontière d'une telle région est d'un seul tenant, la région est encore dite simplement connexe (figure IX.15d).

La théorie des transformations conformes est fondée sur le remarquable théorème suivant dû à Riemann.

Pour n'importe quelle région simplement connexe Δ , il est possible de construire une fonction analytique qui envoie de manière conforme le disque de rayon 1 centré à l'origine des coordonnées vers la région Δ , de telle sorte que le centre du disque soit envoyé vers n'importe quel point w_0 choisi à l'avance dans la région Δ , et un rayon arbitraire donné du disque soit transformé en une courbe partant du point w_0 dans une direction arbitraire. Ce théorème montre que l'étude des fonctions d'une variable complexe sur un domaine simplement connexe arbitraire peut être ramenée à l'étude des fonctions définies, par exemple, sur le disque unité.

Voyons comment, d'une manière générale, ce que l'on vient de dire peut être appliqué à la théorie d'une aile d'avion. Supposons que nous voulions étudier le flux d'air autour d'une aile d'avion de profil donné.

Si nous pouvons trouver une transformation conforme qui envoie la région du flux d'air externe au profil de l'aile vers la région en dehors du disque, alors l'expression construite précédemment pour la fonction caractéristique d'un flux autour du disque unitaire pourra être utilisée pour construire la fonction caractéristique du flux autour de l'aile.

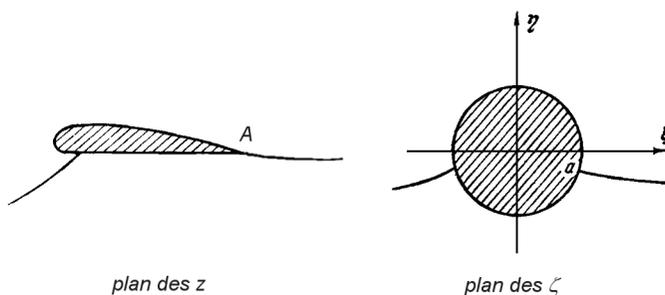


Figure IX.16 : Transformation de l'étude du flux autour de l'aile en l'étude d'un flux autour du disque unitaire.

Soit z les nombres complexes du plan du profil de l'aile, ζ les nombres complexes du plan du disque, et $\zeta = f(z)$ une

fonction complexe effectuant une transformation conforme de la région externe au profil de l'aile vers la région en dehors du disque unitaire. Et on a choisi f telle que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \zeta = \infty$$

Dénotons par A le point à la pointe aval du profil de l'aile et a le point correspondant sur le cercle. Et construisons autour du disque un flux à circulation dont le point où il quitte le disque est a (figure IX.16). Nous allons dénoter la fonction caractéristique de ce flux par $W(\zeta)$:

$$W(\zeta) = \Phi + i\Psi$$

Les lignes de courant de ce flux satisfont l'équation

$$\Psi = \text{const.}$$

Regardons maintenant la fonction

$$w(z) = W[f(z)]$$

et posons

$$w = \phi + i\psi$$

Démontrons que $w(z)$ est la fonction caractéristique d'un flux autour de l'aile d'avion, quittant l'aile au point A . Tout d'abord, le flux déterminé par la fonction $w(z)$ s'écoule-t-il bien en enveloppant le profil de l'aile? Pour le prouver, il faut montrer que le contour du profil est une ligne de courant, c'est-à-dire que sur le contour de l'aile on a :

$$\psi(x, y) = \text{const.}$$

Mais cela découle directement de ce que

$$\psi(x, y) = \Psi(\zeta, \eta)$$

et les points (x, y) sur le bord de l'aile correspondent aux points (ζ, η) sur le cercle, et sur le cercle ces derniers satisfont $\Psi(\zeta, \eta) = \text{constante}$.

On démontre aisément, de la même manière, que le point A est celui où le flux enveloppant l'aile la quitte. On peut aussi montrer qu'avec un choix approprié de la vitesse du flux incident rencontrant le cercle, il est possible d'obtenir un flux incident rencontrant l'aile d'avion ayant la vitesse qu'on veut.

Le rôle important des transformations conformes en théorie des fonctions et ses applications vient du problème de trouver des transformations conformes d'un domaine vers un autre pour des domaines de formes géométriques données. Dans nombre de cas fort simples, mais fort utiles, ce problème peut être résolu à l'aide de fonctions élémentaires d'une variable complexe. Cependant, même dans le cas général, on ne peut pas se passer des fonctions élémentaires. Comme on l'a dit plus haut, Riemann a énoncé un théorème général fondamental de la théorie des transformations conformes. Mais il n'en a pas donné de démonstration rigoureuse. Les efforts de nombreux mathématiciens de premier plan pendant des décennies furent nécessaires pour venir à bout de la preuve complète du théorème de Riemann.

En lien étroit avec les différentes approches pour démontrer le théorème de Riemann, des méthodes générales par approximation pour construire des transformations conformes ont été développées. La construction effective d'une transformation conforme d'une région vers une autre est parfois une tâche très difficile. Pour étudier un grand nombre des propriétés générales d'une fonction, il n'est toutefois pas nécessaire de connaître complètement la transformation conforme d'une région vers une autre ; il suffit souvent de connaître l'une ou l'autre de ses propriétés géométriques. Cela a conduit à une étude extensive des propriétés géométriques des transformations conformes. Afin de donner une idée de théorèmes de ce genre, voici la formulation de l'un d'entre eux.

Supposons que le disque de rayon 1 centré à l'origine dans le plan des z soit envoyé vers une région Δ dans le plan des w , et qu'à l'origine O dans z corresponde le point w_0 dans Δ (cf. figure IX.17).

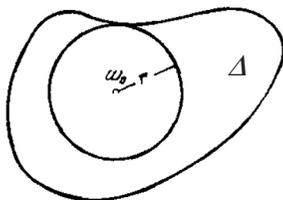


Figure IX.17 : Région Δ , image par une transformation conforme du disque de rayon 1 centré à l'origine dans le plan des z . Le cercle représenté aussi sur la figure est le plus grand possible centré en w_0 et entièrement contenu dans Δ . Son rayon est r .

Si nous considérons un mapping quelconque du disque unitaire vers Δ , nous ne pouvons pas dire grand chose sur son comportement au point $z = 0$. Mais pour les mappings conformes, le fait remarquable suivant est vrai.

La dilatation effectuée par le mapping conforme à l'origine du plan des z ne peut pas excéder quatre fois le rayon r du disque le plus grand possible centré en w_0 et entièrement contenu dans le domaine Δ du plan des w .

$$|f'(0)| \leq 4r$$

De nombreux travaux de mathématiciens soviétiques ont été consacrés à diverses questions de la théorie des transformations conformes. Ils obtinrent des formules exactes explicites pour beaucoup d'entre elles, investiguèrent des méthodes d'approximation numérique des transformations, et démontrèrent de nombreux théorèmes géométriques généraux relatifs aux transformations conformes.

Transformations quasiconformes. Les transformations conformes sont étroitement liées à l'étude des fonctions complexes analytiques, ou à l'étude des paires de fonctions réelles à deux variables satisfaisant les conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Dans beaucoup de problèmes de la physique mathématique, on rencontre des classes plus générales de systèmes d'équations différentielles, qui peuvent aussi être associées avec des mappings d'un plan vers un autre, qui ont certaines propriétés géométriques dans le voisinage de chaque point du plan Oxy . Pour clarifier cela, considérons l'exemple suivant de système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= p(x, y) \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -p(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{IX.38})$$

Si $p(x, y) = 1$, alors ce système se ramène au système de Cauchy-Riemann. Dans le cas général d'une fonction $p(x, y)$ arbitraire, nous pouvons aussi interpréter chaque solution du système (IX.38) comme un mapping du plan Oxy vers le plan Ouv . Regardons les propriétés géométriques de notre mapping dans le voisinage du point (x_0, y_0) . Pour cela, faisant l'hypothèse que le voisinage du point (x_0, y_0) est suffisamment petit, nous n'allons conserver que les premiers termes dans le développement des fonctions u et v en $x - x_0$ et $y - y_0$ et considérer le mapping comme affine

$$\begin{aligned} u - u_0 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 (y - y_0) \\ v - v_0 &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 (y - y_0) \end{aligned} \quad (\text{IX.39})$$

Si les fonctions u et v satisfont le système d'équations (IX.38), alors cette transformation affine a la propriété suivante.

Les ellipses centrées au point (x_0, y_0) dont les axes principaux sont parallèles aux axes de coordonnées, avec le ratio des demi-axes

$$\frac{b}{a} = p(x_0, y_0)$$

sont envoyées, dans le plan Ouv , vers des cercles concentriques autour de (u_0, v_0) .

Démonstrons-le. L'équation d'un cercle centré en (u_0, v_0) dans le plan Ouv est

$$(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 = \rho^2$$

Remplaçant dans cette équation les quantités $u - u_0$ et $v - v_0$ par leurs expressions en termes de x et y , nous obtenons l'équation de la courbe correspondante dans le plan Oxy

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0^2 \right] (x - x_0)^2 + \\ & + 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 \right] (x - x_0)(y - y_0) + \\ & + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0^2 \right] (y - y_0)^2 = \rho^2 \end{aligned}$$

Utilisons maintenant les équations (IX.38) pour exprimer les dérivées partielles de v en termes de celles de u . Nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0^2 + p^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0^2 \right] (x - x_0)^2 + \\ & + \frac{1}{p^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0^2 + p^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0^2 \right] (y - y_0)^2 = \rho^2 \end{aligned}$$

Et en posant

$$a = \frac{\rho}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0^2 + p^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0^2}}, \quad \text{et} \quad b = \frac{p\rho}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0^2 + p^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0^2}}$$

l'équation se réécrit

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Nous avons ainsi montré que la courbe qui se transforme en un cercle centré en (u_0, v_0) est bien une ellipse centrée en (x_0, y_0) et dont les demi-axes sont dans le rapport p .

Si nous considérons non plus la transformation affine définie par les premiers termes de l'expansion de Taylor, mais celle exacte, alors la propriété trouvée pour la transformation sera d'autant plus précise que l'ellipse sera plus petite.

On peut dire que cette propriété est vraie pour des ellipses infinitésimales.

Ainsi, les équations (IX.38) déterminent en chaque point du plan des z une ellipse infinitésimale de ratio de demi-axes et de directions donnés qui se transforme, dans le plan des w , en un cercle infinitésimal. On peut montrer, réciproquement, que cette propriété géométrique caractérise totalement le système d'équations différentielles (IX.38), autrement dit, si les fonctions u et v effectuent un mapping ayant cette propriété géométrique, alors elles satisfont le système. Par conséquent, l'étude des solutions des systèmes d'équations (IX.38) est équivalente à l'étude des mappings qui ont la propriété qu'on vient de décrire.

Observons, en particulier, que pour les équations de Cauchy-Riemann cette propriété se reformule ainsi : un cercle infinitésimal centré au point (x_0, y_0) est envoyé vers un cercle infinitésimal centré au point (u_0, v_0) .

Une vaste classe d'équations de la physique mathématique se ramènent à l'étude des mappings qui ont les propriétés géométriques suivantes :

Pour chaque point (x, y) du plan des arguments sont spécifiés les directions et le ratio des demi-axes de deux familles d'ellipses. Il faut construire une transformation du plan Oxy vers le plan Ouv telle que les ellipses infinitésimales de la première famille dans le plan des arguments se transforment en les ellipses infinitésimales de la seconde famille, centrées en (u, v) , dans le plan des images.

La considération des transformations associées à de tels systèmes généraux d'équations a été introduite le mathématicien soviétique M. A. Lavrentiev.²⁰ Ces mappings sont appelés *quasiconformes*. L'idée d'étudier les mappings définis par des systèmes d'équations différentielles permet d'étendre les méthodes de la théorie des fonctions analytiques à une vaste classe de problèmes. M. A. Lavrentiev et ses étudiants ont investigué les mappings quasiconformes. Leurs travaux ont de nombreuses applications dans les problèmes de la physique mathématiques, ainsi qu'en mécanique et en géométrie. Il est intéressant de noter que l'étude des mappings quasiconformes s'est avérée, en retour, très fructueuse pour la théorie des fonctions analytiques elle-même.

Nous ne pouvons bien sûr pas présenter ici toutes les applications des méthodes géométriques dans la théorie des fonctions d'une variable complexe.

IX.4 Intégrales curvilignes. Formule de Cauchy et ses conséquences

Intégrales des fonctions d'une variable complexe. Dans l'étude des propriétés des fonctions analytiques, le concept d'intégrale d'une fonction d'une variable complexe joue un rôle très important. Une des extensions du concept d'intégrale définie d'une fonction d'une variable réelle est le concept d'intégrale d'une fonction d'une variable complexe le long d'une courbe dans le plan d'Argand (voir vol. 1, chap. II, section II.13 généralisation du concept d'intégrale).

20. Mikhaïl A. Lavrentiev (1900-1980) – l'un des éditeurs et auteurs du présent ouvrage – était le directeur de thèse de Mstislav V. Keldych (1911-1978). M. V. Keldych fut élu à l'Académie des sciences d'URSS en 1946. Il la présida de 1961 à 1975. En 1946 aussi, M. V. Keldych fut nommé à la tête du NII-I, un des organismes participant à la conception de chasseurs bombardiers, de missiles et de fusées, qui sont globalement à l'origine du programme spatial soviétique dirigé par Sergueï P. Korolev (1907-1966) et dans lequel Keldych joua un rôle majeur. Les responsabilités et travaux concrets de ces scientifiques et de nombreux autres aboutirent au lancement du satellite Spoutnik en 1957 et au premier vol orbital habité de Youri Gagarine en 1961.

Sur un arc de courbe, marquons une collection de points le divisant en petits éléments (figure IX.18)

$$z_0, z_1, \dots, z_n = z$$

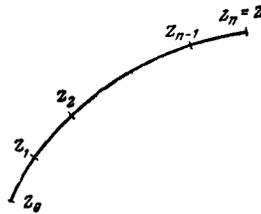


Figure IX.18 : Construction de l'intégrale d'une fonction d'une variable complexe le long d'un arc de courbe dans le plan complexe.

Et considérons la somme

$$S = \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1})$$

Si la fonction $f(z)$ est continue, et l'arc C a une longueur finie, alors, de manière analogue à ce qu'on a fait pour les fonctions réelles, on établit qu'à mesure que le nombre n de points de division augmente et la longueur maximale entre deux points adjacents diminue vers zéro, la somme S a une limite bien définie. Cette limite s'appelle *l'intégrale le long de l'arc de courbe C* , ou le long du « chemin » C , et est notée

$$\int_C f(z) dz$$

Noter, quand nous définissons l'intégrale, que nous choisissons le point initial et le point final de l'arc de courbe C , ou, dit autrement, nous choisissons une certaine direction de progression le long de C .

Il est aisé de prouver toute une série de propriétés simples de l'intégrale :

1. L'intégrale de la somme de deux fonctions est égale à la somme des intégrales de chacune d'elles

$$\int_C [f(z) + g(z)] dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz$$

2. Un facteur multiplicatif constant sous le signe somme peut être sorti

$$\int_C Af(z) dz = A \int_C f(z) dz$$

3. Si l'arc C est la mise bout à bout de C_1 et C_2

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

4. Si \bar{C} dénote le chemin C parcouru dans l'autre sens

$$\int_{\bar{C}} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

Toutes ces propriétés sont clairement vraies pour les sommes finies qui servent à construire les intégrales. Elles le restent donc quand on passe à la limite du découpage de l'arc de courbe²¹.

5. Si l'arc C a la longueur L et sur cet arc la fonction est bornée, c'est-à-dire que son module satisfait

$$|(f(z))| \leq M$$

21. On peut toujours intervertir une somme discrète *finie* et une intégrale. C'est quand on considère l'intégrale d'une somme discrète infinie dénombrable que le problème se pose, car alors on a affaire à *deux opérateurs limites différents* en même temps : un pour le découpage de C , l'autre pour la somme dénombrable. Selon les cas, on peut inverser le signe $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n f_i$ et \int_C ou pas. Il faut chaque fois regarder les circonstances. En particulier, si la convergence des sommes de f_i est uniforme sur C on peut (cf. vol.1, chap. II, section II.14 sur les séries, p. 296).

alors

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$$

Démontrons cette dernière propriété. Il suffit de prouver l'inégalité pour n'importe quelle somme S portant sur un nombre fini de termes, car alors elle restera forcément vraie quand on passera à la limite avec un découpage de plus en plus fin. Pour une somme S , servant à construire l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} |S| &= \left| \sum f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \right| \leq \sum |f(z_k)| |z_k - z_{k-1}| \leq \\ &\leq M \sum |z_k - z_{k-1}| \end{aligned}$$

Mais la somme en facteur dans cette dernière expression est la longueur de la ligne brisée formée par les n segments entre les points z_0 et z_n inscrits sur l'arc de courbe C . Comme on sait, cette longueur ne peut pas être plus grande que celle de l'arc de courbe (qui en est du reste la limite). Par conséquent

$$|S| \leq ML$$

Regardons l'intégrale de la fonction la plus simple qui soit, $f(z) = 1$. Manifestement dans ce cas

$$S = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \dots + (z_n - z_{n-1}) = z_n - z_0 = z - z_0$$

Cela montre que

$$\int_C 1 \cdot dz = z - z_0$$

Ce résultat – élémentaire mais important – établit que pour la fonction d'une variable complexe $f(z) = 1$, la valeur de l'intégrale reste la même sur tous les arcs de courbe joignant les deux points donnés z_0 et z . Autrement dit, la valeur de l'intégrale de $f(z) = 1$ sur C ne dépend pas du chemin mais seulement de ses deux extrémités.

Cependant, il est facile de vérifier que cette propriété n'est pas vraie pour n'importe quelle fonction d'une variable complexe. Par exemple, si $f(z) = x$, c'est-à-dire la partie réelle de $z = x + iy$, alors un simple calcul montre que

$$\int_{C_1} x dz = \frac{x^2}{2} + iyx, \quad \text{mais} \quad \int_{C_2} x dz = \frac{x^2}{2}$$

où C_1 et C_2 sont les deux chemins distincts montrés sur la figure IX.19.

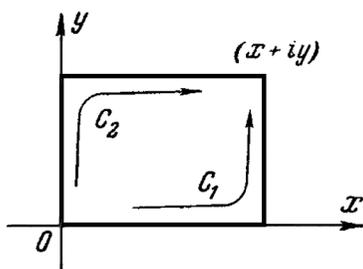


Figure IX.19 : Deux chemins d'intégration différents de la fonction $f(z) = x$ entre les mêmes points 0 et $x + iy$ produisant deux valeurs différentes de l'intégrale.

Nous laissons à la lectrice et au lecteur le soin d'établir les égalités ci-dessus.

Le théorème suivant dû à Cauchy est un résultat remarquable de la théorie des fonctions analytiques :

Si $f(z)$ est analytique en tous les points d'un domaine simplement connexe D , alors les intégrales sur tous les chemins reliant deux points quelconques donnés z_0 et z dans le domaine ont la même valeur.

Nous n'allons pas donner ici la démonstration du théorème de Cauchy. Nous renvoyons ceux intéressés à n'importe quel manuel universitaire sur la théorie des fonctions d'une variable complexe²². Nous allons présenter ici seulement les

22. La démonstration du théorème de Cauchy est du même niveau mathématique que le présent chapitre. On pourra se reporter à l'ouvrage classique de Walter Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 2009.

conséquences les plus importantes de ce théorème.

Tout d'abord, le théorème de Cauchy permet d'introduire la notion d'intégrale indéfinie d'une fonction analytique, quand celle-ci l'est sur tout un domaine simplement connexe. En effet, fixons le point z_0 et regardons l'intégrale le long d'un chemin allant de z_0 à z :

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

Étant donné que dans ce cas on peut effectuer l'intégrale le long de n'importe quel chemin joignant z_0 à z sans changer sa valeur, cette expression définit sans ambiguïté une fonction de la variable indépendante complexe z . La fonction $F(z)$ est appelée l'*intégrale indéfinie* de $f(z)$.

L'intégrale indéfinie de $f(z)$ est différentiable sur tout le domaine de définition de f , qui est aussi celui de l'intégrale indéfinie, et sa dérivée est $f(z)$.

Dans de nombreuses applications, une formulation légèrement différente, équivalente, du théorème de Cauchy est plus commode.

Soit $f(z)$ une fonction différentiable, ou si l'on préfère analytique, en tous les points d'un domaine simplement connexe, alors son intégrale le long de n'importe quelle boucle fermée Γ , entièrement contenue dans le domaine, a pour valeur zéro :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

On le voit tout de suite, puisqu'une boucle fermée revient à son point de départ et donc z_0 et z peuvent aussi être reliés par un chemin de longueur nulle.

Dans la suite, par un contour fermé nous entendrons une boucle Γ parcourue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, appelé aussi « sens positif ». Quand nous voudrions parler de la boucle parcourue dans le sens des aiguilles d'une montre, nous écrirons $\bar{\Gamma}$.

Intégrale de Cauchy. Ce qui vient d'être dit nous permet d'établir la très importante formule de Cauchy. Considérons une fonction $f(z)$ différentiable en tous les points d'un domaine ouvert simplement connexe D . Dans ce domaine, considérons une boucle fermée C . Alors on peut donner une expression de la valeur que prend la fonction f en chaque point z à l'intérieur de C à l'aide de ses valeurs sur la boucle C elle-même :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Donnons la démonstration de cette formule. Soit une valeur fixe de la variable indépendante z , à l'intérieur de C , et ζ une autre variable indépendante, qui va servir de variable muette d'intégration. La fonction de ζ sous le signe somme

$$\phi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

est continue et différentiable en chaque point ζ à l'intérieur du domaine D , sauf au point $\zeta = z$, où le dénominateur s'annule. Pour cette raison nous ne pouvons pas appliquer le théorème de Cauchy à la fonction $\phi(\zeta)$ sur le contour C .

Considérons le cercle K_ρ centré au point z , de rayon ρ , et montrons tout d'abord que

$$\int_C \phi(\zeta) d\zeta = \int_{K_\rho} \phi(\zeta) d\zeta \quad (\text{IX.40})$$

Pour cela, construisons un contour fermé auxiliaire Γ_ρ , consistant en le contour C , le cercle \overline{K}_ρ , parcouru dans le sens opposé et un petit segment γ_ρ parcouru dans un sens puis dans l'autre joignant les deux courbes comme montré sur la figure IX.20. Le contour Γ_ρ est montré avec les flèches. Puisque le point $\zeta = z$ est à l'extérieur du contour Γ_ρ , celui-ci et son intérieur sont entièrement contenus dans une partie du domaine D où la fonction $\phi(\zeta)$ est partout différentiable.

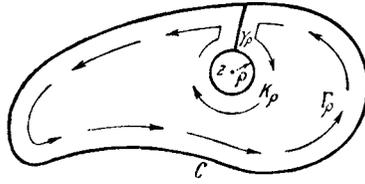


Figure IX.20 : Contour auxiliaire, sur lequel on peut appliquer le théorème de Cauchy, afin de démontrer la formule de Cauchy.

Par conséquent, en vertu du théorème de Cauchy,

$$\int_{\Gamma_\rho} \phi(\zeta) d\zeta = 0 \quad (\text{IX.41})$$

Mais le contour Γ_ρ est formé des quatre parties : C , γ_ρ , \overline{K}_ρ et $\overline{\gamma}_\rho$. D'après la 3^e des propriétés listées page 350 on peut décomposer l'intégrale sur Γ_ρ en quatre intégrales

$$\int_{\Gamma_\rho} \phi(\zeta) d\zeta = \int_C \phi(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma_\rho} \phi(\zeta) d\zeta + \int_{\overline{K}_\rho} \phi(\zeta) d\zeta + \int_{\overline{\gamma}_\rho} \phi(\zeta) d\zeta = 0$$

Remplaçant les intégrales sur \overline{K}_ρ et $\overline{\gamma}_\rho$ par celles sur K_ρ et γ_ρ , en changeant leur signe d'après la 4^e propriété, nous obtenons

$$\int_{\Gamma_\rho} \phi(\zeta) d\zeta = \int_C \phi(\zeta) d\zeta - \int_{K_\rho} \phi(\zeta) d\zeta = 0$$

ce qui démontre la formule (IX.40).

Maintenant calculons la valeur de l'expression du côté droit dans la formule (IX.40). Posons

$$\begin{aligned} \int_{K_\rho} \phi(\zeta) d\zeta &= \int_{K_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{K_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{K_\rho} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \\ &= \int_{K_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + f(z) \int_{K_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \end{aligned} \quad (\text{IX.42})$$

Regardons pour commencer le second terme. Sur le cercle K_ρ

$$\zeta = z + \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Gardant à l'esprit que z et ρ sont constants, nous obtenons

$$d\zeta = \rho (-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta = i\rho (\cos \theta + i \sin \theta) d\theta$$

et, en outre,

$$\zeta - z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

par conséquent

$$\int_{K_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{K_\rho} i d\theta = 2\pi i$$

puisque l'intégrale de $d\theta$ sur un tour complet donne 2π . Nous fondant sur (IX.40) et (IX.42) nous avons donc

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z) + \int_{K_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

Nous allons maintenant passer à la limite en faisant tendre ρ vers 0. Le terme du côté gauche et le premier terme du côté droit restent inchangés car ils ne dépendent pas de ρ . Il nous reste à montrer que la limite du second terme à droite est égale à zéro. Alors quand $\rho \rightarrow 0$ notre égalité va devenir la formule de Cauchy.

Pour montrer que le second terme à droite tend vers zéro quand $\rho \rightarrow 0$, notons que

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = f'(\zeta)$$

c'est-à-dire que sous le signe somme l'intégrande a une limite finie et par conséquent est borné. Dès que ρ est suffisamment petit, on peut écrire que pour tout ζ

$$\left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| < M$$

Alors, d'après la 5° propriété listée précédemment p. 350, l'intégrale satisfait

$$\left| \int_{K_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq M2\pi\rho \rightarrow 0$$

Cela achève la démonstration de la formule de Cauchy. Cette formule est l'un des principaux outils d'investigation dans la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Expansion en séries entières des fonctions différentiables. Mettons à profit la formule de Cauchy pour établir deux propriétés fondamentales des fonctions différentiables d'une variable complexe.

Toute fonction d'une variable complexe qui a une dérivée première dans un domaine D^{23} y a des dérivées de tous les ordres.

En effet, à l'intérieur d'un contour fermé, notre fonction est exprimée par l'intégrale de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Sous le signe somme, il y a une fonction différentiable de z ; par conséquent, en différentiant sous le signe somme – qui ici se justifie –, nous obtenons :

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

À nouveau, sous le signe somme, il y a une fonction différentiable de z ; par conséquent, en différentiant sous le signe somme, nous obtenons :

23. Quand on ne précise pas, on parle d'un domaine ouvert, généralement simplement connexe, mais ici ce n'est pas nécessaire. Et la propriété dont on parle est pour tous les points du domaine. Un domaine ouvert a la propriété topologique suivante : quand on est en un point z_0 du domaine, il y a toujours un disque de rayon non nul autour de z_0 qui est entièrement dans le domaine.

$$f''(z) = \frac{1 \cdot 2}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta$$

En continuant à différentier, nous obtenons la formule générale :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

Ainsi nous pouvons calculer une dérivée de n'importe quel ordre. Pour rendre la preuve totalement rigoureuse, il faudrait aussi montrer que le transfert de la différentiation de l'extérieur à l'intérieur du signe somme est légitime dans le contexte où nous l'avons effectué. Nous n'allons pas consacrer de temps à cette preuve que le lecteur et la lectrice trouveront dans n'importe quel manuel élémentaire d'analyse.

La deuxième propriété fondamentale est la suivante :

Si la fonction d'une variable complexe $f(z)$ est partout différentiable sur un disque K centré au point a , alors $f(z)$ peut être développée en la série entière de Taylor

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^{n+1} + \dots$$

convergente sur le disque K .

Dans la section IX.1, nous avons défini les fonctions *analytiques* d'une variable complexe comme les fonctions d'une variable complexe qu'on peut développer en série entière. Le théorème ci-dessus énonce que toute fonction d'une variable complexe qui est différentiable est analytique. C'est une propriété spéciale des fonctions d'une variable complexe qui n'a pas d'analogue dans le domaine réel²⁴. Une fonction d'une

24. Autrement dit, la propriété d'être différentiable pour une fonction d'une variable complexe est une propriété beaucoup plus forte que dans le domaine réel. On a vu qu'elle est équivalente à la satisfaction des conditions de Cauchy-Riemann. Si la dérivée est non nulle, cela impose à la fonction d'une variable complexe non seulement d'être géométriquement très lisse, mais aussi de se comporter localement comme une rotation et homothétie du plan complexe vers le plan complexe. Cela découle directement de l'examen de son développement de Taylor.

variable réelle qui a une dérivée première peut n'avoir nulle part de dérivée seconde.

Démontrons le second théorème ci-dessus.

Soit une fonction $f(z)$ ayant une dérivée en tout point à l'intérieur et sur la frontière d'un disque K centré au point a . Alors pour tout point z à l'intérieur de K la fonction $f(z)$ peut s'exprimer à l'aide de l'intégrale de Cauchy sur le cercle C délimitant K

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\text{IX.43})$$

Écrivons $\zeta - z$ sous la forme

$$\zeta - z = (\zeta - a) - (z - a)$$

alors

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} \quad (\text{IX.44})$$

Gardant à l'esprit que le point z est à l'intérieur du disque, et la variable d'intégration ζ sur le cercle qui le délimite, on a l'inégalité

$$\left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| < 1$$

Donc, en utilisant la formule de la progression géométrique valable quand l'argument a un module plus petit que 1, on a

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = 1 + \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right) + \dots + \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n + \dots \quad (\text{IX.45})$$

La série du côté droit converge. En utilisant (IX.44) et (IX.45) on peut écrire la formule (IX.43) sous la forme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + (z - a) \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} + \dots \right. \\ \left. \dots + (z - a)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} + \dots \right] d\zeta$$

Nous allons maintenant effectuer l'intégration terme à terme sur la série entre crochets. La légalité de cette opération d'inversion de la limite des sommes partielles d'une série (car c'est ainsi qu'est définie une série) et d'une intégrale (qui est elle aussi, on se rappelle, définie comme une limite) peut être justifiée rigoureusement. Alors, dans la série d'intégrales obtenues, en sortant les monômes en $z - a$ qui ne dépendent pas de ζ de sous les signes sommes, on arrive à

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - a} + \frac{z - a}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^2} + \dots$$

$$\dots + \frac{(z - a)^n}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} + \dots$$

Utilisons maintenant l'expression intégrale obtenue pour la dérivée n -ième de f (en haut de la page 358, deuxième formule). Cela permet d'exprimer le facteur multipliant le monôme $(z - a)^n$ dans la série entière sous la forme

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

On arrive finalement à

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \dots$$

Nous avons démontré que les fonctions d'une variable complexe, quand elles sont différentiables, sont développables en série entière. Réciproquement, les fonctions représentables en série entière sont différentiables. Leurs dérivées peuvent être obtenues en différentiant terme à terme leurs séries (la validité de cette opération peut être justifiée rigoureusement).

Terminologie : une fonction analytique sur tout un domaine ouvert est dite *holomorphe* sur ce domaine. Dans ce chapitre nous n'utilisons pas ce vocable, nous contentant de parler de fonctions analytiques, c'est-à-dire développables en série entière, et donc aussi différentiables.

Fonctions entières. Une série entière d'argument $z - a$ donne une représentation analytique d'une fonction seulement sur un certain disque centré en a . Ce disque a un rayon égal à la distance de a au point le plus proche où la fonction perd son analyticité – un point où la fonction a une singularité.

Parmi les fonctions analytiques, on distingue naturellement la classe de celles qui sont analytiques pour toutes les valeurs finies de l'argument. Ce sont les fonctions représentables en une série entière convergeant pour toutes les valeurs de z . On les appelle les *fonctions entières de z* . Si nous regardons l'expansion autour de l'origine, alors la fonction entière sera exprimée par une série de la forme

$$G(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n + \dots$$

Si dans cette série tous les coefficients, à partir d'un certain rang, n'annulent, alors la fonction est juste un polynôme ou ce qu'on appelle aussi une fonction entière *rationnelle*.

$$P(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$$

Si, par contre, il y a une infinité de coefficients non nuls dans l'expansion, alors la fonction entière est dite *transcendante*. Voici des exemples de ces dernières

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (13)$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \quad (14)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

Quand on travaille avec des polynômes, une question fréquemment importante est de savoir où se trouvent les racines de l'équation

$$P(z) = 0$$

Plus généralement, on peut aussi se poser la question de savoir où le polynôme prend une valeur donnée A

$$P(z) = A$$

Le théorème fondamental de l'algèbre supérieure énonce que n'importe quel polynôme à coefficients réels ou complexes prend une valeur quelconque A donnée en au moins un point du plan complexe (cf. vol. 1, chap. IV, section IV.3). Cette propriété n'est plus vraie pour une fonction entière quelconque. Par exemple la fonction exponentielle $w = e^z$ ne prend nulle part la valeur zéro quand la variable indépendante z parcourt le plan complexe. Toutefois le théorème suivant dû à Picard²⁵ est vrai : toute fonction entière prend n'importe quelle valeur arbitraire donnée un nombre infini de fois, sauf au maximum une valeur donnée.

La question du lieu des points dans le plan où une fonction entière prend une valeur A donnée est l'une des questions centrales de la théorie des fonctions entières. Une autre question est le comportement de la fonction quand $|z| \rightarrow \infty$. Pour l'aborder commençons par examiner les polynômes.

Le nombre de racines d'un polynôme est égal à son degré. Et le degré d'un polynôme est étroitement lié au taux de croissance de $|P(z)|$ quand $|z| \rightarrow \infty$. En effet, on peut écrire

$$|P(z)| = |z|^n \cdot \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right|$$

Puisqu'à droite le second facteur tend vers $|a_n|$ quand $z \rightarrow \infty$, un polynôme de degré n , pour les grandes valeurs de l'argument²⁶, se comporte comme son monôme de plus haut degré $a_n z^n$. Ainsi on voit que plus le degré n d'un polynôme est élevé, d'une part plus rapide est la croissance de $|P_n(z)|$ quand $|z| \rightarrow \infty$, et d'autre part plus le polynôme a de racines.

Il se trouve qu'un phénomène comparable s'observe pour les fonctions entières (c'est-à-dire – on le rappelle – analytiques sur tout le plan complexe). Évidemment, pour une fonction entière $f(z)$, généralement parlant, le nombre de racines est infini, par conséquent la question de leur nombre n'a

25. Émile Picard (1856-1941), mathématicien français spécialiste de l'analyse avec des fonctions à variables complexes.

26. Quand on parle d'un « grand nombre complexe », on veut naturellement dire « en module », puisqu'il n'y a pas d'ordre au sein de \mathbb{C} , ou si l'on préfère dans le plan, comme il y a en un au sein de \mathbb{R} .

pas de sens. Néanmoins on peut considérer le nombre $n(r, a)$ de racines de l'équation

$$f(z) = a$$

contenues dans le disque de rayon r , car ce nombre est fini (globalement sur tout le plan il est au plus dénombrable). Et on peut étudier comment il varie quand r augmente.

Le taux de croissance de $n(r, a)$ s'avère être lié au taux de croissance de la fonction $M(r)$ définie comme le maximum du module de la fonction entière sur le disque de rayon r . On l'a déjà mentionné, pour une fonction entière il peut exister une valeur exceptionnelle a pour laquelle l'équation $f(z) = a$ n'a aucune solution. Pour toutes les autres valeurs de a le taux de croissance du nombre $n(r, a)$ est comparable au taux de croissance de $M(r)$. Nous n'avons pas la possibilité de donner ici plus de détails sur ces phénomènes.

Les propriétés de la distribution des racines d'une fonction entière sont liées à des questions en théorie des nombres. L'étude de cette distribution a permis en particulier d'établir un grand nombre de propriétés importantes de la célèbre fonction zêta de Riemann, dénotée $\zeta(s)$ (cf. chapitre X consacré à la théorie des nombres). Et les propriétés de cette fonction zêta sont à la base de la démonstration de nombreux théorèmes sur les nombres premiers.

Fonctions fractionnaires ou méromorphes. La classe des fonctions entières peut être vue comme une extension naturelle de la classe des fonctions polynomiales, appelées encore polynômes algébriques. Par ailleurs, à partir des polynômes algébriques, on construit la classe des fonctions appelées fractions rationnelles

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

formées en prenant le ratio de deux polynômes.

Alors en prenant le ratio de deux fonctions entières au lieu de celui de deux polynômes on crée de manière naturelle une nouvelle classe de fonctions. Soit $G_1(z)$ et $G_2(z)$ deux

fonctions entières, la fonction $f(z)$ définie par

$$f(z) = \frac{G_1(z)}{G_2(z)}$$

est appelée une fonction *fractionnaire* ou *méromorphe*²⁷. La classe des fonctions obtenues de cette manière joue un rôle important en analyse mathématique. Au sein des fonctions élémentaires d'une variable complexe se trouvent des fonctions méromorphes, par exemple

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Les fonctions méromorphes ne sont plus analytiques sur l'ensemble du plan complexe. Là où le dénominateur $G_2(z)$ s'annule, la fonction $f(z)$ devient infinie. Les racines de $G_2(z)$ forment une collection de points isolés dans le plan. En ces points, la fonction $f(z)$, naturellement, n'a pas de développement de Taylor. Cependant, en un point a où le dénominateur s'annule, la fonction méromorphe a un développement en « série entière » comprenant aussi quelques puissances négatives de l'argument $(z - a)$:

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + \\ + C_1(z-a) + \dots + C_n(z-a)^n + \dots \quad (\text{IX.46})$$

À mesure que z s'approche de a , la valeur de $f(z)$ s'accroît sans limite. Un point isolé où une fonction analytique

27. En mathématiques, chaque fois qu'on crée un nouvel objet en appliquant deux opérateurs l'un après l'autre, se pose la question de ce que donnerait l'application des opérateurs dans l'ordre inverse. Par exemple dans ce chapitre on a souvent inversé l'ordre d'une intégration et du calcul de la limite des sommes partielles d'une série, et utilisé le fait que dans des conditions très générales ça donnait la même chose. On a fait de même avec la différentiation et la limite des sommes partielles d'une série. Pour ce qui est des fonctions méromorphes, la construction consiste à passer dans l'ordre 1) des polynômes aux séries entières, puis 2) d'expressions simples à ratio d'expressions. En physique quantique, l'ordre des opérateurs joue aussi un rôle fondamental.

tend vers l'infini s'appelle un *point singulier* ou une *singularité* ou encore un *pôle* de la fonction. La perte d'analyticité de la fonction au point a est due à la présence de termes avec des puissances négatives de $z - a$ dans l'expression (IX.46). L'expression

$$\frac{C_{-m}}{(z - a)^m} + \dots + \frac{C_{-1}}{z - a}$$

détermine le comportement de la fonction méromorphe dans le voisinage de son pôle a . Elle porte le nom de *partie principale* de l'expansion (IX.46) au pôle a . Une fonction méromorphe a une collection de pôles, qui est soit finie soit dénombrable. La fonction a une expansion de la forme (IX.46) en chacun de ses pôles, et son comportement dans leurs voisinages est déterminé par ses parties principales respectives. Dans de nombreux cas, si on connaît la partie principale de la fonction méromorphe en chacun de ses pôles, on peut construire une expression explicite de la fonction.

Cas des fractions rationnelles. Par exemple, si la fonction $f(z)$ est une fraction rationnelle²⁸ et tend vers zéro quand z tend vers l'infini, alors elle est égale à la somme des parties principales de son expansion près de chacun de ses pôles – dont le nombre est bien sûr fini pour les fractions rationnelles :

$$f(z) = \sum_{(k)} \left[\frac{C_{-m_k}^{(k)}}{(z - a_k)^{m_k}} + \dots + \frac{C_{-1}^{(k)}}{z - a_k} \right]$$

Dans le cas général d'une fraction rationnelle (i.e. si elle ne tend pas nécessairement vers zéro quand z tend vers l'infini), elle peut être représentée par la somme de toutes ses parties principales plus un certain polynôme

$$f(z) = \sum_{(k)} \left[\frac{C_{-m_k}^{(k)}}{(z - a_k)^{m_k}} + \dots + \frac{C_{-1}^{(k)}}{z - a_k} \right] + C_0 + C_1 z + \dots + C_m z^m \tag{IX.47}$$

28. C'est-à-dire, si elle est le ratio de deux fonctions entières rationnelles, ou si l'on préfère de deux polynômes algébriques.

La formule (IX.47) donne, pour une fraction rationnelle, une expression dans la construction de laquelle apparaît clairement le rôle joué par les points singuliers de la fonction. L'expression (IX.47) pour une fraction rationnelle est très commode dans les nombreuses applications où elles interviennent. Cette expression présente aussi un grand intérêt pour révéler comment les singularités d'une fonction déterminent l'ensemble de sa structure.

Cas général des fonctions méromorphes. Il se trouve que, de manière analogue à ce qui se passe pour les fractions rationnelles, n'importe quelle fonction méromorphe peut être construite à l'aide des parties principales de ses pôles. Nous donnons l'expression analogue, à titre d'exemple sans démonstration, pour la fonction $\cot z$. Les pôles de la fonction $\cot z$ sont les racines de l'équation

$$\sin z = 0$$

Ce sont les nombres complexes suivants, qui ont tous une partie imaginaire nulle,

$$\dots, -k\pi, \dots, -\pi, 0, \pi, \dots, k\pi, \dots$$

On peut montrer que la partie principale de l'expansion de la fonction $\cot z$ en « série entière » au pôle $z = k\pi$ est

$$\frac{1}{z - k\pi}$$

et que la fonction $\cot z$ est égale à la somme de ses parties principales respectives en chaque pôle

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right] \quad (\text{IX.48})$$

L'expansion d'une fonction méromorphe en une série de parties principales est remarquable en ceci que d'une part les points singuliers de la fonction sont exprimés explicitement dans la série et que d'autre part cette représentation analytique permet de calculer la fonction sur l'ensemble du domaine où elle est définie.

La théorie des fonctions méromorphes a fourni le socle pour l'étude de nombreuses classes de fonctions très importantes en analyse. Il faut souligner son rôle primordial dans la théorie des équations de la physique mathématique. La création de la théorie des équations intégrales, qui a permis de répondre à plusieurs questions centrales dans la théorie des équations de la physique mathématique, s'est largement appuyée sur les résultats les plus importants de la théorie des fonctions méromorphes.

Depuis lors, un chapitre important de l'analyse fonctionnelle a aussi été développé, qui est étroitement lié à la physique mathématique – la théorie des opérateurs. Et il s'appuie lui-même souvent sur des résultats de la théorie des fonctions analytiques.

Sur la représentation analytique des fonctions. Nous avons vu plus haut que dans le voisinage de n'importe quel point a où la fonction est définie et différentiable, elle peut être représentée à l'aide d'une série entière en $z - a$ (c'est-à-dire une série de puissances de $z - a$), et celle-ci est aussi sa série de Taylor en a . Pour une fonction entière, la série de puissances converge pour toutes les valeurs de z dans le plan complexe et donne une expression analytique pour la fonction partout. Dans le cas où la fonction n'est pas entière, la série de Taylor en $z - a$, comme nous le savons, converge seulement sur un certain disque autour de a , et le cercle qui délimite sa frontière passe par le point singulier de la fonction le plus proche de a . Ainsi, la série de puissances ne permet pas de calculer la fonction partout où elle est définie, et donc la fonction analytique ne peut pas être spécifiée sur l'ensemble de son domaine de définition par une seule et même série entière. Pour une fonction méromorphe, une expression analytique de la fonction sur l'ensemble de son domaine de définition est donnée par une expansion avec une partie principale.

Si la fonction n'est pas entière, mais est définie sur un certain disque, ou bien si nous avons une fonction définie sur un certain domaine, mais ne voulons l'étudier que sur un certain

disque, alors sa série de Taylor peut servir pour la représenter. Mais dans le cas où nous étudions une fonction sur un domaine d'une autre forme qu'un disque, la question se pose de trouver une expression analytique pour la fonction, qui convienne pour la représenter sur tout le domaine. Une série entière, qui donne une expression pour une fonction analytique sur un disque, est construite à l'aide des polynômes les plus simples, de la forme $a_n z^n$ ou $a_n (z - a)^n$. Une question naturelle qui se pose est de savoir s'il est possible de développer une fonction analytique en une série de polynômes sur un domaine quelconque. Alors chaque terme de la série pourra de nouveau être calculé par des opérations arithmétiques élémentaires, et nous aurons encore un outil très simple pour représenter la fonction. La réponse générale à ce problème est donnée par le théorème suivant :

Une fonction analytique, donnée sur un domaine quelconque, dont la frontière consiste en une courbe d'un seul tenant, peut être développée en une série de polynômes

$$f(z) = P_0(z) + P_1(z) + \dots + P_n(z) + \dots$$

Ce théorème donne seulement une réponse générale à la question de la possibilité de développer une fonction sur un domaine de forme arbitraire en une série de polynômes. Il ne donne toutefois pas de moyen pratique pour construire une telle série pour une fonction donnée, comme c'était le cas pour une série de Taylor. Autrement dit, il pose autant de questions qu'il n'apporte de réponses. Les questions sur la construction d'une série de polynômes pour une fonction donnée ou sur certaines de ses propriétés, les questions sur la construction de la série convergeant le plus rapidement possible et sur les séries étroitement liées à la nature et au comportement de la fonction elle-même, les questions sur la structure de la fonction représentée pour une série donnée de polynômes, toutes appartiennent à la vaste théorie de l'approximation des fonctions par des séries de polynômes. Les mathématiciens soviétiques ont pris une part importante dans son élaboration et ont obtenu un grand nombre de résultats fondamentaux.

IX.5 Propriété d'unicité et prolongement analytique

La propriété d'unicité des fonctions analytiques.

L'une des propriétés les plus remarquables des fonctions analytiques est celle de leur unicité. Par ce terme nous entendons ceci

Si, sur un domaine D où elles sont définies, deux fonctions analytiques coïncident sur une certaine courbe située à l'intérieur du domaine, alors elles coïncident sur l'ensemble du domaine.

La démonstration de ce théorème est très simple. Soit $f_1(z)$ et $f_2(z)$ deux fonctions analytiques sur le domaine D , coïncidant sur toute une courbe C . La différence

$$\phi(z) = f_1(z) - f_2(z)$$

sera aussi une fonction analytique sur D , prenant la valeur zéro sur la ligne courbe C . Montrons que $\phi(z) = 0$ en n'importe quel point du domaine D . En effet, si dans le domaine D existe un point z_0 (figure IX.21) où $\phi(z_0) \neq 0$, alors prolongeons la ligne C jusqu'au point z_0 , et voyons comment une chaîne de raisonnements va nous conduire à une contradiction.

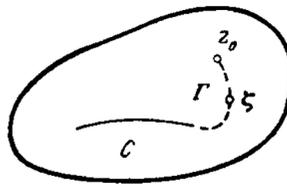


Figure IX.21 : Démonstration du théorème d'unicité.

Parcourons la ligne Γ obtenue, dans la direction du point z_0 , jusqu'au dernier point où ϕ est encore égal à zéro sur cette ligne. Dénotons ce point par la lettre ζ . Puisque $\phi(z_0) \neq 0$, on sait que $\zeta \neq z_0$. Et sur un certain segment de la ligne Γ ,

après le point ζ (c.-à-d. entre ζ et z_0), par la définition de ce point ζ , la fonction $\phi(z)$ ne sera pas nulle. Montrons pourquoi c'est impossible. En effet, sur la partie Γ_ζ de la ligne courbe Γ jusqu'au point ζ , nous avons $\phi(z) = 0$. Nous pouvons calculer toutes les dérivées de la fonction $\phi(z)$ en nous déplaçant sur Γ_ζ . On voit donc que $\phi(z)$ et toutes les dérivées sont égales à zéro sur cette partie de Γ . En particulier au point ζ

$$\phi(\zeta) = \phi'(\zeta) = \dots = \phi^{(n)}(\zeta) = \dots = 0$$

Utilisons maintenant le développement de Taylor de la fonction ϕ au point ζ . Tous les coefficients sont nuls, donc

$$\phi(z) = 0$$

sur un certain disque, entièrement situé dans D et centré au point ζ . Cela implique que l'égalité $\phi(z) = 0$ continue à être vraie sur un segment de la courbe Γ au-delà du point ζ . Or c'est impossible étant donné la façon dont on a défini ζ . Ainsi l'hypothèse que $\phi(z_0) \neq 0$ conduit à contradiction. Nous avons établi l'unicité avec ce qu'on appelle une démonstration par l'absurde.

Avant de poursuivre, le lecteur et la lectrice sont invités à se figurer par eux-mêmes pourquoi on ne peut pas tenir le même raisonnement dans \mathbb{R} . Autrement dit, contrairement à ce qu'on vient de voir dans \mathbb{C} , on peut tout à fait avoir deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$, définies et infiniment différentiables sur un segment D , coïncidant sur tout un sous segment, mais qui ne soient pas identiques sur D .

Le théorème qu'on vient de prouver sur les fonctions analytiques dans le plan complexe montre que si les valeurs prises par une fonction analytique sont connues sur un certain segment de courbe ou sur une certaine région ouverte de son domaine, alors cela détermine de manière unique les valeurs prises par la fonction dans tout le domaine de définition. Autrement dit, les valeurs prises par une fonction analytique en différentes régions du plan de l'argument z sont étroitement liées entre elles.

Pour comprendre l'importance de la propriété d'unicité d'une fonction analytique, il faut se rappeler que la définition générale d'une fonction d'une variable complexe autorise n'importe quelle loi de correspondance entre les valeurs de la variable indépendante z et celles de la variable dépendante w . Avec cette définition générale, il n'est naturellement pas question que les valeurs de la fonction à certains endroits déterminent ses valeurs à d'autres endroits. Nous voyons donc que la simple exigence de différentiabilité – telle que nous l'avons définie – pour une fonction d'une variable complexe s'avère être une condition très forte; en particulier elle implique que la connaissance des valeurs que prend la fonction en certains endroits déterminent celles qu'elle prend ailleurs.

Soulignons que dans le domaine des fonctions d'une variable réelle, la différentiabilité d'une fonction n'entraîne pas des conséquences comparables. En effet, il est possible de construire des exemples de fonctions, différentiables autant de fois qu'on veut, coïncidant sur un intervalle de l'axe Ox et cependant différentes l'une de l'autre en d'autres points de leur domaine de définition. Par exemple, une fonction peut être définie comme valant zéro pour les valeurs négatives de x et avoir des valeurs non nulles du côté des réels positifs, et avoir une dérivée continue d'un ordre quelconque en tous les points de \mathbb{R} . Il suffit de prendre, par exemple, la fonction qui pour $x \leq 0$ est égale à zéro et pour $x > 0$ est définie par

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$$

Prolongement analytique et fonctions analytiques complètes. Souvent quand on a défini une fonction d'une variable complexe, son domaine de définition est limité par la façon même dont on l'a définie. Prenons un exemple très simple. Soit la fonction définie par la série

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \quad (\text{IX.49})$$

Cette série, comme l'on sait, converge sur le disque unité ouvert centré à l'origine et diverge en dehors. Donc, la fonction analytique donnée par la formule (IX.49) n'est définie

que sur ce disque. D'un autre côté, nous savons que la somme de la série (IX.49) sur le disque $|z| < 1$ est exprimée par

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \quad (\text{IX.50})$$

Cette formule (IX.50) a aussi un sens en dehors du disque tant que $z \neq 1$. Nous fondant sur le théorème d'unicité, nous savons que l'expression (IX.50) est la seule fonction analytique qui coïncide avec la somme de la série (IX.49) sur le disque $|z| < 1$. Ainsi nous pouvons « prolonger » la fonction, définie au départ seulement sur le disque unité, sur tout le plan.

Si nous avons une fonction $f(z)$, définie sur un certain domaine D , et il existe, définie sur un domaine Δ plus vaste, contenant D , une autre fonction $F(z)$ coïncidant avec $f(z)$ sur D , alors, en vertu du théorème d'unicité, les valeurs de $F(z)$ sur Δ sont définies de manière unique.

La fonction $F(z)$ s'appelle le *prolongement analytique* de $f(z)$. Une fonction analytique est dite « complète » si elle ne peut pas être prolongée en préservant l'analyticité au-delà de la région où elle est déjà spécifiée. Par exemple, une fonction entière, i.e. définie et analytique sur tout le plan complexe, est naturellement complète. Une fonction méromorphe (cf. p. 363) est aussi une fonction complète : elle est définie sur tout le plan sauf en ses pôles. Cependant il existe aussi des fonctions analytiques dont le domaine de définition le plus grand possible reste borné. Nous n'allons pas consacrer de temps à ces exemples plus compliqués.

Le concept de fonction analytique complète demande de prêter une attention particulière aux fonctions complexes à valeurs multiples. Illustrons-le avec l'exemple de la fonction logarithme complexe

$$\text{Ln } z = \ln r + i\phi$$

où $r = |z|$ et $\phi = \arg z$. Si en un certain point $z_0 = r_0(\cos \phi_0 + i \sin \phi_0)$ du plan des z nous considérons une valeur initiale de la fonction logarithme complexe

$$(\text{Ln } z)_0 = \ln r_0 + i\phi_0$$

alors notre fonction analytique peut être prolongée continûment en se déplaçant le long d'une courbe C . Comme nous l'avons déjà mentionné, il est facile de voir que si le point z parcourt une boucle fermée C_0 débutant au point z_0 , faisant le tour de l'origine des coordonnées (figure IX.22) et retournant au point z_0 , alors en revenant au point z_0 nous aurons la même valeur $\ln r_0$ mais un angle $\phi = \phi_0 + 2\pi$.

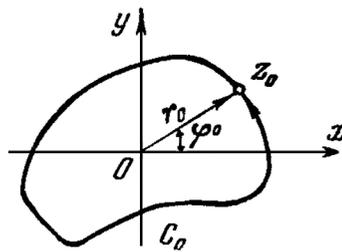


Figure IX.22 : Comportement de la fonction logarithme complexe le long d'une boucle autour de l'origine.

Cela montre qu'en prolongeant de manière continue le long d'une courbe C la fonction $\text{Ln } z$, nous allons accroître sa valeur de $2\pi i$ quand on fait une boucle autour de l'origine. Si le point z fait n tours de l'origine, dans le sens positif, avant de revenir à son point de départ, alors à la place de la valeur initiale

$$(\text{Ln } z)_0 = \ln r_0 + i\phi_0$$

nous aurons la nouvelle valeur

$$(\text{Ln } z)_n = \ln r_0 + (2\pi n + \phi_0)i$$

Si le point z fait m tours dans le sens négatif (= sens des aiguilles d'une montre), nous aurons

$$(\text{Ln } z)_{-m} = \ln r_0 + (-2\pi m + \phi_0)i$$

Le raisonnement qu'on vient de suivre montre que dans le plan complexe, nous devons nécessairement considérer diverses valeurs de la fonction $\text{Ln } z$ liées entre elles. Notons que la fonction $\text{Ln } z$ n'est pas bornée. D'autre part, en ce qui concerne le fait qu'elle est à valeurs multiples, le point $z = 0$ joue un rôle spécial : quand nous tournons autour de lui pour revenir au même point la fonction passe d'une valeur à une autre. Toutefois quand z décrit un contour fermé qui n'entoure pas l'origine, il est facile de voir que la valeur de $\text{Ln } z$ ne change pas. Comme nous l'avons dit p. 314, le point $z = 0$ est appelé un point de branchement de la fonction $\text{Ln } z$.

D'une manière générale, pour une fonction $f(z)$, si en tournant autour d'un point a et revenant à notre point de départ la fonction passe d'une valeur à une autre, le point a est un *point de branchement* ou *point de ramification* de la fonction $f(z)$.

Regardons un autre exemple. Soit

$$w = \sqrt[n]{z}$$

Comme déjà noté, cette fonction est à valeurs multiples et envoie vers les n valeurs

$$\begin{aligned} & \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\phi}{n} + i \sin \frac{\phi}{n} \right), \quad \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\phi + 2\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2\pi}{n} \right), \quad \dots, \\ & \dots, \quad \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\phi + 2\pi(n-1)}{n} + i \sin \frac{\phi + 2\pi(n-1)}{n} \right) \end{aligned}$$

Toutes les différentes valeurs de notre fonction peuvent être obtenues à partir de l'une d'elles. On part de n'importe laquelle, mettons

$$w_0 = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \frac{\phi_0}{n} + i \sin \frac{\phi_0}{n} \right)$$

Puis on décrit plusieurs fois une boucle fermée autour de l'origine dans le plan des z , puisqu'à chaque tour l'angle ϕ va augmenter de 2π .

Ayant parcouru la boucle $(n - 1)$ fois, nous obtenons, à partir de la première racine $w_0 = \sqrt[n]{z}$, les $(n - 1)$ restantes. En parcourant le contour pour la n -ième fois, on va arriver à

$$\sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \frac{\phi_0 + 2\pi n}{n} + i \sin \frac{\phi_0 + 2\pi n}{n} \right) \quad (15)$$

$$= \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \frac{\phi_0}{n} + i \sin \frac{\phi_0}{n} \right) \quad (16)$$

$$= w_0$$

c'est-à-dire que nous serons revenus à la première valeur de la racine.

Surfaces de Riemann pour les fonctions à valeurs multiples. Il existe une représentation géométrique très claire permettant de comprendre la nature d'une fonction à valeurs multiples (on dit aussi fonction « multivaluée »).

Considérons de nouveau la fonction $\text{Ln } z$ et traçons une ligne de coupure dans le plan des z le long de la partie positive de l'axe Ox (cf. p. 314). Si le point z n'est pas autorisé à franchir cette coupure, alors nous ne pourrions pas passer d'une valeur de $\text{Ln } z$ à une autre – pour le même point z – d'une manière continue. Quand nous chercherons à prolonger continûment $\text{Ln } z$ à partir d'un point z donné, en parcourant une boucle quelconque, nous retomberons toujours sur la même valeur de $\text{Ln } z$.

La fonction à valeur unique obtenue de cette manière, du plan des z sur lequel on a tracé une coupure vers le plan des w , est appelée une *branche à valeur unique* de la fonction $\text{Ln } z$ (on dit aussi branche ou ramification « monovaluée »). Toutes les valeurs de $\text{Ln } z$ tombent respectivement dans chacune des branches à valeur unique dont la collection forme un ensemble infini. Une branche correspond à l'expression

$$\ln r + i\phi, \quad \text{avec } 2\pi n < \phi \leq 2\pi(n + 1)$$

Il est facile de vérifier que la n -ième branche prend, sur la partie inférieure de la coupure, la même valeur que la $(n + 1)$ -ième sur la partie supérieure.

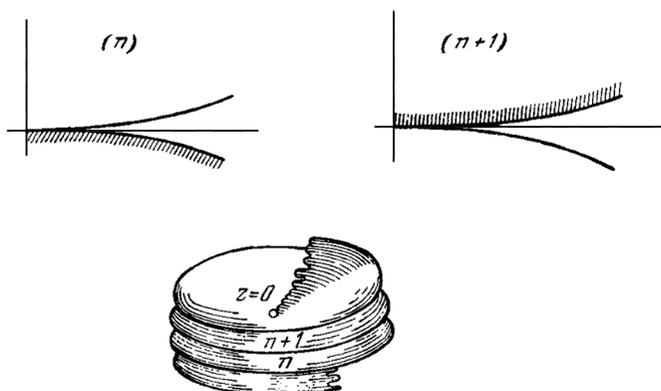


Figure IX.23 : Structure d'une fonction à valeurs multiples, et représentation de sa surface de Riemann dans le plan complexe des images w .

Afin de distinguer les différentes branches de $\text{Ln } z$, nous préparons une infinité de copies du plan des z , chaque fois coupé le long de la partie positive de l'axe des x , et nous allons dessiner la valeur de la fonction pour l'argument z , correspondant à la n -ième branche, sur la n -ième couche ou feuille. Les points se trouvant sur des copies différentes du plan des z , mais ayant les mêmes coordonnées, correspondront au même nombre $z = x + iy$; seulement l'image de ce nombre sur la n -ième couche veut dire que nous considérons la n -ième branche du logarithme complexe.

Pour montrer géométriquement que la n -ième branche du logarithme, sur la partie inférieure de la coupure sur le n -ième plan, coïncide avec la $(n+1)$ -ième branche du logarithme, sur la partie supérieure de la coupure sur le $(n+1)$ -ième plan, nous « collons » le n -ième plan avec le $(n+1)$ -ième en abouissant la partie inférieure de la coupure du n -ième plan avec la partie supérieure de la coupure du $(n+1)$ -ième plan. Cette construction produit une surface multicouche ressemblant à un escalier en colimaçon (figure IX.23). Le nombre complexe

$z = 0$ joue le rôle de colonne centrale de l'escalier ²⁹.

Quand le point passe d'une couche à l'autre, le nombre complexe z revient à sa valeur initiale, et la fonction $\text{Ln } z$ passe d'une branche à l'autre.

La surface ainsi construite s'appelle la *surface de Riemann* de la fonction $\text{Ln } z$. Riemann a, le premier, proposé l'idée de construire de telles surfaces représentant la nature des fonctions à valeurs multiples. Et il montra leur utilité.

Présentons aussi la construction de la surface de Riemann de la fonction $w = \sqrt{z}$. Cette fonction est à deux valeurs et donc seulement deux branches, et a encore pour point de branchement l'origine des coordonnées.

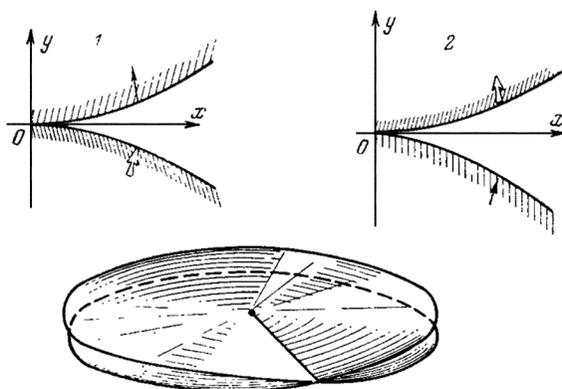


Figure IX.24 : Coupures sur les deux branches et surface de Riemann de la fonction $w = \sqrt{z}$ dans le plan des w .

Nous préparons deux copies du plan des z , les superposons, et traçons sur chacun la coupure le long de la partie positive de l'axe des réels. Si le point z , en partant de z_0 , parcourt une boucle fermée C autour de l'origine, alors \sqrt{z} va passer d'une couche vers l'autre dans le plan des w . Pour construire la surface de Riemann comme avec du papier et

²⁹. La dimension verticale ainsi créée n'a aucune matérialité, elle est juste là pour nous aider à nous figurer la surface de Riemann.

de la colle, nous aboutons le bord inférieur de la coupure de la première couche avec le bord supérieur de la coupure de la seconde. Mais si le point z parcourt la boucle C une deuxième fois, alors la valeur de \sqrt{z} doit revenir à sa valeur initiale sur la première couche. Pour obtenir cette structure, nous devons maintenant coller le bord inférieur de la coupure de la seconde feuille avec le bord supérieur de la coupure de la première. Le résultat est une surface à deux couches ou feuilles, telles que la surface se recoupe elle-même le long de la partie positive de l'axe des x . Une idée de la forme de cette surface est donnée par la figure IX.24, qui la montre aux alentours de son point de branchement $z = 0$.

Des surfaces « en millefeuille » (ou en tout cas en plusieurs feuilles) de cette sorte, reflétant la nature des fonctions à valeurs multiples, peuvent être construites pour n'importe quelle fonction multivaluée. Les différentes feuilles de ces surfaces sont connectées entre elles près des points de branchement de la fonction. Il se trouve que les propriétés des fonctions analytiques sont étroitement liées à la géométrie de leurs surfaces de Riemann. L'introduction de ces surfaces n'était pas seulement une technique auxiliaire pour expliquer la nature multivaluée d'une fonction ; elle joua un rôle central dans l'étude des propriétés des fonctions analytiques et le développement de méthodes pour travailler avec elles. Les surfaces de Riemann créèrent, si l'on peut dire, un pont entre le domaine des variables complexes et la géométrie. Elles ne permirent pas seulement de relier les propriétés analytiques les plus profondes d'une fonction avec sa géométrie, mais favorisèrent l'essor de tout un nouveau champ de la géométrie – la topologie, qui s'occupe des propriétés géométriques des figures qui sont préservées lors de déformations continues.

Un des exemples frappants de la signification des propriétés géométriques des surfaces de Riemann est offert par la théorie des fonctions algébriques, c'est-à-dire des fonctions obtenues en résolvant l'équation

$$f(x, w) = 0$$

où le membre de gauche est un polynôme en z et w . La surface de Riemann d'une telle fonction peut toujours être transformée par une déformation continue soit en une sphère, soit en une sphère avec des anses (figure IX.25).

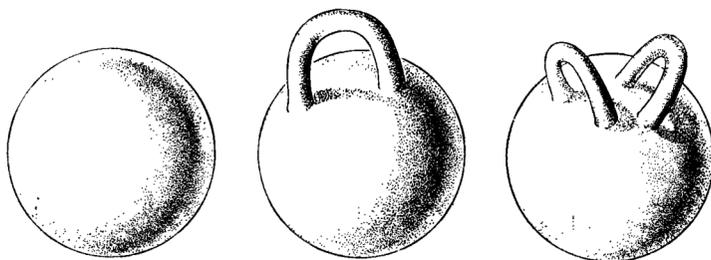


Figure IX.25 : Propriétés topologiques des surfaces de Riemann des fonctions algébriques. Elles peuvent toujours être déformées continûment en une sphère, éventuellement avec des anses. Noter que celle du milieu est équivalente à un tore, c'est-à-dire une chambre à air de vélo, mais aussi à une tasse à café.

Une propriété caractéristique de ces surfaces est leur nombre d'anses, encore appelées poignées. Ce nombre est le *genus* ou *genre* de la fonction algébrique qui a pour surface de Riemann celle en question. Il s'avère que le genus d'une fonction algébrique détermine ses propriétés les plus importantes.

IX.6 Conclusion

La théorie des fonctions analytiques est apparue en lien avec le problème de la résolution des équations algébriques. Cependant, lors de son développement, elle a montré qu'elle était utile pour toutes sortes d'autres problèmes. Elle apporta un éclairage sur les classes de fonctions les plus importantes issues du développement de l'analyse, de la mécanique et de la physique mathématique. Un grand nombre de faits centraux en analyse ne pouvaient être totalement compris qu'en

les examinant dans le domaine des complexes. Les fonctions d'une variable complexe ont reçu une interprétation physique directe en tant que fonctions caractéristiques des champs vectoriels les plus importants en hydrodynamique et électrodynamique. Elles fournirent alors un merveilleux outillage pour résoudre les problèmes se posant dans ces branches de la science. On découvrit aussi des liens avec les problèmes de transfert de la chaleur, les problèmes d'élasticité, etc.

Les questions générales en théorie des équations différentielles et des méthodes particulières pour leur résolution reposent largement sur la théorie des fonctions d'une variable complexe. Les fonctions analytiques entrent naturellement dans la théorie des équations intégrales et dans la théorie générale des opérateurs linéaires. Comme on l'a vu, il existe des connexions profondes entre la théorie des fonctions analytiques et la géométrie. Ces liens toujours plus nombreux entre la théorie des fonctions et les nouveaux domaines des mathématiques et des sciences de la nature confirment la vitalité de cette théorie, et contribuent à l'enrichir avec des problèmes nouveaux.

Il n'était pas possible, dans les limites du présent chapitre, de présenter toutes les ramifications de la théorie des fonctions et tous les liens qu'elle a avec d'autres domaines. Nous avons choisi de présenter un échantillon des objectifs et des outils de la théorie, ainsi que de ses axes de développement, à partir de l'exposé des faits les plus élémentaires qui sont à la base de certaines des directions de recherches les plus importantes. Un grand nombre d'autres directions importantes – les liens avec la théorie des équations différentielles et les fonctions spéciales, avec la théorie des fonctions elliptiques et des fonctions automorphes³⁰, avec la théorie des séries trigonométriques, et encore avec d'autres – ont été complètement laissées de côté. Dans les cas que nous avons abordés, nous

30. Une fonction automorphe est une fonction invariante sous l'action d'un certain groupe. Ainsi on construit des fonctions méromorphes f telles que pour tout z appartenant à une variété complexe et tout γ appartenant à un groupe de transformations, on a $f(\gamma(z)) = f(z)$.

nous sommes cantonnés à une introduction. Mais nous espérons que ce bref essai aura donné au lecteur et à la lectrice une idée générale de la nature et de la signification de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Suggestions de lecture

CONWAY John & SMITH Derek, *On Quaternions and Octonions*, A K Peters, 2003

HADAMARD Jacques, *Essai sur l'étude des fonctions, données par leur développement de Taylor*, BiblioLife, 2019.

ROBERT Jean-Noël (sous la direction de), *Langage et science, langage et pensée*, Odile Jacob, 2020.

RUDIN Walter, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 2009.

TITCHMARSH Edward, *Theory of Functions*, Oxford University Press, 1976.

TOKATY Grigori, *A History and Philosophy of Fluid Mechanics*, Dover Publications, 1971.

TABLE DES MATIÈRES

GÉNÉRALE

VOLUME 1

	Préface
	Avant-propos
I	Vue d'ensemble des mathématiques
II	<u>Analyse</u>
III	Géométrie analytique
IV	Théorie des équations algébriques
	Index des noms

VOLUME 2

V	Équations différentielles ordinaires
VI	Équations aux dérivées partielles
VII	Courbes et surfaces
VIII	Calcul des variations
IX	Fonctions d'une variable complexe
X	Nombres premiers
XI	Théorie des probabilités
XII	Approximation des fonctions
XIII	Méthodes numériques
XIV	Informatique
	Index des noms

VOLUME 3

XV	<u>Théorie des fonctions d'une variable réelle</u>
XVI	Algèbre linéaire
XVII	Espaces abstraits
XVIII	Topologie
XIX	Analyse fonctionnelle
XX	Groupes et autres structures algébriques
	Index des noms

Catalogue des
ÉDITIONS DU BEC DE L'AIGLE



www.amazon.fr/dp/2957239159
Cours de mathématiques du collège.

Volume 1 : 6e et 5e.

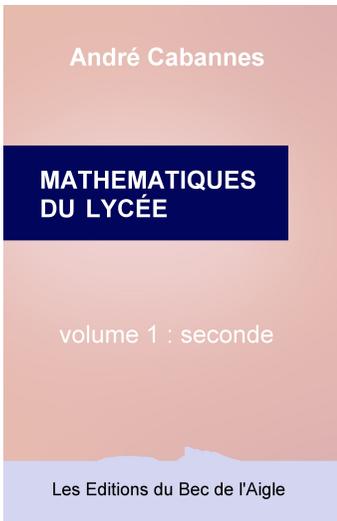
à l'intention des collégiens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2957239167
Cours de mathématiques du collège.

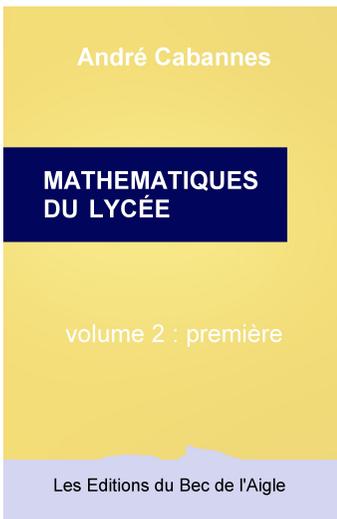
Volume 2 : 4e et 3e.

à l'intention des collégiens et de leurs parents



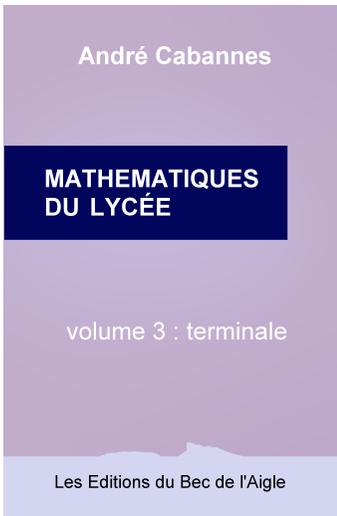
www.amazon.fr/dp/2957239183
Cours de mathématiques de se-
conde

à l'intention des lycéens et de
leurs parents



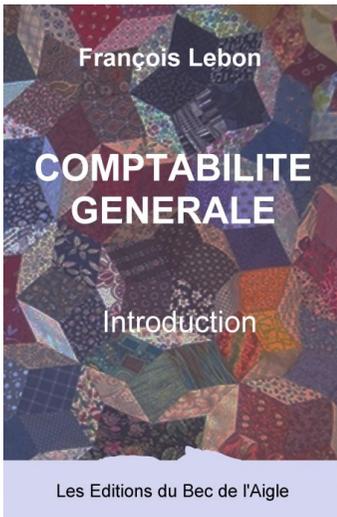
www.amazon.fr/dp/2957239191
Cours de mathématiques de pre-
mière

à l'intention des lycéens et de
leurs parents

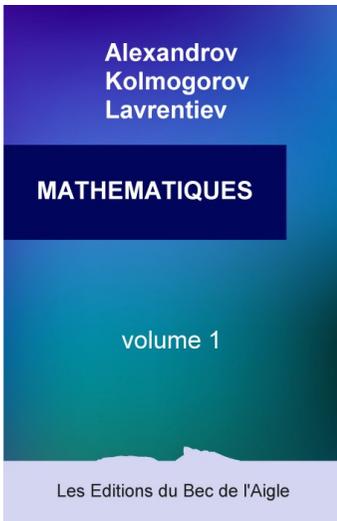


www.amazon.fr/dp/2958738507
Cours de mathématiques de terminale

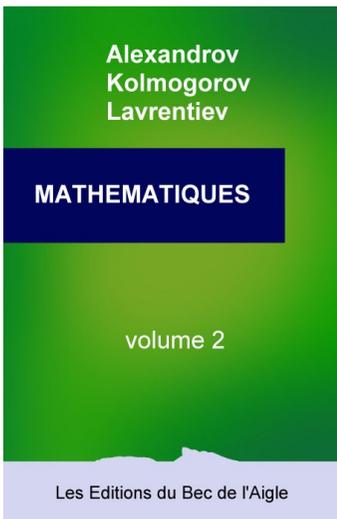
à l'intention des lycéens et de leurs parents



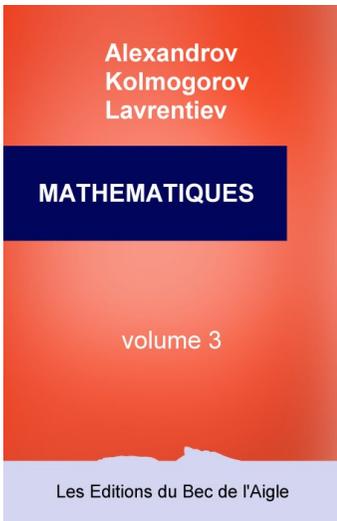
www.amazon.fr/dp/2957239140
Cours de comptabilité (niveau baccalauréat)



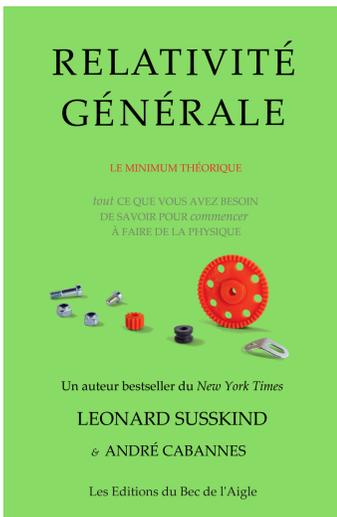
www.amazon.fr/dp/2957239124
Introduction aux mathématiques
(niveau baccalauréat)



www.amazon.fr/dp/2957239116
Les mathématiques pour l'utilisateur
(niveau première année
d'université)

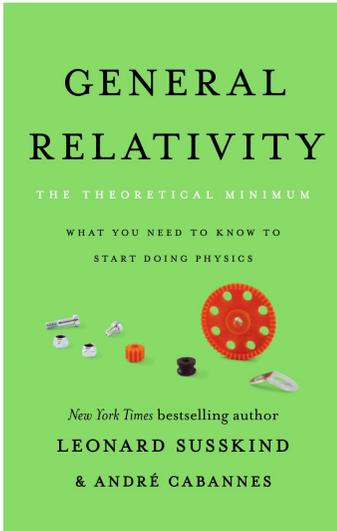


www.amazon.fr/dp/2957239132
Les mathématiques pour l'étudiant spécialisé et le chercheur (niveau licence)



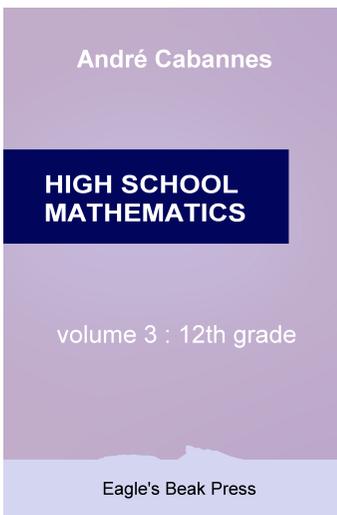
www.amazon.fr/dp/2957239175
Cours de physique (niveau maîtrise)

English titles by André Cabannes



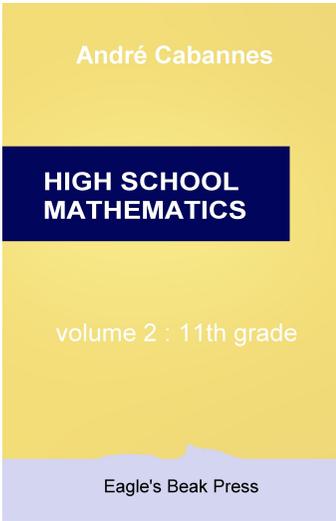
www.amazon.com/dp/B09ZB613QY
General Relativity

Graduate studies.



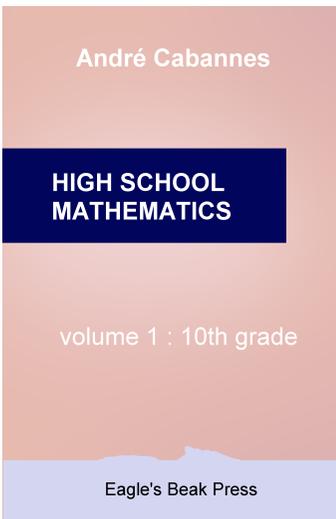
www.amazon.com/dp/2958738515
High school mathematics

Volume 3 : 12th grade



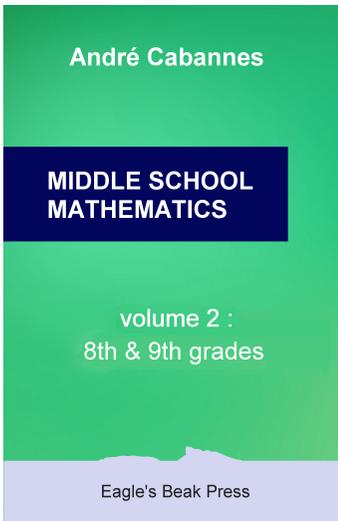
www.amazon.com/dp/2958738523
High school mathematics

Volume 2 : 11th grade



www.amazon.com/dp/2958738531
High school mathematics

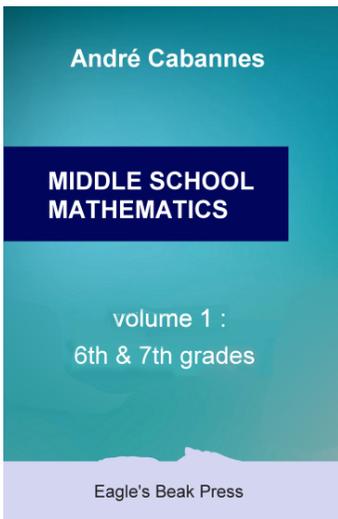
Volume 1 : 10th grade



www.amazon.com/dp/295873854X
Middle school mathematics

Volume 2 : 8th & 9th grades

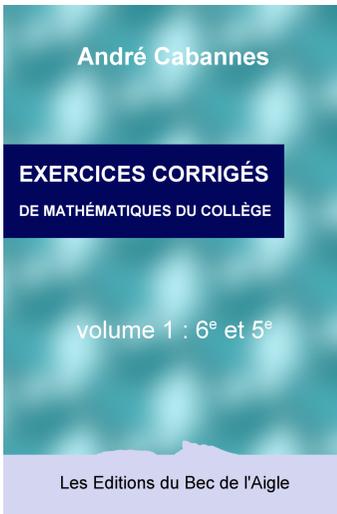
for middle school students and
their parents



www.amazon.com/dp/2958738558
Middle school mathematics

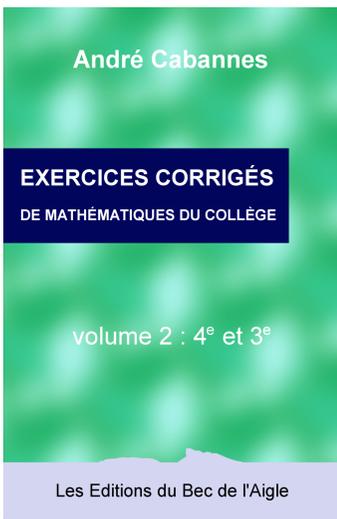
Volume 1 : 6th & 7th grades

for middle school students and
their parents



www.amazon.fr/dp/2958738566
Maths du collège volume 1

Le livre de CORRIGÉS
des exercices



www.amazon.fr/dp/2958738574
Maths du collège volume 2

Le livre de CORRIGÉS
des exercices