Chapitre I

VUE D'ENSEMBLE DES MATHÉMATIQUES

par Alexandre D. Alexandrov

Contenu :

La bonne façon de présenter une science, quelle qu'elle soit, ne consiste pas à exposer une masse de faits détaillés, même quand cette science est assez étendue. Il faut d'abord en donner une vue d'ensemble afin d'en saisir l'essence. Le but de ce chapitre est de donner une vue d'ensemble des mathématiques et de leur essence. Pour cela il n'est pas nécessaire d'aborder les théories les plus récentes. L'histoire des mathématiques et les mathématiques élémentaires fournissent suffisamment d'exemples conduisant à des conclusions générales.

I.1 Caractéristiques des mathématiques

I.1.1 Une connaissance même superficielle des mathématiques permet déjà de distinguer aisément leurs caractéristiques principales : d'abord leur abstraction ; ensuite la précision, ou pour mieux dire la rigueur logique de leurs raisonnements et le caractère indiscutable de leurs conclusions ; enfin l'extraordinaire étendue de leurs applications.

Abstraction :

L'abstraction des mathématiques est la première chose qui frappe celui ou celle qui les aborde. Nous travaillons avec des nombres abstraits sans nous soucier de les relier chaque fois à des collections d'objets spécifiques. Les tables de multiplication que nous avons apprises à l'école s'appliquent aux nombres en général, quoi qu'ils comptent, pas spécifiquement, pour prendre un exemple, au nombre de garçons multiplié par le nombre de pommes par garçon, ou au nombre total de pommes multiplié par le prix d'une pomme, etc.

De même en géométrie on considère des lignes droites en général, pas des fils tendus en particulier. Le concept général de ligne droite est obtenu en faisant abstraction de toutes les autres propriétés des objets dans lesquels nous reconnaissons une ligne droite s'étendant dans une direction. De manière générale le concept de figure géométrique résulte de l'élimination de toutes les autres propriétés physiques d'objets réels, sauf la forme spatiale et la dimension.

Cette façon de procéder – aller vers l'abstraction – est commune à toutes les branches des mathématiques. Les nombres entiers et les figures géométriques ne sont que des premiers concepts simples donnés à titre illustratif. Nous en rencontrerons beaucoup d'autres moins évidents, comme les nombres complexes, les fonctions, les intégrales, les différentielles, les fonctionnelles, les espaces à n dimensions et même à un nombre infini de dimensions, etc. La progression dans les abstractions, chacune servant de marche vers la suivante encore plus abstraite, semble nous éloigner irrémédiablement de la vie courante. Et le commun des mortels déclare généralement n'y rien comprendre à part que « c'est incompréhensible ».

Évidemment il n'en est rien. Et, bien que par exemple le concept d'espace à n dimensions soit effectivement très abstrait, il correspond à des choses bien réelles de la vie courante. Le moment venu nous verrons que ce n'est pas si difficile à comprendre. Dans ce livre nous nous efforçons de toujours montrer la signification et l'utilité concrète des concepts abstraits que nous introduisons. Nous espérons convaincre la lectrice et le lecteur que les concepts même abstraits sont liés à la vie concrète tant par leur origine que par leurs applications.

L'abstraction n'est pas spécifique aux mathématiques. Elle concerne toutes les sciences, et même la pensée humaine en général. Les mathématiques ont aussi d'autres aspects remarquables.

Mais les mathématiques font un usage particulier de l'abstraction en ce sens qu'elles utilisent, dans les modèles abstraits qu'elles construisent, des relations quantitatives entre objets et des relations géométriques entre formes, éliminant tout le reste. Deuxièmement les abstractions mathématiques sont élaborées pas à pas ; ce faisant toutefois elles vont bien plus loin que ce qu'il est courant de faire en sciences de la nature. Nous clarifierons ces deux points avec des exemples s'appuyant sur les nombres et les figures. Enfin – c'est un point important – une fois les concepts et règles établis, les mathématiques opèrent, si l'on peut dire, en vase clos, totalement au sein de l'univers abstrait qu'elles ont construit, avec ses structures et ses relations entre objets. Là où un spécialiste de sciences naturelles retournera constamment à la paillasse et à l'observation pour vérifier ses affirmations, le mathématicien prouve ses théorèmes exclusivement à l'aide de calculs et de raisonnements logiques.

Rigueur des raisonnements :

Bien sûr les mathématiques utilisent des modèles concrets et des analogies physiques pour élaborer leurs méthodes et découvrir leurs théorèmes. Les mathématiciens s'inspirent de nombreux exemples pratiques. La réalité concrète est à l'origine des théories et sert de guide vers les théorèmes. Cependant chaque théorème est finalement intégré au corpus des mathématiques seulement quand il a été établi à l'aide d'un raisonnement strictement logique. Si un géomètre, pour présenter sa découverte d'un nouveau théorème, se contentait d'en donner pour preuve qu'on l'observe toujours dans la nature, aucun mathématicien ne considérerait le théorème comme démontré. L'exigence d'une *démonstration* pour établir de manière définitive un résultat est bien connue des élèves dans les cours de géométrie au collège et au lycée. Elle traverse l'ensemble des mathématiques. Nous pourrions mesurer avec beaucoup de soin les angles de part et d'autre de la base de milliers de triangles ayant leurs deux autres côtés égaux, cela ne nous donnerait pas *une démonstration mathématique du théorème* énonçant que les deux angles de base d'un triangle isocèle sont toujours égaux. Les mathématiques exigent que ce résultat soit déduit logiquement de concepts fondamentaux en géométrie. (De nos jours dans une exposition rigoureuse de la géométrie ces concepts fondamentaux sont énoncés très précisément et sont appelés des axiomes.) C'est donc universel en mathématiques : prouver un théorème veut dire parvenir à ses conclusions au terme d'une chaîne d'étapes logiques élémentaires, indiscutables, démarrant avec les propriétés initiales inhérentes aux objets et concepts avec lesquels on travaille. C'est pourquoi non seulement les concepts mais aussi les méthodes mathématiques apparaissent abstraites et du domaine de l'esprit.

Les conclusions mathématiques se distinguent par leur grande rigueur logique. Les raisonnements sont construits avec un tel souci de correction que leurs conclusions sont indiscutables et convaincantes pour quiconque peut les comprendre. Ce souci de perfection logique est lui aussi bien connu des lycéens. Et les vérités mathématiques apparaissent comme totalement irréfutables. Il n'est pas surprenant qu'on dise : « C'est sûr comme deux et deux font quatre. » Ici la relation mathématique $2 \times 2 = 4$ est précisément prise comme exemple d'affirmation qui ne se discute pas. Pourtant, la rigueur des mathématiques n'est pas absolue : elle est en évolution permanente. Les principes mathématiques ne sont pas figés une fois pour toutes. Ils sont eux-mêmes l'objet de débats scientifiques qui les font progresser.

En définitive *la source de la vitalité des mathématiques réside dans le fait que leurs concepts et conclusions, en dépit de leur grande abstraction, découlent, comme nous le verrons, de la réalité et ont un vaste champ d'application dans les autres sciences, en technologie, et dans la vie pratique. Ce caractère utile et en définitive, malgré les apparences, concret des mathématiques est un point très important pour les comprendre.*

Étendue des applications :

L'étendue exceptionnelle du champ d'application des mathématiques est la troisième de leurs caractéristiques notables. D'abord dans la vie de tous les jours nous utilisons constamment les concepts et les résultats les plus courants des mathématiques, sans même y prêter attention, que ce soit dans nos activités professionnelles ou dans d'autres domaines. Nous utilisons l'arithmétique pour compter les jours ou les dépenses. Quand nous mesurons la surface d'un logement, nous utilisons des résultats de géométrie. Il s'agit d'outils très simples, mais il est bon de se rappeler qu'il fut un temps où ils faisaient partie des réussites les plus remarquables des mathématiques, quand celles-ci étaient encore dans l'enfance.

Ensuite la technologie moderne aurait été impossible sans les mathématiques. On peut, sans risque de se tromper, dire qu'aucune amélioration technique n'est optimisée si elle n'est pas le résultat de longs calculs. Et les mathématiques jouent un rôle très important dans le développement des nouvelles technologies.

Enfin presque toutes les sciences utilisent les mathématiques de manière plus ou moins fondamentale. Les sciences dites exactes – la mécanique, l'astronomie, la physique et aussi dans une mesure croissante la chimie – expriment généralement leurs lois à l'aide de formules, comme on le sait, et développent leurs théories en faisant grand usage de la boîte à outils mathématique. Sans les mathématiques les progrès de ces sciences eussent été impossibles. C'est d'ailleurs pourquoi, en retour, les besoins de la mécanique, de l'astronomie, de la physique ont toujours eu une influence directe et décisive sur le développement des mathématiques.

Dans les autres sciences, celles qui ne sont pas des sciences dures ou exactes, les mathématiques jouent un rôle moindre. Cependant même dans ces sciences-là elles ont des applications importantes. Certes, dans l'étude de phénomènes complexes en biologie ou en sociologie, la méthode mathématique ne peut pas jouer un rôle aussi central que par exemple en physique. Là plus qu'ailleurs l'utilisation des mathématiques n'a de sens que si c'est pour développer une théorie profonde et unifiée qui modélise un phénomène particulier. Il est important de le garder à l'esprit quand on travaille en biologie ou en sociologie, afin de ne pas s'égarer dans un pur jeu de construction de formules qui ne correspondraient rapidement plus à rien. En conclusion, d'une manière ou d'une autre les mathématiques ont une utilité et des applications dans presque toutes les sciences, de la mécanique à l'économie politique.

Rappelons quelques exemples d'applications particulièrement remarquables des mathématiques dans les sciences exactes et la technologie.

En 1846 a été découverte une des planètes les plus distantes du système solaire, baptisée plus tard Neptune, à la suite de calculs purement mathématiques. Examinant les irrégularités de la trajectoire de la planète Uranus, les astronomes John Adams (1819-1892) et Urbain Le Verrier (1811-1877), ainsi que quelques autres, émirent l'hypothèse qu'elles étaient dues à la présence d'une autre planète encore inconnue. Le Verrier, fondant ses calculs sur les lois de la mécanique et de la gravitation, détermina où cette planète hypothétique devrait se trouver en septembre 1846. Le directeur d'un observatoire en Allemagne, à qui il fit part de ses conclusions, braqua son télescope dans la direction indiquée par Le Verrier et confirma la présence d'une nouvelle planète. Cette découverte n'est pas seulement un triomphe de la mécanique et de l'astronomie, en particulier copernicienne, c'est aussi un triomphe du calcul mathématique.

Un autre exemple, non moins remarquable et convaincant, est la découverte des ondes électromagnétiques par le physicien écossais James Clerk Maxwell (1831-1879). Vers 1865, synthétisant et complétant les lois de l'électromagnétisme établies par des expériences au cours des décennies précédentes, il les exprima sous la forme d'un ensemble d'équations, de nos jours réduit à quatre. À partir de ses équations il déduisit purement mathématiquement que des ondes électromagnétiques pouvaient exister et qu'elles se déplaceraient à la vitesse de la lumière. Se basant sur ce fait, il proposa une théorie électromagnétique de la lumière qui fut ensuite confirmée et développée. Outre les ondes lumineuses, les conclusions de Maxwell le poussèrent à rechercher des ondes d'origine purement électrique, par exemple celles émises par une décharge oscillante. De telles ondes furent effectivement découvertes par Heinrich Hertz (1857-1894). Peu après, Alexandre S. Popov (1859-1906) trouva le moyen de produire, transmettre et capter des ondes électromagnétiques, ouvrant un vaste champ d'applications et jetant en particulier les bases des technologies de la radio. Là encore, dans la découverte de la Télégraphie Sans Fil (ni signal optique), qui est maintenant présente dans tous les foyers, les techniques purement mathématiques jouèrent un rôle crucial.

C'est ainsi, *à partir d'observations* – comme la découverte par le physicien danois Hans Oersted (1777-1851) en 1820, dans un cours devant ses élèves, qu'un courant électrique faisait dévier une aiguille aimantée à côté sur la table – que la science procède à des généralisations, construit une théorie pour les phénomènes observés, formule des lois et leur donne une expression mathématique. À partir de ces lois, de nouvelles observations sont prédites. Enfin, si les prédictions sont confirmées, la théorie devient une partie de la connaissance et donne lieu à des applications pratiques, lesquelles à leur tour contribuent à stimuler les développements théoriques.

Il est particulièrement remarquable, à l'inverse, que même les constructions les plus abstraites, élaborées purement au sein d'une théorie mathématique, sans lien avec des observations ni des technologies, finissent toujours par trouver des applications.

Les nombres « imaginaires » (c'est-à-dire de la forme $x + y\sqrt{-1}$) sont sans doute l'exemple le plus remarquable d'une théorie développée sans lien avec des observations et avant toute utilisation. Ils sont nés dans des calculs algébriques de mathématiciens italiens au XVI^e siècle, et pendant longtemps ils restèrent incompréhensibles – comme leur nom du reste l'indique. Cependant, après qu'on leur eut donné une interprétation géométrique au début du XIX^e siècle (voir chapitre IV, deuxième section), les nombres imaginaires, désormais appelés *nombres complexes*, furent acceptés comme des objets légitimes et utiles dans la boîte à outils des mathématiques. Et une théorie très complète des fonctions de variables complexes fut développée. Cette théorie pour ainsi dire de fonctions imaginaires de variables imaginaires – qu'on appelle de nos jours l'*analyse complexe* – s'avéra ne pas être imaginaire du tout, mais au contraire un moyen très réel de résoudre de nombreux problèmes techniques. Ainsi la démonstration du théorème de Nikolaï Joukovski (1847-1921) sur la force de portance d'une aile d'avion utilise l'analyse complexe. La même théorie mathématique s'avéra utile pour résoudre par exemple des problèmes de fuite d'eau sous un barrage – une tâche dont il n'est pas nécessaire de souligner l'importance pour la construction des centrales hydroélectriques.

Un autre exemple frappant est celui de la géométrie non euclidienne. (Ici nous ne faisons que mentionner cet exemple sans entrer dans les détails. Le sujet sera traité dans le chapitre XVII, qui fait partie du troisième tome de l'ouvrage.) Elle est née après les vains efforts pendant plus de deux millénaires, depuis Euclide jusqu'au début du XIX^e siècle, pour prouver l'axiome des parallèles, appelé aussi Postulat d'Euclide, c'est-à-dire un problème d'un intérêt a priori exclusivement mathématique. Nikolaï Lobatchevski (1792-1856), qui créa cette nouvelle géométrie, la qualifia lui-même prudemment d'imaginaire parce qu'il ne pouvait pas montrer son utilité, quoiqu'il fût sûr qu'un jour on la trouverait. Les conclusions de sa géométrie semblaient à la plupart des mathématiciens non seulement imaginaires, mais même, à vrai dire, inimaginables et ridicules. Néanmoins les idées de Lobatchevski sont à l'origine de nouveaux développements très importants en géométrie, et de la création de théories sur divers espaces où les axiomes d'Euclide ne sont pas tous vérifiés, mais où il n'y a néanmoins aucune contradiction ou impossibilité intrinsèque.

Ces idées servirent plus tard en théorie de la relativité générale, qui utilise des outils appartenant à la géométrie non euclidienne et au calcul tensoriel dans un espace-temps à quatre dimensions. Ainsi les constructions abstraites des mathématiques, qui semblent a priori les moins compréhensibles ou utiles qui soient, finissent presque toujours par s'avérer de puissants outils pour développer des théories physiques très importantes. Par exemple encore, en mécanique quantique de nombreux concepts et théories mathématiques extrêmement abstraits jouent un rôle essentiel, comme le concept d'espaces avec un nombre infini de dimensions (certains d'entre eux portent le nom d'espaces de Hilbert, du nom du grand mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) dont nous reparlerons dans la section I.9).

Il n'est pas nécessaire d'allonger la liste des exemples. Nous avons suffisamment souligné que les mathématiques trouvent les champs d'application les plus variés dans la vie courante, en technologie et en science. Et en retour les sciences exactes, les grands problèmes de technologie et même des problèmes purement mathématiques, stimulent l'apparition de nouvelles théories mathématiques, conduisant à leur tour à de nouvelles applications. Ce perpétuel va-et-vient entre la théorie et la pratique est aussi un aspect important des mathématiques, à côté de leur abstraction, de leur rigueur, et de l'étendue de leurs applications.

I.1.2 Ayant présenté les trois grandes caractéristiques des mathématiques, que sont l'abstraction, la rigueur des raisonnements, et l'étendue des applications, nous n'avons, bien sûr, pas encore extrait leur essence. Nous sommes restés à un niveau descriptif. Le défi maintenant est d'entrer plus profondément dans ce que ces aspects disent sur la discipline.

Pour cela nous devons au moins répondre aux questions suivantes :

1. Qu'est-ce que reflètent les concepts mathématiques abstraits ? Autrement dit, quel est le vrai sujet des mathématiques ?
2. Pourquoi les conclusions des mathématiques si abstraites paraissent-elles si convaincantes, et les concepts fondamentaux si évidents ? Quel est en d'autres termes le socle de la méthode mathématique ?
3. Pourquoi, avec toutes leurs abstractions, les mathématiques ne restent-elles pas une sorte de jeu intellectuel abstrait et vain, mais trouvent-elles au contraire tant d'applications ? C'est-à-dire : d'où provient l'utilité des mathématiques ?
4. Enfin, quelles forces poussent au développement des mathématiques, leur permettant de combiner l'abstraction la plus élevée des concepts et méthodes avec l'étendue la plus vaste des applications ? Autrement dit : quelle est la nature du processus de développement des mathématiques ?

Les réponses à ces questions nous conduiront à une vision plus élevée de ce que sont les mathématiques, leur contenu, leurs méthodes, et leur signification, ainsi que les forces poussant à leur développement. C'est-à-dire, nous commencerons à comprendre leur essence.

Les idéalistes et les métaphysiciens non seulement s'égarent rapidement quand ils cherchent à répondre à ces questions fondamentales, mais ont une compréhension très éloignée de la réalité de ce que sont les mathématiques. Leur compréhension est même littéralement à l'opposé de la vérité. Ainsi, voyant l'abstraction extrême des concepts en même temps que le caractère logiquement indiscutable des conclusions des mathématiques, les idéalistes pensent que cela démontre que les mathématiques sont un pur produit de l'esprit.

Rien n'est plus faux. Les mathématiques ne sont en aucune façon une illustration de l'idéalisme ou de la métaphysique, bien au contraire. Considérées objectivement dans toutes leurs relations et tous leurs développements, les mathématiques apportent une nouvelle confirmation du matérialisme dialectique. Chaque étape de leur examen réfute l'idéalisme et la métaphysique. Nous nous en convaincrons quand nous parviendrons à des réponses, même en termes très généraux, aux questions que nous venons de poser sur l'essence des mathématiques.

Nous pourrons voir aussi que les réponses à ces questions se trouvent déjà dans les textes classiques de la pensée marxiste, que ce soit en ce qui concerne les mathématiques, ou la nature de la science ou même de la connaissance en général.

Pour une première clarification de ces questions, il suffit de considérer les fondements de l'arithmétique et de la géométrie élémentaires. C'est vers elles que nous tournons à présent notre attention. Tout au long de notre étude des mathématiques dans cet ouvrage, nous enrichirons et développerons naturellement notre compréhension, mais cela ne modifiera pas les conclusions que va nous permettre d'atteindre l'étude de ces deux premiers sujets.

I.2 Arithmétique

I.2.1 Le concept de nombre – nous ne parlons pour l'instant que des nombres entiers positifs, comme un, deux, trois, etc. –, avec lequel nous sommes aujourd'hui très familiers, s'est cependant développé très lentement. Pour s'en convaincre il suffit de considérer comment comptaient jusqu'à une époque récente des peuples primitifs à divers stades de civilisation. Certains n'avaient même pas de noms pour les nombres audelà de deux ou trois. (En français « trois » et « très » ont la même étymologie.) D'autres allaient plus loin, mais tous s'arrêtaient relativement rapidement et terminaient leur série avec un nombre final signifiant « beaucoup » ou « qu'on ne peut pas compter ». Cela montre que la collection de nombres clairement distinguables s'est construite et agrandie seulement progressivement.

Au début, les gens n'avaient aucune idée de ce qu'étaient les nombres, bien qu'ils fussent capables d'évaluer, de manière pratique, la taille d'un ensemble de choses rencontrées dans la vie courante. On peut penser que le nombre fut d'abord perçu directement comme une propriété inhérente à l'ensemble d'objets considéré, sans qu'elle soit clairement perçue comme un attribut parmi d'autres de l'ensemble en question, ni que l'on comprenne qu'il pouvait aussi partager cet attribut avec d'autres ensembles. Nous sommes tellement habitués à compter que nous avons du mal à nous figurer une pensée aussi primitive. Mais on peut quand même s'efforcer de la comprendre. En fait, n'importe quelle collection d'objets, que ce soit un troupeau de moutons ou un tas de bûches, existe et est d'abord perçue immédiatement dans sa globalité, sa spécificité et sa complexité. L'identification de propriétés distinctes et de relations, au sein de la collection, est le résultat pour nous d'une analyse que nous effectuons sans même y penser. La pensée primitive cependant n'effectue pas une telle analyse, mais considère un objet ou une collection seulement comme un tout.

On peut se faire une idée de cette perception uniquement globale en pensant à une personne qui n'a pas l'oreille musicienne. Elle entendra un morceau de musique sans distinguer les détails de la mélodie, la tonalité, etc. Tandis qu'un musicien au contraire analysera aisément dans tous ses détails même une symphonie complexe.

À un stade supérieur de la pensée, le nombre apparaît déjà comme un des aspects de la collection d'objets considérée, mais n'est pas encore traité comme un « nombre abstrait », c'est-à-dire comme un nombre en général, qui ne soit plus associé à une collection spécifique.

On peut voir cette étape intermédiaire dans les noms de nombre comme « une main » pour dire cinq, ou (en russe) « un homme entier » pour dire vingt, etc. Ici, cinq n'est pas perçu de manière abstraite, mais simplement comme « autant qu'il y a de doigts dans la main », et vingt comme « autant qu'il y a de doigts et d'orteils chez un individu », etc.

De manière tout à fait comparable, certaines peuplades n'avaient par exemple pas de concept pour « noir », « solide », « rond ». Pour signifier qu'un objet était, mettons, noir, on le comparait à un corbeau, et pour dire qu'il y avait cinq objets, on comparait leur groupe à une main. Il pouvait arriver aussi que, pour les mêmes nombres, des mots différents soient utilisés selon le type d'objets : certains mots pour compter les gens, d'autres pour compter les bateaux, etc. Il pouvait y avoir jusqu'à dix vocables différents.

Ici on ne peut pas encore parler de nombres abstraits, ce sont simplement des noms pour désigner certains aspects de collections d'objets. D'autres peuplades n'ont tout simplement pas de terminologie distincte pour les nombres ; chez certaines d'entre elles, il n'y a pas de mot pour dire trois, bien que ces peuplades aient en revanche le vocabulaire nécessaire pour dire « trois personnes », ou « trois lieux », etc.

Pour la couleur, observons que nous disons fréquemment que tel ou tel objet est noir. Mais beaucoup moins souvent parlons-nous de la « noirceur » d'une chose – le concept semble plus abstrait.

Étapes d'abstraction menant aux concepts :

Dans la formation des concepts pour parler des propriétés de quelque chose, qu'il s'agisse de la couleur d'un objet ou de la taille d'un agrégat, *trois niveaux de conceptualisation* peuvent être distingués, dont les limites sont du reste floues. À un premier niveau, la propriété est signifiée par comparaison directe avec d'autres objets : pareil qu'un corbeau, autant que les doigts de la main. À un second niveau, un adjectif apparaît : une pierre noire ; ou même un nombre, mais qui reste de même nature qu'un qualificatif : cinq arbres, etc. Enfin à un troisième niveau, la propriété essentielle est extraite – abstraite si l'on préfère – à partir des objets considérés et devient une qualité en soi ; par exemple « noirceur » ; ou un nombre abstrait : « cinq », etc.

Le nombre d'objets d'un groupe ou d'un agrégat est un des attributs de leur totalité. Mais ce nombre, en tant que tel, autrement dit le « nombre abstrait », reste cette propriété que l'on reconnaît dans tous les groupes de cinq objets, qui les caractérise encore même quand on a éliminé toutes les autres qualités spécifiques. La même chose est vraie de « noirceur », « dureté », etc. De même que noirceur est une propriété commune aux boulets de charbon, aux corbeaux, aux tunnels, et à beaucoup d'autres choses, le nombre cinq est une propriété commune à tous les agrégats qui ont autant d'éléments que les doigts d'une main.

Ici, le nombre d'éléments, au sens du *premier niveau* de conceptualisation, c'est-à-dire un aspect d'une collection, est établi à l'aide d'une comparaison élémentaire de la manière suivante : après avoir pris un premier objet dans la collection nous plions un doigt, puis après en avoir pris un deuxième nous plions un deuxième doigt, etc. Ainsi nous « comptons sur nos doigts » le nombre d'objets. En général, en comparant les objets de deux agrégats différents, il est possible, sans utiliser aucun nombre à proprement parler, d'établir si les deux agrégats ont le même nombre d'objets ou pas.

On peut donc donner la définition suivante d'un nombre :

Chaque nombre particulier, comme « deux », « cinq », etc., est une propriété que certaines collections d'objets partagent entre elles. Les collections ayant le même nombre sont celles dont les objets, ou éléments, peuvent être mis en correspondance biunivoque (appelée aussi « bijection »). Des collections qui ne peuvent pas être mises en correspondance biunivoque ont des nombres différents.

Afin de détecter et distinguer clairement cette propriété partagée par certaines collections et pas par d'autres, c'est-à-dire afin de former le concept d'un nombre particulier et lui donner un nom, par exemple « six » ou « dix », etc., il a fallu comparer beaucoup d'ensembles d'objets. De nombreuses générations d'homo sapiens ont ainsi compté (c'est-à-dire observé qu'on pouvait parfois mettre en correspondance les éléments de deux ou plusieurs groupes, et parfois non), ont répété ces opérations des millions de fois, et par la pratique ont découvert les nombres et leurs relations.

I.2.2 Agir sur les nombres, c'est-à-dire faire des opérations avec eux, est le miroir, du côté abstrait, d'actions réelles sur des objets concrets. On le voit dans les noms de certains nombres eux-mêmes. Chez des tribus indiennes, par exemple, le nombre « vingt-six » se dit « deux dizaines sur lesquelles je place encore six ». Il est clair qu'une certaine manière d'opérer sur les nombres est sous-jacente à cette façon de les nommer. D'une manière générale, additionner des nombres abstraits correspond, du côté concret des choses, à l'opération de fusion de deux ou plusieurs collections d'objets pour n'en faire qu'une seule. Il est aisé, de même, de voir en quoi consistent concrètement la soustraction, la multiplication et la division. La multiplication en particulier résulte du comptage de plusieurs ensembles égaux, etc.

Dans l'opération de comptage, les gens découvrirent et maîtrisèrent non seulement les relations entre divers nombres particuliers, comme le fait que deux plus trois donne toujours cinq, mais graduellement établirent des lois générales. Dans la pratique, on découvrit qu'une somme ne dépend pas de l'ordre des termes dans l'addition, et même que le résultat du comptage d'un ensemble donné d'objets ne dépend pas de l'ordre dans lequel on prend ces objets l'un après l'autre pour les compter. (Ce dernier fait est reflété par la coïncidence entre les nombres « ordinaux » et « cardinaux » : premier, deuxième, etc., et un, deux, etc.). Ainsi, les nombres ne sont pas apparus comme des concepts abstraits indépendants les uns des autres, mais au contraire comme des attributs d'agrégats – ces attributs ayant des fortes connexions entre eux.

Certains noms de nombre sont construits à partir d'autres nombres. En français, « dix-sept » est le nom donné au nombre résultat de dix plus sept ; « quatre-vingt-dix-huit » est le nombre résultat de l'opération quatre fois vingt plus dix plus huit. Ce processus est vrai aussi pour les notations : dans la numération romaine, c'est-à-dire la *notation* des nombres par les Romains, VIII signifie 8 parce que c'est $5+3$ et c'est ainsi qu'on le note. De manière similaire, quand un signe romain précède un autre plus grand, comme dans IX, la règle est de soustraire le premier du second. Donc IX signifie 9 car c'est $10-1$.

En général, dans une civilisation donnée, ce ne sont pas juste quelques nombres qui apparurent, mais tout un système de numération, avec des relations entre les nombres et avec des règles.

L'objet de l'arithmétique est précisément l'étude du système des nombres avec leurs relations et leurs règles. Le mot « arithmétique » lui-même vient du grec et signifie « l'art de compter » (arithmos = nombre ; et techne ou tique = art). Un nombre abstrait, considéré tout seul, n'a pas de propriétés significatives. Il n'y a pas grand-chose à en dire, sinon que c'est la cardinalité de certains ensembles. Si nous nous demandons, par exemple, quelles sont les propriétés du nombre 6, tout de suite nous observons que $6 = 5 + 1$, $6 = 3 \times 2$, six est un diviseur de trente, etc. Dans tous les cas, le nombre six est toujours considéré au regard de ses relations avec d'autres nombres. Les propriétés de six – et finalement son essence même – résident précisément dans ces relations.

C'est vrai de manière plus générale. Toute abstraction quand elle est détachée de ses origines concrètes – comme le seraient les nombres séparés des collections d'objets dont ils sont des propriétés – en soi n'a pas de sens particulier. Une abstraction n'a de sens qu'en relation avec d'autres concepts plus ou moins abstraits eux aussi. Ces relations sont déjà contenues dans les moindres énoncés concernant l'abstraction en question, même dans les définitions les plus superficielles. En dehors de ces relations, l'abstraction n'a pas de contenu ni de signification ; autrement dit, elle n'existe pas sans ses relations et ses supports concrets. Le contenu du concept d'un nombre abstrait consiste en les lois qui s'appliquent à ce nombre, en les relations que ce nombre entretient avec tout le système numérique. On le voit d'autant mieux qu'une *action*, ou *opération*, arithmétique définit toujours elle aussi une connexion, autrement dit une relation avec d'autres nombres.

Ainsi, l'arithmétique s'intéresse aux relations entre les nombres. Mais les relations entre les nombres sont les images abstraites de relations quantitatives matérielles entre collections d'objets. C'est pourquoi nous pouvons dire que *l'arithmétique est la science des relations quantitatives, considérées toutefois de manière abstraite, c'est-à-dire, si l'on peut dire, dans leur essence.*

Comme nous le voyons, l'arithmétique ne provient pas de la pensée pure, contrairement à ce que les idéalistes voudraient nous faire croire, mais reflète certaines propriétés de choses tout à fait concrètes. Elle est le fruit de l'expérience pratique de milliers de générations d'êtres humains.

I.2.3 Plus la société croissait et se structurait, plus complexes devenaient les problèmes qu'il fallait résoudre. On devait non seulement compter des objets et communiquer leur nombre, ce qui demandait déjà d'élaborer le concept de nombre et de les nommer, mais il devenait nécessaire d'apprendre à compter des ensembles de plus en plus grands, que ce soit les animaux d'un troupeau, des objets échangés, des jours avant un évènement, etc. Il fallait noter les nombres et transmettre les résultats de comptes. Cela demandait d'améliorer les dénominations et les notations des nombres.

La notation des nombres apparut dès l'invention de l'écriture, et joua un grand rôle dans le développement de l'arithmétique. C'était aussi un premier pas vers l'utilisation de signes et de formules en général. L'étape suivante cependant, i.e. l'introduction de signes pour les opérations arithmétiques et de lettres pour désigner les quantités inconnues (x), fut franchie seulement beaucoup plus tard (cf. sections I.5 et I.6).

Au concept de nombre, comme à beaucoup d'autres concepts abstraits, ne correspond pas directement une image. On ne peut pas se figurer un nombre aussi naturellement qu'on peut se figurer un objet concret. On peut seulement y penser. Mais une pensée est formulée à l'aide d'un langage. Sans mot pas de concept. Le signifié est alors commodément assimilé au signifiant. Il ne suffit toutefois pas de le prononcer, il faut encore pouvoir l'écrire. Il est alors saisi par la pensée sous la forme d'un signe graphique.

Par exemple, si je vous dis « sept », qu'est-ce que vous vous représentez ? Probablement pas sept objets, mais avant tout le chiffre « 7 », vraisemblablement à travers son dessin. Il sert de réceptacle ou médiateur en quelque sorte pour le nombre « sept ». D'autres nombres, comme par exemple 18 273, sont même plus difficiles à prononcer qu'à écrire. Et il est tout à fait impossible de se figurer avec la moindre précision une collection ayant ce nombre d'éléments. Ainsi, même si elles ne créèrent pas des images figuratives de choses concrètes, les notations aidèrent à construire et manipuler des concepts de nombres qu'on ne pouvait plus observer et compter d'un simple coup d'œil. C'était une nécessité pratique : avec l'avènement des États, il fallait lever des impôts, rassembler des troupes, mettre en place des circuits d'approvisionnements (militaires ou civils), etc., ce qui demandait de faire des opérations avec des grands nombres.

Ainsi le premier rôle de la notation des nombres est de donner une incarnation au concept abstrait de nombre. À ce propos, il est bon de noter que le concept de nombre, qui s'est développé comme nous l'avons vu si laborieusement sur des dizaines de milliers d'années, est maintenant adopté même par les enfants relativement aisément. Pourquoi ? D'abord bien sûr parce que l'enfant entend et voit comment les adultes utilisent constamment les nombres. Et même ils les lui enseignent. Ensuite – et c'est ce sur quoi nous voulons insister –, parce que l'enfant dispose tout de suite de mots et de notations pour les nombres. Il commence par apprendre les signes visuels représentant les nombres, puis il s'approprie leur signification. C'est le rôle des notations mathématiques, quelles qu'elles soient : elles offrent une incarnation de concepts mathématiques abstraits. Ainsi, $+$ veut dire addition, x une grandeur inconnue, a un nombre quelconque donné, mais n'ayant pas besoin d'être spécifié – ce qu'on appelle un paramètre.

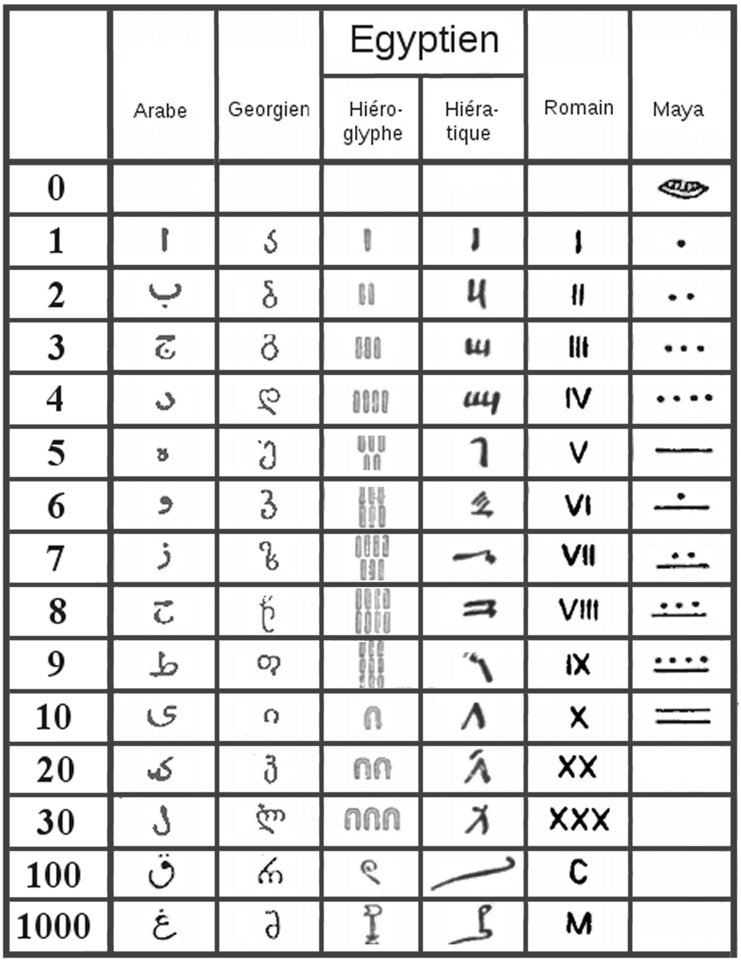
Le deuxième rôle de la notation des nombres est de considérablement faciliter les opérations avec eux. Chacun sait comme il est plus facile de faire des calculs avec une feuille de papier que de tête. Les signes mathématiques, et les formules en général, ont exactement le même rôle : ils permettent de remplacer une partie des raisonnements par des calculs, c'est-à-dire des opérations plus ou moins mécaniques. De plus, si le calcul est écrit, il offre déjà un certain degré de certitude. Tout est visible ; n'importe qui peut vérifier les opérations, car elles doivent respecter des règles précises. Par exemple, quand dans un calcul on arrive à une égalité, on peut faire sur chaque membre la même opération. Ne serait-ce que rajouter un même terme, ou deux termes dont on sait qu'ils sont égaux. De même si on a d'un côté la somme de plusieurs termes, on peut en faire passer un, ou plusieurs, ou tous, de l'autre côté, en changeant leur signe.

Il est clair, compte tenu de ce qui vient d'être dit, que sans un bon système de notation des nombres, l'arithmétique n'aurait pas pu faire beaucoup de progrès. Et les mathématiques contemporaines auraient tout simplement été impossibles sans des signes et des formules adaptés.

Il va sans dire que les gens ne furent pas immédiatement capables de construire un système de numération, c'est-à-dire d'écriture et de règles de manipulation des signes, aussi commode que notre système moderne. Dès la plus haute Antiquité, divers peuples, en accédant à un certain stade de culture, développèrent des systèmes de numération très différents du nôtre aussi bien en matière de signes que de principes de fonctionnement. Le système décimal n'apparut pas partout. Les Babyloniens utilisaient un système mixte décimal et sexagésimal, dont il nous reste de nombreuses traces dans la mesure des angles et du temps.

Table I.1 : Notation des nombres dans différentes cultures

	Slave		Chinois			Grec
	Cyrillique	Glagolitique	Ancien	Commercial	Scientifique	
0				〇	〇	
1	а҃	Ⰰ	一	〡	𝍠	α̅
2	в҃	Ⰱ	二	〢	𝍡	β̅
3	г҃	Ⰲ	三	〣	𝍢	γ̅
4	д҃	Ⰳ	四	〤	𝍣	δ̅
5	є҃	Ⰴ	五	〥	𝍤	ε̅
6	ѕ҃	Ⰵ	六	〦	𝍥	ϛ̅
7	з҃	Ⰶ	七	〧	𝍦	ζ̅
8	и҃	Ⰷ	八	〨	𝍧	η̅
9	ѳ҃	Ⰸ	九	〩	𝍨	θ̅
10	і҃	Ⰹ	十	十	𝍠〇	ι̅
20	к҃	Ⰺ	二十	〢十	𝍡〇	κ̅
30	л҃	Ⰻ	三十	〣十	𝍢〇	λ̅
100	р҃	Ⱃ҃	百	百	𝍠〇〇	ρ̅
1000	҂а	҂Ⰰ	千	千	𝍠〇〇〇	͵α



Reproduit avec permission de l'article « Origine des systèmes de numération » par Isabella G. Bachmakova et Adolf P. Youschkevitch, dans l'Encyclopédie des mathématiques élémentaires, tome 1, Arithmétique (en russe).

Nous observons en particulier que les anciens Grecs et plus tard les Russes utilisaient des désignations alphabétiques.

Nos modernes « chiffres arabes » et notre façon de les disposer pour représenter les nombres sont en réalité originaires de l'Inde. C'est là que les Arabes les apprirent ; puis eux-mêmes les introduisirent au Xe siècle de notre ère en Europe occidentale, où ils ont finalement en quelques siècles pris racine.

La première caractéristique de notre système de numération est d'être décimale. Mais ce n'est pas le plus important. Il serait tout à fait possible d'utiliser par exemple un système à base 12, en introduisant deux signes supplémentaires pour ce qui deviendrait alors les chiffres dix et onze.

Le point le plus important est que notre système est « positionnel », c'est-à-dire qu'un même chiffre a une signification différente selon la position qu'il occupe dans l'écriture du nombre. Pour saisir ce que cela veut dire, considérons par exemple le nombre 372. Quand on écrit 372, le chiffre 3 signifie trois centaines, le chiffre 7 sept dizaines et le chiffre 2 deux unités. Cette façon d'écrire est non seulement simple et concise, mais elle facilite aussi considérablement les calculs. La notation en chiffres romains est beaucoup plus malcommode. En numération romaine le nombre 372 s'écrit CCCLXXII. Multiplier ou même additionner deux grands nombres en restant dans le système de romain est malaisé.

Invention du zéro :

Dans la notation positionnelle, il est nécessaire d'avoir un signe pour exprimer « pas de chiffre à cette position-là », par exemple « trois centaines, pas de dizaines, et une unité », parce que si nous ne notons rien pour une position où il n'y a pas de chiffre, nous risquons de créer une confusion. Nous risquons de confondre trois-cent-un et trente-et-un. Pour cette raison, où il n'y a pas de chiffre nous mettons un zéro, qui signifie « pas de... » quelque chose. Ainsi nous ne confondrons pas 301 et 31. Le chiffre zéro, noté d'une manière ou d'une autre (par un point, un espace vide, ou un autre signe particulier), n'a commencé à apparaître, semble-t-il, que dans l'écriture cunéiforme des tablettes babyloniennes tardives.

L'utilisation systématique du zéro est une contribution des Indiens. Le premier manuscrit indien où l'on trouve le zéro utilisé clairement et systématiquement date du IX^e^ siècle de notre ère ; il y sert à noter le nombre 270 exactement comme nous le faisons. Cependant le zéro a commencé à être utilisé en Inde plus tôt, vraisemblablement dès le VI^e^ siècle. C'est cette invention du zéro qui a permis de donner une forme achevée à la notation positionnelle que nous utilisons de nos jours.

Mais ce n'est pas tout : non seulement le signe zéro résolvait commodément un problème pratique posé par la « notation positionnelle », mais surtout *zéro devint un membre à part entière de l'ensemble des nombres.* Zéro par lui-même veut dire « rien » – en sanskrit (l'ancienne langue de l'Inde et d'une partie de l'Asie) il est appelé « śūnya », qui se traduit par « rien ». Mais comme il apparaît toujours en relation avec d'autres nombres, zéro acquiert un contenu et des propriétés bien connues ; par exemple un nombre a quelconque plus zéro donne a, et multiplié par zéro donne zéro.

I.2.4 Retournons à l'arithmétique dans l'Antiquité. Les plus vieux documents mathématiques babyloniens ou égyptiens qui nous soient parvenus datent du deuxième millénaire avant jc. Ceux-ci et d'autres textes plus récents contiennent une variété de problèmes arithmétiques avec leur solution. On y trouve même des problèmes que l'on classifie de nos jours en algèbre, comme la recherche de la solution de certaines équations quadratiques et cubiques, ou des problèmes sur des suites de nombres (tout ceci, bien sûr, toujours présenté comme des questions spécifiques sur des exemples numériques).

De Babylone nous viennent des tables de carrés, de cubes et d'inverses de nombres. On peut supposer qu'un intérêt abstrait pour les mathématiques, pas directement liées à des problèmes concrets de la vie quotidienne, commençait à se faire jour dans ces civilisations.

En tout cas en Babylonie et en Égypte anciennes l'arithmétique était déjà bien développée. On ne peut toutefois pas encore parler de théorie mathématique des nombres, seulement d'un ensemble de règles pour compter et résoudre certains problèmes. C'est d'ailleurs encore ainsi que l'arithmétique est enseignée à l'école primaire. Et même les personnes qui n'ont pas fait d'études mathématiques comprennent l'arithmétique qu'ils ont apprise avec des bûchettes et des tables de multiplication. C'est tout à fait naturel. Cependant, sous cette forme, l'arithmétique ne peut pas encore être qualifiée de théorie mathématique ; elle ne contient pas de théorèmes généraux sur les nombres.

La transition vers la théorie de l'arithmétique fut graduelle.

Les notations, comme nous l'avons vu, permettent de faire des opérations sur des grands nombres que nous ne pouvons plus visualiser aisément comme des ensembles d'objets, ni compter facilement en commençant à 1. Si les tribus primitives savaient travailler sur des nombres particuliers comme 3, 10 ou 100, etc., la collection des nombres qu'elles connaissaient se terminait toujours par l'indéfini « beaucoup ». Les systèmes de notation et de dénomination des nombres en Chine, en Babylonie et en Égypte permettaient de considérer des nombres très grands comme des dizaines de milliers ou même des millions. Le fait que l'on pouvait continuer indéfiniment commençait confusément à être compris. Quand cela devint-il clair ? Nous ne le savons pas. Même Archimède (c. 287 - 212 av. jc), dans son célèbre traité *L'Arénaire*, pour nommer un très grand nombre parlait d'un « nombre plus grand que le nombre de grains de sable pouvant tenir dans une collection d'étoiles immobiles ». Autrement dit encore à son époque pour parler d'un très très grand nombre il fallait utiliser une périphrase.

Les Grecs, au troisième siècle avant jc, comprirent deux idées fondamentales : la première était que la suite des nombres pouvait être continuée indéfiniment ; la seconde, qu'on pouvait non seulement faire des opérations sur des nombres spécifiques donnés, mais qu'on pouvait aussi raisonner sur des nombres en général, sans avoir besoin de les spécifier numériquement, et qu'on pouvait ainsi formuler et prouver des théorèmes généraux sur les nombres. C'était une généralisation issue de la vaste expérience accumulée précédemment en faisant des opérations sur des nombres spécifiques. C'est à partir de cette expérience pratique que sont apparues peu à peu des lois et des techniques *générales* de raisonnement sur les nombres. Une transition vers un niveau supérieur d'abstraction fut ainsi à nouveau franchie : on est passé de nombres particuliers (eux-mêmes déjà abstraits, à partir de collections concrètes d'objets), vers des nombres en général, autrement dit *vers n'importe quel nombre*.

Du simple processus de comptage d'une collection d'objets, un par un, nous passons à l'idée d'un processus pour générer des nombres de manière illimitée en ajoutant chaque fois une nouvelle unité au dernier nombre qu'on a atteint. La série des nombres est maintenant perçue comme n'ayant pas de limite, et la notion d'infini entre en mathématiques. Évidemment, en pratique nous ne pouvons pas, en ajoutant constamment une nouvelle unité, aller jusqu'à n'importe quel nombre arbitraire. Qui peut compter jusqu'à un million de millions ? Même un siècle contient presque quatre cents fois moins de secondes.

Mais là n'est pas la question. Le processus d'accumulation d'unités, le processus de formation d'une collection arbitrairement grande d'objets, n'a pas fondamentalement de limite. Par conséquent *potentiellement* – ou si l'on préfère dire, en théorie – on peut aller aussi loin qu'on veut sans jamais être bloqué. Les limitations pratiques du comptage n'ont aucune incidence sur le caractère infini de la suite des nombres. Dans la théorie ces limitations pratiques ne jouent aucun rôle. Les théorèmes généraux sur les nombres portent sur des nombres sans limitation supérieure, et la plupart sur des collections « infinies ».

Les théorèmes généraux, portant sur une propriété quelconque des nombres en général, contiennent déjà des affirmations en nombre « infini » sur les propriétés d'ensembles de nombres particuliers. Ils sont qualitativement plus riches que n'importe quelle collection, aussi vaste soit-elle, d'affirmations sur des nombres particuliers. C'est pourquoi les théorèmes généraux doivent être prouvés par des raisonnements généraux s'appuyant sur les règles de construction des collections de nombres sur lesquels ils portent. Une caractéristique profonde des mathématiques apparaît encore ici : les mathématiques ont pour objet non seulement des relations quantitatives particulières, mais aussi des relations quantitatives possibles *en général*, et donc portant implicitement sur des infinités.

Dans les célèbres *Éléments* d'Euclide, écrits au troisième siècle avant jc, on trouve déjà des théorèmes généraux sur les nombres entiers, par exemple celui qui dit qu'il existe des nombres premiers plus grands que n'importe quel nombre arbitraire. On se rappelle qu'un nombre premier est un nombre entier positif qui n'a pas d'autre diviseur exact, c'est-à-dire sans reste dans la division, que 1 et lui-même.

C'est en commençant à établir des théorèmes généraux sur les nombres que l'arithmétique se transforma peu à peu en « théorie des nombres ». Elle s'éloigna des problèmes purement numériques pour se tourner vers les concepts et raisonnements abstraits. Elle accéda alors au domaine des « mathématiques pures ». Ou plutôt, ce fut la *naissance des mathématiques pures*, avec toutes les caractéristiques que nous avons décrites au début du chapitre. À la vérité, il faut dire que les mathématiques pures naquirent simultanément de l'arithmétique et de la géométrie. En outre, dans les résultats généraux d'arithmétique se trouvaient aussi des rudiments d'algèbre - domaine qui se sépara plus tard de l'arithmétique. Mais nous parlerons de cela plus loin.

Il nous reste maintenant à résumer toutes nos conclusions, parce que, bien que nous soyons restés à un niveau superficiel, nous avons néanmoins fait remonter l'émergence de l'arithmétique au début même du concept de nombre, et des réponses à nos quatre questions de la section I.1.2, page 10, commencent à prendre corps.

I.2.5 Étant donné que la naissance de l'arithmétique théorique, plus communément appelée aujourd'hui « théorie des nombres », participa à la naissance des mathématiques, il est naturel de nous attendre à ce que nos conclusions sur l'arithmétique éclairent des questions plus générales sur l'ensemble des mathématiques. Gardons à l'esprit ces questions générales, tout en y apportant des réponses en ce qui concerne l'arithmétique.

1) Comment sont apparus les concepts de l'arithmétique et qu'est-ce qu'ils reflètent réellement ?

Tout ce que nous venons de voir sur l'origine de l'arithmétique fournit une réponse à cette question. Ses concepts reflètent des relations quantitatives entre collections d'objets (ex. deux collections, de trois objets chacune, mises ensemble font une collection de six objets). Les concepts – de nombres, d'opérations, de propriétés diverses – furent construits à partir d'analyses et de généralisations issues d'un héritage immense d'expériences pratiques. Ils apparurent peu à peu. Pour les nombres eux-mêmes par exemple : d'abord, les nombres associés à des collections spécifiques d'objets (ex. six objets) ; ensuite, les nombres abstraits (le nombre six) ; enfin, le concept de nombre en général, un *nombre quelconque* n. Chacune de ces étapes fut franchie au terme d'une accumulation d'expérience lors de l'étape précédente. C'est d'ailleurs l'une des lois régissant la formation des nouveaux concepts en mathématiques ; ils naissent d'une suite progressive d'abstractions et de généralisations de plus en plus élevées, issues à chaque étape de l'expérience acquise au niveau précédent.

L'histoire de l'émergence des concepts arithmétiques dément tout à fait le point de vue des penseurs idéalistes qui soutiennent que ces concepts sont issus de la « pensée pure », d'une « intuition originelle », de la « contemplation des formes a priori » et de pas grand-chose d'autre.

2) Pourquoi les conclusions de l'arithmétique apparaissent-elles si convaincantes et immuables ?

Là encore la réponse nous est apportée par l'histoire. Nous avons vu que les conclusions de l'arithmétique ont été développées lentement et progressivement. Elles reflètent l'expérience accumulée sur une période immense par de très nombreuses générations d'êtres humains. C'est pourquoi elles sont maintenant câblées dans l'esprit humain. Elles sont incorporées dans le langage, dans le nom des nombres, dans les notations, dans la constante répétition des mêmes opérations avec les nombres, dans leurs applications pratiques et concrètes quotidiennes. Elles ont ainsi acquis leur clarté et leur caractère indiscutable. Les règles de la logique ont la même origine. Il n'y a, en outre, pas que la répétabilité qui joue un rôle essentiel, il y a aussi la stabilité et la clarté que les relations concrètes, objectives, vérifiables dans l'expérience, possèdent. Celles-ci ont donné naissance aux concepts de l'arithmétique et aux règles de raisonnement.

C'est là l'origine du caractère indiscutable de l'arithmétique ; ses conclusions découlent logiquement de ses concepts de base. Et les règles de la logique aussi bien que les concepts de l'arithmétique furent peu à peu gravés dans la conscience humaine au cours de millénaires d'expérience pratique, sur la base de lois objectives observables autour de nous.

3) Comment se fait-il que l'arithmétique, dont les concepts sont si abstraits, puisse avoir un champ d'applications aussi vaste ?

La réponse est simple. Les concepts et résultats d'arithmétique, issus d'une vaste expérience, expriment de manière abstraite les relations qu'on observe constamment et partout dans la réalité. Vous pouvez compter les choses dans une pièce, les étoiles dans le ciel, les gens, et les atomes... L'arithmétique se concentre sur certaines caractéristiques générales, en faisant abstraction de tout ce qui est particulier et concret. C'est précisément parce qu'elle reste à ce niveau des propriétés générales que ses résultats sont applicables dans tant de situations diverses. Autrement dit, la possibilité d'un large champ d'application est précisément garantie par le caractère abstrait de l'arithmétique. (Il est important aussi que cette abstraction ne soit pas creuse, mais procède d'une longue expérience pratique.) Le même commentaire s'applique aux mathématiques en général, à n'importe quelle théorie mathématique abstraite. L'étendue des possibilités d'application de la théorie dépend de celle des sources matérielles dont elle est la généralisation abstraite.

En même temps, n'importe quel concept, en particulier celui de nombre, a un sens limité, dû précisément à sa grande abstraction. Premièrement, quand on l'applique à un objet spécifique quelconque, il n'en reflète que certains aspects et donne en conséquence une image incomplète de l'objet. Nous savons tous comme il est fréquent que des données numériques donnent peu d'informations concrètes sur un sujet donné. Deuxièmement, les concepts abstraits ne peuvent pas être employés n'importe où sans s'assurer qu'ils auront un sens. Quand nous additionnons mentalement des objets, rien ne se passe concrètement avec ces objets. Mais si nous les additionnons réellement, si nous les rassemblons en pile ou en tas sur une table, alors ce n'est plus seulement une addition abstraite, mais un processus réel cette fois. Dans la réalité le processus ne consiste pas simplement en l'addition arithmétique abstraite, et, de fait, celle-ci ne modélise pas toujours bien ce qui se passe. Les objets entassés sur la table peuvent se casser en morceaux ; les animaux mis ensemble peuvent s'entredévorer ; des composants peuvent entrer en réaction physico-chimique ; ainsi, quand on mélange un litre d'eau et un litre d'alcool on n'obtient pas 2 litres de mélange mais seulement 1,9 litre, à cause de la dissolution mutuelle des liquides, etc. Est-il besoin d'autres exemples ? On pourrait en produire à volonté.

En bref, la vérité est concrète ; et le garder à l'esprit est particulièrement important quand on considère les mathématiques. Ce ne sont pas juste des abstractions.

4) Enfin la dernière question que nous avons posée concerne les forces qui poussent au développement des mathématiques.

Pour l'arithmétique, la réponse est déjà fournie clairement par l'histoire de son émergence. Nous avons vu qu'en pratique les hommes et les femmes commencèrent par maîtriser les décomptes de collections d'objets, et de là élaborèrent le concept de nombre. Ensuite l'utilisation des nombres exigea de pouvoir les noter, et cela ouvrit la voie à la maîtrise de problèmes plus ardus. En d'autres termes, le moteur du développement de l'arithmétique était l'usage qu'on en faisait. En outre, elle fait constamment le lien entre les utilisations pratiques et les généralisations abstraites qui en sont issues.

Les concepts abstraits qui furent élaborés à partir de l'expérience pratique devinrent eux-mêmes des outils importants, constamment améliorés par leurs utilisations. En même temps, l'élimination de tout ce qui est secondaire dans l'expérience pratique aide à révéler l'essence des concepts. Cela permet d'atteindre des solutions générales quand les propriétés et relations générales qui demeurent au terme du processus d'abstraction jouent un rôle décisif – dans le cas de l'arithmétique ce sont les relations quantitatives. De surcroît, la réflexion sur les concepts nous emmène souvent plus loin que ce qui est strictement nécessaire pour résoudre une tâche pratique. Ainsi, le concept de très grand nombre, comme un million ou un milliard, est apparu à la suite de considérations sur des nombres relativement petits qui étaient nécessaires en pratique. On commença à concevoir les grands nombres avant qu'ils s'avèrent eux aussi utiles en pratique. Les exemples de ce genre sont légion dans l'histoire des sciences. Il n'est que de se rappeler les nombres imaginaires – aujourd'hui appelés nombres complexes – déjà mentionnés. Toutes les remarques que nous venons de faire ne sont que des illustrations particulières d'une caractéristique générale de la connaissance : l'interaction entre l'expérience et la pensée abstraite, entre la pratique et la théorie.

I.3 Géométrie

I.3.1 L'histoire de l'origine de la géométrie est tout à fait comparable à celle de l'origine de l'arithmétique. Les premiers concepts géométriques et les premiers savoirs dans ce domaine remontent eux aussi aux temps préhistoriques et sont issus d'activités pratiques.

L'homme emprunta les formes géométriques à la nature. Le disque ou le croissant de lune, l'étendue plate d'un lac, la ligne droite d'un rai de soleil ou du tronc de certains arbres, tout cela existait bien avant que l'homme n'apparaisse sur terre. Et ces formes étaient constamment sous ses yeux quand l'espèce humaine apparut. Bien sûr, dans la nature nos yeux rencontrent rarement des lignes parfaitement droites, ou des triangles et des carrés aussi beaux que dans un cours de géométrie. Il est clair que l'homme conçut une idée de ces figures principalement car il les percevait activement dans la nature, et, pour ses besoins pratiques, fabriqua des objets ayant des formes de plus en plus régulières. Les gens construisaient leur logement, taillaient des pierres, clôturaient des champs, formaient des arcs avec une corde courbant une tige de bois souple, sculptaient des poteries, puis en produisaient de meilleures avec un tour. À partir des récipients fabriqués au tour ils conçurent l'idée de *cercle*, à partir des cordes des arcs celle de *ligne droite*. Bref, ils attachèrent d'abord la forme à l'objet, puis ils réalisèrent que cette forme, née dans leur esprit comme une qualité d'un objet, pouvait être considérée en elle-même, en faisant abstraction de l'objet matériel. Conscient que les objets matériels avaient des formes, un artisan pouvait améliorer ses produits et distinguer encore plus clairement le concept de forme. C'est pourquoi, ici aussi, les activités pratiques furent à l'origine du développement des concepts géométriques abstraits. Il fallut fabriquer des milliers d'objets avec une arête droite, tendre des milliers de cordes, dessiner un très grand nombre de lignes droites sur le sol pour en extraire l'idée claire d'une ligne droite en général, pour comprendre qu'il s'agissait d'un concept « abstrait » dont des représentations concrètes particulières étaient offertes par tous ces objets. De nos jours nous vivons entourés d'objets ayant des arêtes rectilignes fabriqués par des gens, nous avons appris à tirer nous-mêmes des lignes droites. Nous avons une idée claire des formes régulières depuis l'enfance.

Exactement de la même manière, après la forme, le concept de *quantité* géométrique – de longueur, de surface et de volume – est né de l'expérience. Les gens mesuraient des longueurs, déterminaient des distances, estimaient des surfaces rectangulaires et des volumes par simple examen visuel pour leurs besoins pratiques. Peu à peu dans ce contexte furent découvertes les lois générales les plus simples, les premières relations géométriques. Par exemple : la surface d'un rectangle est égale au produit de sa longueur par sa largeur. C'était utile pour un fermier de connaître cette relation afin d'estimer la taille d'une surface cultivée et par conséquent son rendement approximatif.

Ainsi des activités pratiques et des tâches de la vie quotidienne est née la géométrie. Voici ce qu'écrivait Eudème de Rhodes, un savant grec du IVe siècle avant jc : « La géométrie a été découverte d'abord par les Égyptiens. Elle est née du besoin de re-mesurer périodiquement les champs. C'était nécessaire à cause des crues récurrentes du Nil qui effaçaient tous les bornages entre propriétés. Il n'est pas surprenant que la découverte de la mesure des surfaces, comme les autres sciences, ait son origine dans les besoins pratiques. Tous les savoirs naissent dans un état imparfait et progressent vers la perfection. Ils passent ainsi des perceptions sensorielles vers les calculs quantitatifs, puis des calculs quantitatifs vers la théorie, et ils sont alors intégrés au corpus des connaissances. De même que chez les Phéniciens les nécessités du commerce et des échanges donnèrent l'impulsion vers la maîtrise des nombres, chez les Égyptiens l'invention de la géométrie est née du besoin de mesurer des champs. » D'ailleurs le mot géométrie signifie « mesure de la terre » (en grec ancien « gé » = terre, et « métrie » = mesure).

L'arpentage des champs n'est bien sûr pas la seule tâche qui poussa les Anciens à inventer la géométrie. On peut juger de la variété des problèmes que les Égyptiens et les Babyloniens se posèrent, et des solutions qu'ils apportèrent, par les extraits de textes qui nous sont parvenus. L'un des textes égyptiens les plus anciens que nous connaissions remonte vers

1500 avant jc – il s'agit d'un « guide pour les scribes » (des clercs royaux chargés de la tenue des documents officiels) écrit par un certain Ahmès. Il donne une liste de procédés pour calculer la capacité de récipients, le volume de bâtiments, la surface de terrains, l'importance de terrassements, etc.

Les Égyptiens et les Babyloniens furent capables de déterminer les surfaces et les volumes les plus simples. Ils connaissaient avec une précision raisonnable le ratio entre la circonférence du cercle et son diamètre ; il est même possible qu'ils aient su calculer la surface d'une boule. En un mot, ils avaient déjà des connaissances géométriques impressionnantes. Néanmoins, pour autant que l'on sache, ils ne concevaient pas encore la géométrie comme une science théorique avec des théorèmes et des démonstrations. De même que l'arithmétique de leur temps, la géométrie était pour eux essentiellement une collection de règles dérivées de l'expérience. En outre, la géométrie n'était pas du tout séparée de l'arithmétique. Les problèmes de géométrie étaient simultanément des problèmes d'arithmétique où il fallait calculer des choses.

Au VII^e siècle avant jc – les années -700 à -601 –, la géométrie égyptienne fut introduite, via l'Ionie, en Grèce où elle fut développée par les grands philosophes matérialistes Thalès (c.-625, c.-547), Démocrite (c.-460, c.-370) et d'autres. Les disciples de Pythagore (c.-580, c.-495), le fondateur d'une école philosophico-religieuse dans le sud de l'Italie, firent aussi des contributions importantes en géométrie.

Le développement de la géométrie s'orienta vers l'accumulation de nouveaux faits et la clarification de leurs relations. Ces relations se transformèrent progressivement en conclusions logiques concernant des propositions géométriques considérées en elles-mêmes. C'est ainsi que tout d'abord les concepts mêmes de théorème géométrique et de sa démonstration apparurent, puis que les faits les plus basiques furent clarifiés et que de nouveaux résultats purent en être déduits. Autrement dit on établit les axiomes de la géométrie et leurs premières conséquences. C'est de cette manière que progressivement la géométrie se transforma en une théorie mathématique.

Nous savons que l'exposition systématique des résultats commença à apparaître au Ve siècle avant jc – les années -500 à -401, appelé aussi le « Siècle de Périclès » ou « l'Âge d'or » de la Grèce antique –, mais elle ne parvint pas jusqu'à nous telle quelle. La raison en est bien sûr qu'elle fut supplantée, dès le IIIe siècle avant jc, par les *Éléments* d'Euclide. Dans cet ouvrage, la géométrie est présentée sous la forme d'un système si élégant que pendant plus de deux mille ans on n'a rien pu y ajouter de substantiel, jusqu'aux travaux de N. I. Lobatchevski (1792-1856). Encore au XXe siècle, le célèbre manuel de géométrie d'Andrei P. Kiselyov (1852-1940), et de nombreux autres ouvrages de géométrie scolaires dans le monde entier, dans leurs premières éditions, n'étaient rien de plus qu'une présentation à peine remaniée d'Euclide.

Peu d'ouvrages ont été aussi durables que ses *Éléments*. Cela s'explique par son souci de perfection qui était une marque du génie grec. Bien sûr, les mathématiques progressèrent et notre compréhension des fondations de la géométrie s'est beaucoup approfondie. Cependant les *Éléments* d'Euclide furent, et à de nombreux égards sont encore, un modèle de livre de mathématiques pures. Dans cet ouvrage, qui synthétise les connaissances accumulées par plusieurs savants ayant vécu avant lui, Euclide présente les mathématiques de son époque comme une science théorique indépendante, telle que finalement on la considère encore aujourd'hui.

I.3.2 L'histoire de l'origine de la géométrie offre des illustrations conduisant aux mêmes conclusions que l'histoire de l'origine de l'arithmétique. Nous voyons que la géométrie est née de la pratique et que sa transformation en théorie mathématique fut précédée d'une très longue gestation.

La géométrie opère sur les « choses et figures géométriques ». Elle étudie leurs relations en termes de magnitude et de position relative. Mais une chose géométrique est avant tout une chose matérielle, considérée seulement du point de vue de sa forme spatiale, en faisant abstraction de ses autres propriétés comme sa densité, sa couleur, son odeur, son poids, etc. Des propriétés d'un objet la géométrie ne retient que sa *forme* et ses *dimensions*.

À vrai dire une figure géométrique peut être un concept encore plus général. On peut même faire abstraction de certaines extensions spatiales des objets à l'origine des concepts ; par exemple, une surface n'a que deux dimensions et une minceur infinie, une ligne n'a qu'une dimension, et un point aucune. Un point n'a pas de mesure. C'est évidemment un concept abstrait. Ça peut être la borne d'un segment, ou bien l'idée d'un lieu dont, à la limite, les dimensions spatiales ont disparu et qui n'a plus de parties. C'est d'ailleurs ainsi qu'Euclide définit ces différents concepts.

Nous voyons donc que la géométrie a pour objet d'étude les formes et dimensions spatiales et les relations entre choses spatiales réelles, mais considérées sous leur aspect abstrait quand on a éliminé toutes leurs autres propriétés, autrement dit considérées comme de « pures formes ». C'est précisément ce niveau d'abstraction qui distingue la géométrie des autres sciences qui se penchent aussi sur des formes spatiales et des relations entre choses. En astronomie, par exemple, la position relative des corps – mais des corps célestes – est étudiée ; en géodésie, la forme de la Terre ; en cristallographie, la forme des cristaux, etc. Dans ces cas-là, la forme et l'emplacement de corps spécifiques sont étudiés en relation avec d'autres de leurs propriétés qui ne sont pas géométriques (par exemple les masses des planètes).

Du processus d'abstraction qu'opère la géométrie résulte sa nature spéculative. Avec des lignes droites sans épaisseur, avec de « pures formes », on ne peut plus faire d'expériences. On en est réduit à raisonner, une conclusion atteinte servant de point de départ vers une suivante. C'est pourquoi les théorèmes de géométrie doivent être démontrés par des raisonnements, sinon ils n'appartiendraient pas à la géométrie, car ils ne concerneraient pas de « pures formes ».

L'évidence des concepts initiaux de la géométrie, les méthodes de raisonnement, et l'indiscutabilité de ses conclusions sont donc comparables à ce qu'on a vu en arithmétique. Les propriétés des concepts géométriques, comme les concepts eux-mêmes, ont été élaborées par l'homme à partir de l'observation de la nature dans un processus d'abstraction. Les gens ont dessiné de très nombreuses lignes droites avant d'être capables de formuler l'axiome stipulant que par n'importe quelle paire de points on peut faire passer une ligne droite et une seule ; des milliards de fois ont-ils déplacé des objets et constaté que dans certains cas on pouvait les superposer, avant de parvenir à l'idée générale d'identité de certaines formes, en faire un concept abstrait et, par la suite, l'utiliser pour démontrer des théorèmes (comme on le fait par exemple dans les théorèmes bien connus sur l'égalité des triangles).

Pour finir, parlons du champ d'application très général de la géométrie. Le volume d'une sphère de rayon R est égal à

$$\frac{4}{3}\pi R^3$$

quelle que soit la sphère considérée. Ça peut être un récipient sphérique, une boule en acier, une étoile, une gouttelette d'eau, etc. La géométrie a été capable d'identifier des caractéristiques *communes* à des collections de corps, car tous les corps dans la réalité ont plus ou moins une certaine forme, une certaine taille, une position relative par rapport aux autres corps. Ce n'est donc pas une surprise si la géométrie a un champ d'application presque aussi vaste que l'arithmétique. L'ouvrier qui mesure les dimensions d'un objet ou qui lit une épure, l'artilleur qui détermine la distance d'une cible, le fermier d'un kolkhoze qui mesure la surface d'un champ cultivé, le travailleur qui estime le volume d'un terrassement, tous utilisent des résultats élémentaires de géométrie. Le navigateur, l'astronome, l'arpenteur, l'ingénieur, le physicien ont tous besoin, quant à eux, de résultats précis de géométrie.

Un exemple remarquable de solution géométrique abstraite à un important problème en sciences de la nature est offert par les travaux du célèbre cristallographe et géomètre E.S. Fedorov (1853-1919). Il s'était fixé pour objectif de trouver toutes les symétries possibles d'un cristal ; c'est un des problèmes les plus importants en cristallographie. Pour résoudre son problème, Fedorov fit abstraction de toutes les propriétés physiques des cristaux, se concentrant uniquement sur l'aspect arrangement géométrique présentant des symétries, appelées aussi des invariances, qu'est un cristal. Il ne prit pas en considération la nature des atomes qui le composent. Le problème se ramenait alors à trouver toutes les symétries qu'un arrangement géométrique d'éléments dans l'espace pouvait avoir. Fedorov résolut complètement cette question purement géométrique et trouva qu'il y avait exactement 230 symétries possibles. Voilà comment, en même temps qu'une contribution à la cristallographie, la résolution du problème de trouver toutes les symétries possibles représenta un apport fondamental à la géométrie et servit de point de départ à de nombreux développements dans cette discipline. Dans cet exemple, comme dans toute l'histoire de la géométrie, nous voyons le facteur principal qui a poussé à son développement : c'est l'interaction entre l'application pratique et l'abstraction théorique. Le problème de trouver leurs symétries, qui venait de l'observation des cristaux, fut formulé en termes abstraits et donna naissance à une nouvelle théorie mathématique – la théorie de certains systèmes réguliers appelés groupes de Fedorov (cf. chapitre XX dans le volume 3). Ensuite, cette théorie trouva non seulement une brillante confirmation dans l'observation des cristaux (on en trouva avec de nouvelles formes prévues par la théorie), mais servit aussi de guide pour le développement de la cristallographie et donna naissance à de nouvelles études tant expérimentales que purement mathématiques.

I.4 Arithmétique et géométrie

I.4.1 Jusqu'ici, nous avons considéré l'arithmétique et la géométrie chacune séparément. Leurs interrelations, et d'une manière générale les liens entre plusieurs théories mathématiques, n'ont pas retenu notre attention. Cependant les relations entre l'arithmétique et la géométrie sont très importantes. L'étude des liens entre théories fait avancer les mathématiques et révèle aussi des liens correspondants dans la réalité que ces théories reflètent.

L'arithmétique et la géométrie non seulement ont chacune des applications dans l'autre, mais conduisent aussi conjointement à des idées, méthodes et théories nouvelles. En fin de compte on peut dire que l'arithmétique et la géométrie sont les deux parents qui ont engendré toutes les mathématiques. Leur interaction remonte à l'époque où chacune était encore dans l'enfance. La simple mesure d'une longueur combine déjà de la géométrie et de l'arithmétique. Pour mesurer la longueur d'un objet, nous choisissons une unité de longueur puis nous *comptons* combien de fois on peut la *faire tenir physiquement* bout à bout le long de l'objet. La première opération, consistant à placer l'unité, un certain nombre de fois, le long de l'objet, est géométrique, la seconde, consistant à compter, est arithmétique. En comptant le nombre de pas que l'on fait en marchant le long d'une route on accomplit aussi ces deux opérations.

D'une manière générale la mesure d'une quantité quelconque consiste en une série d'opérations spécifiques à cette quantité en même temps qu'en un comptage. Pensons par exemple à la mesure d'un volume de liquide à l'aide d'un récipient servant d'unité, ou à la mesure d'une durée avec un pendule dont on compte les oscillations.

Chacun sait, quand on mesure quelque chose à l'aide d'une unité de mesure, que généralement l'unité choisie ne tient pas exactement un nombre entier de fois dans la chose mesurée. Il est alors nécessaire de diviser l'unité afin de pouvoir exprimer la mesure non plus avec un nombre entier mais avec une fraction. C'est ainsi que sont apparues concrètement les fractions, comme l'indiquent les documents historiques et d'autres sources. Elles sont issues de la comparaison de quantités *continues* – par opposition à *discrètes* – et de la division que l'on opère dans une mesure. Les premières quantités que les hommes mesurèrent étaient des quantités géométriques : des longueurs, des surfaces cultivées, des volumes de liquide ou de grain. C'est donc l'interaction entre l'arithmétique et la géométrie qui conduisit à l'émergence de l'important nouveau concept de fraction. Il s'agit d'une extension du concept de nombre des nombres entiers vers les nombres fractionnaires – ce que les mathématiciens appellent les *nombres rationnels*, car ils peuvent être exprimés sous forme de ratios de nombres entiers. Les fractions ne pouvaient pas apparaître directement de la division abstraite des nombres entiers car l'arithmétique des nombres entiers se limitait aux nombres entiers. Trois personnes, trois flèches, etc. – tout cela a un sens, mais deux tiers d'une personne ou un tiers de flèche n'ont pas de sens utile dans la pratique ; même trois tiers de flèche ne permettent pas de tuer un cerf – pour cela il faut une flèche d'un seul tenant.

I.4.2 Dans le développement du concept de nombre à la suite des interactions entre l'arithmétique et la géométrie, l'émergence des fractions ne fut qu'une étape. Elle fut suivie par la découverte des segments incommensurables. Le lecteur et la lectrice se rappellent que deux segments sont incommensurables s'il n'existe pas d'unité, aussi petite soit-elle, qui permette de mesurer chacun des deux avec un nombre entier. Autrement dit, deux longueurs sont incommensurables si leur ratio ne peut pas être exprimé par une fraction, c'est-à-dire le ratio de deux nombres entiers.

Au début les gens ne se posaient pas vraiment la question de savoir si une longueur pouvait toujours être exprimée comme une fraction d'une unité de longueur. Si après division ou mesure, il restait un bout, trop petit pour être mesuré, ils se contentaient de le négliger. Une mesure infiniment précise n'avait pas de sens pour eux. Démocrite avança même l'idée que les figures géométriques étaient composées de sortes d'atomes. Les segments, selon lui, étaient des rangées d'atomes. Par conséquent le ratio des longueurs de deux segments était, dans sa version d'une précision exacte, simplement le ratio du nombre d'atomes contenus respectivement dans l'un et dans l'autre. Cette façon de voir les choses, qui de nos jours peut sembler étrange, s'avéra cependant très fructueuse pour déterminer des surfaces et des volumes. Les surfaces étaient des sommes de rangées d'atomes mises côte à côte, et les volumes étaient des empilements de surfaces. Par cette voie d'attaque Démocrite fut capable de trouver le volume d'un cône.

Le lecteur ou la lectrice qui a quelques notions de calcul intégral notera que cette façon de procéder contient en germe les méthodes du calcul intégral pour calculer les surfaces et les volumes.

Il faut en outre faire l'effort, quand on pense au temps de Démocrite, durant « l'Âge d'or » de la Grèce, d'oublier les concepts qui nous sont maintenant devenus familiers grâce au développement des mathématiques. À son époque les figures géométriques n'étaient pas encore des objets détachés de leurs supports concrets comme elles peuvent l'être aujourd'hui. C'est pourquoi Démocrite, qui pensait que les corps matériels étaient composés d'atomes, était naturellement conduit à considérer les figures géométriques comme composées aussi d'atomes.

Mais l'idée que les segments soient composés d'atomes entrait en conflit avec le théorème de Pythagore, puisque celui-ci implique qu'il y a des segments incommensurables entre eux ; par exemple la diagonale d'un carré est incommensurable avec son côté. Autrement dit le ratio de leurs longueurs ne peut pas être exprimé par une fraction. Démontrons que le côté et la diagonale d'un carré sont effectivement incommensurables. Si a est la longueur du côté, et b la longueur de la diagonale du carré, alors par le théorème de Pythagore on a

$$b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \quad \text{ou encore} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2$$

Cependant, il n'existe pas de fraction dont le carré soit égal à 2. Donc a et b ne peuvent pas tous les deux être des nombres entiers de fois une longueur choisie comme unité. Pour démontrer qu'il n'existe pas de fraction dont le carré soit égal à 2, raisonnons par l'absurde en commençant par supposer qu'il existe une telle fraction. Supposons donc que p et q sont deux nombres entiers tels que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que p et q n'ont pas de diviseur commun, car s'ils en avaient on pourrait simplifier la fraction, et arriver à un numérateur et un dénominateur sans diviseur commun.

Maintenant, si $(p/q)^2 = 2$ alors $p^2 = 2q^2$. Donc p^2 est divisible par 2. Dans ce cas p^2 doit même être divisible par 4 car c'est le carré d'un entier. Par conséquent $p^2 = 4q_1$ et q^2 qui est la moitié de p^2 satisfait $q^2 = 2q_1$. Il s'ensuit que q aussi doit être divisible par 2. Cela, cependant, contredit l'hypothèse que p et q n'ont pas de diviseur commun. Nous sommes arrivés à une contradiction, ce qui prouve ainsi par l'absurde que le ratio des longueurs b/a ne peut pas être exprimé par un nombre rationnel. En d'autres termes la diagonale et le côté d'un carré sont incommensurables.

Cette découverte fit une très forte impression sur les savants grecs. De nos jours, les nombres irrationnels nous sont familiers et nous considérons sans y prêter d'attention particulière des racines carrées et d'autres racines. L'existence de segments incommensurables entre eux ne nous pose pas de problème. Mais il n'en était pas ainsi pour les savants grecs au Vᵉ siècle avant jc. Après tout, ils n'avaient pas le concept de nombre irrationnel, et ils n'écrivaient pas de symbole comme $\sqrt{2}$. Pour eux, le résultat que nous venons d'obtenir signifiait que le ratio entre la longueur de la diagonale et la longueur du côté ne pouvait être exprimé avec aucun nombre [1].

1. Cela troubla beaucoup Pythagore qui proclamait que « tout est nombre ». Son école chercha à cacher ce résultat qui ne devint bien connu qu'au IVᵉ siècle avant jc. C'est pourquoi Démocrite (c. -460, c. -370), né pourtant plus de trente ans après la mort de Pythagore, pouvait encore soutenir que les figures étaient composées d'atomes – ce qui était incompatible avec l'incommensurabilité. (Toutes les notes de bas de page sont du traducteur.)

En même temps que l'existence de segments incommensurables, fut aussi révélé aux Grecs un certain secret contenu dans la notion même de continuité : quand on considère un mouvement le long d'un chemin continu une sorte de contradiction dialectique apparaît. Il s'agit plus généralement de la subtilité du lien entre le discret et le continu. Les philosophes discutèrent de cette contradiction, en particulier Zénon d'Élée (-490, -430) avec ses célèbres paradoxes.

Les Grecs créèrent la théorie des relations entre segments (et entre quantités en général), prenant en compte l'existence de segments incommensurables. On l'appelle aujourd'hui la *théorie des nombres réels*, laquelle dépasse les applications géométriques auxquelles la confinaient les Grecs. L'élaboration de cette théorie est attribuée au savant grec Eudoxe de Cnide (-408, -355). Elle est exposée dans les *Éléments* d'Euclide, et est enseignée sous une forme simplifiée dans les cours de géométrie au lycée.

Beaucoup plus tard, les savants mathématiciens réalisèrent que le ratio d'un segment avec un autre sélectionné comme unité, c'est-à-dire simplement la longueur du premier, sans s'occuper de savoir si une fraction l'exprimait, pouvait aussi être considéré comme un nombre, c'est-à-dire pouvait servir à *définir* les nombres, généralisant ainsi le concept même de nombre. Mais cette idée était inaccessible aux Grecs ; et ils ne créèrent jamais le concept de nombre irrationnel.

Du fait que la mesure des longueurs et autres quantités dépassait donc les possibilités de l'arithmétique, mais était naturellement incluse dans la géométrie, pour les Grecs *les mathématiques étaient la géométrie.* Dans l'Antiquité grecque, par exemple, des problèmes qui de nos jours sont simplement des équations quadratiques que nous traitons par l'algèbre étaient posés et résolus purement géométriquement. Les *Éléments* d'Euclide contiennent de nombreux problèmes de ce genre. Apparemment pour ses contemporains ils représentaient non seulement des problèmes de géométrie, au sens où nous l'entendons aujourd'hui, mais ils étaient *les problèmes de mathématiques* en général. Cette domination de la géométrie sur les mathématiques perdura jusqu'à ce que Descartes (1596-1650) au contraire subordonne la géométrie à l'algèbre. Des vestiges de la domination antérieure de la géométrie se rencontrent encore dans des terminologies comme « le carré » ou « le cube » d'un nombre pour parler du nombre à la puissance deux ou à la puissance trois : a^3 est le volume d'un cube de côté a.

Définition des nombres réels dégagée de la géométrie :

Pour revenir au concept de nombre irrationnel, il n'apparut qu'à une époque bien postérieure à l'Antiquité grecque chez les mathématiciens orientaux. Puis, finalement, une définition mathématiquement rigoureuse des nombres réels, qui ne repose pas sur la géométrie, n'a été établie que relativement récemment, dans les années 1870-80. Nous ne parlons pas d'une définition « descriptive » des nombres réels, mais d'une définition axiomatique permettant de démontrer de nombreuses autres propriétés des nombres réels au-delà de leur interprétation purement géométrique. Naturellement, une telle définition ne pouvait apparaître que longtemps après les Grecs, quand le développement des mathématiques, en particulier du calcul infinitésimal, exigea une définition claire de l'ensemble dans lequel la « variable x » pouvait prendre ses valeurs. La définition, avec diverses variantes équivalentes, ne fut établie, comme on vient de le dire, qu'au XIX[e] siècle par les mathématiciens allemands Karl Weierstrass (1815-1897), Richard Dedekind (1831-1916) et Georg Cantor (1845-1918). L'immense période de temps qui s'est écoulée entre l'apparition, dans le cadre des relations entre l'arithmétique et la géométrie, des incommensurables, qui conduisirent aux nombres réels, et la définition rigoureuse de ces derniers, montre comme est lente la gestation des concepts abstraits et difficile leur formulation précise.

I.4.3 Parlant du concept de nombre réel dans son traité *Arithmetica Universalis* Newton écrit : « Par nombre nous ne voulons pas tant dire une collection d'unités qu'une relation abstraite entre une quantité et une autre choisie comme unité. » Ce nombre (ratio) peut être un entier, un rationnel ou un irrationnel, si sa valeur est incommensurable avec l'unité.

Le nombre réel, ou pourrait-on même dire le nombre « matériel », dans son sens originel n'est donc rien d'autre que le ratio entre une quantité et une autre prise comme unité ; dans certains cas il s'agit d'un ratio de segments, mais ça peut aussi être un ratio de surfaces, de poids, etc. Autrement dit un nombre réel est un ratio de quantités en général, considérées dans l'abstrait indépendamment de leur nature concrète.

De même que les nombres entiers *abstraits* n'ont pas de signification individuelle, mais acquièrent un sens et une utilité seulement en tant que système numérique, les nombres réels *abstraits* n'ont de contenu et ne sont utiles que dans leurs relations les uns aux autres, c'est-à-dire là encore dans un système de nombres, ou, pour utiliser un langage plus moderne, une *structure mathématique*.

En théorie des nombres réels, comme en arithmétique, les premiers outils importants après les nombres eux-mêmes sont les quatre opérations, addition, soustraction, multiplication, division, et les relations d'ordre « plus grand que » et « plus petit que ». Ces opérations ou relations reflètent des relations réelles entre diverses quantités ; par exemple, l'addition de nombres réels reflète l'addition de segments concrets. Les opérations avec des nombres réels abstraits apparurent au Moyen Âge d'abord chez les mathématiciens orientaux. Plus tard, et seulement progressivement, on comprit l'importance de la caractéristique principale des nombres réels, qui est leur *continuité*. Le système des nombres réels est le pendant abstrait de l'ensemble des valeurs que peut prendre une quantité variant de manière continue.

Ainsi, comme l'arithmétique des nombres entiers, l'arithmétique des nombres réels s'occupe des relations quantitatives concrètes entre quantités, cette fois-ci continues. Elle les étudie dans leur aspect général, faisant abstraction de toutes leurs spécificités concrètes. C'est précisément parce que le concept de nombre réel extrait ce qui est commun à toutes les quantités continues, qu'il a autant d'applications : les valeurs de diverses quantités, que ce soit des longueurs, des poids, des intensités de courant électrique, des énergies, etc., sont exprimées par des nombres. Et les relations, autrement dit les dépendances entre les valeurs sont décrites par les relations entre leurs valeurs numériques.

Afin que le concept général de nombre réel puisse servir de base à une théorie mathématique, il est nécessaire de lui donner une définition mathématique formelle. Il y a plusieurs manières de faire, qui sont équivalentes, mais la plus naturelle est sans doute de partir de la *mesure* de quantités, car c'est elle justement qui a conduit à la généralisation du concept de nombre.

Nous allons parler de la longueur de segments, mais le lecteur ou la lectrice observera aisément que l'on pourrait procéder de la même façon à partir de n'importe quelle mesure divisible autant qu'on veut. Supposons que l'on veuille mesurer le segment AB à l'aide du segment CD qui a été choisi comme unité (fig. I.1).

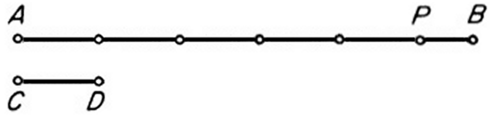


Figure I.1 : Mesure d'un segment à l'aide d'un autre segment choisi comme unité

En démarrant par exemple à A, nous plaçons bout à bout le long de AB des répliques du segment CD, autant de fois qu'on peut. Supposons qu'on puisse le faire n_0 fois. Si après cette première étape, il reste le segment PB (forcément plus court que CD), nous découpons le segment CD en dix parties égales, et nous mesurons PB avec un segment de longueur un dixième d'unité. Supposons que l'on puisse disposer n_1 segments d'un dixième de CD. Si après cette deuxième étape il y a encore un reste (inférieur à un dixième), nous découpons un segment d'un dixième en dix centièmes, et recommençons l'opération une troisième fois avec un centième d'unité, et ainsi de suite. Soit les étapes, à un moment donné, prennent fin car la dernière mesure tombe juste, soit elles se poursuivent indéfiniment. Mais dans tous les cas nous parvenons au fait que dans le segment AB on peut faire tenir n_0 fois le segment CD en entier, plus n_1 fois un dixième de CD, plus n_2 fois un centième, etc. Bref, nous obtenons la valeur du ratio de AB sur CD avec une précision croissante, d'abord au dixième d'unité près, puis au centième près, etc. La relation elle-même va donc être représentée par un nombre décimal comprenant la partie entière n_0, et la mantisse formée de la première décimale n_1, la deuxième décimale n_2, la troisième décimale n_3, etc.

$$\text{AB} \ / \ \text{CD} = n_0, n_1 n_2 n_3 ...$$

L'expression de ce ratio peut être infinie, ce qui veut dire qu'on peut l'estimer de manière de plus en plus précise sans limite de précision.

Ainsi un ratio de segments (ou plus généralement de quantités) est toujours représenté par un nombre décimal (au développement fini ou en théorie infini). Dans cette représentation mathématique toutefois il n'y a plus trace des quantités concrètes concernées. C'est pourquoi justement elle n'exprime plus qu'une relation abstraite, c'est-à-dire un nombre réel. Un nombre réel peut être formellement défini comme un nombre décimal avec un nombre fini ou infini de décimales. Un nombre dont le développement décimal comme ci-dessus contient à partir d'un certain rang n_p seulement des 9 comme décimales, est identifié au nombre où la décimale n_{p-1} est montée d'un cran et devient la dernière, selon la règle bien connue que $0,139999... = 0,14$.

Pour terminer, il faut encore pouvoir effectuer des opérations (l'addition, etc.) sur les nombres décimaux. Et il faut le faire de telle sorte que les opérations sur ces nombres décimaux, ou fractions quand ce sont simplement des fractions, correspondent aux actions sur les quantités concrètes. Ainsi, quand on additionne des segments, leurs longueurs s'additionnent, c'est-à-dire la longueur du segment AB + BC est égale à la somme des longueurs de AB et de BC.

Opérations sur les nombres réels :

Quand on effectue des opérations sur les nombres réels, on se heurte à la difficulté que ces nombres sont généralement représentés par des nombres décimaux ayant une suite infinie de décimales, alors que les règles usuelles pour les opérations s'appliquent seulement aux nombres décimaux ayant une suite finie de décimales. Nous avons besoin d'une définition rigoureuse des opérations dans le cas infini. Voici comment on procède. Supposons, par exemple, que nous devions additionner les deux nombres a et b. Nous choisissons d'abord la précision avec laquelle nous souhaitons travailler, par exemple une précision d'un millionième d'unité. Alors nous prenons a et b arrondis à six chiffres après la virgule et les additionnons. Nous obtenons la somme $a + b$ avec une précision de deux millionièmes (car les erreurs maximales possibles s'ajoutent). De cette manière nous pouvons calculer la somme de deux nombres *avec la précision qu'on veut*. En ce sens elle est parfaitement définie, même si à chaque étape des calculs elle est connue seulement avec une certaine précision. Ceci, toutefois, répond à l'essence du problème, car chaque grandeur a ou b est connue, elle aussi, avec seulement une certaine précision. Et la valeur exacte d'une grandeur, représentée par un nombre ayant un nombre infini de décimales, est obtenue en général comme le résultat d'un processus lui-même infini de mesure de plus en plus précise. La relation « plus grand que » ou « plus petit que » peut alors être définie à l'aide de l'addition : $a > b$ s'il existe un nombre c tel que $a = b + c$ (on parle de nombres positifs).

Continuité des nombres réels :

La *continuité des nombres réels* est la propriété suivante : si la suite des nombres réels a_1, a_2, ... est croissante, et celle des nombres réels b_1, b_2, ... est décroissante, et $a_i < b_i$ est constamment vérifié, alors il existera toujours un nombre réel c entre les deux suites. Illustrons cela en faisant correspondre les nombres réels aux points sur la droite de la manière habituelle.

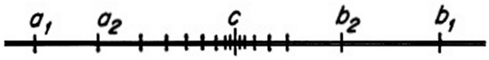


Figure I.2 : Continuité des nombres réels

On voit clairement sur cette figure que l'existence du nombre c, et du point correspondant, signifie simplement l'absence de trou ou de saut dans l'ensemble des nombres réels. C'est-à-dire, ils forment un ensemble continu.

I.4.4 Déjà dans l'exemple des interactions entre l'arithmétique et la géométrie on peut voir que le développement des mathématiques résulte de nombreux conflits entre tendances opposées présents en mathématiques : le concret et l'abstrait, le particulier et le général, le formel et le substantiel, le fini et l'infini, le discret et le continu, etc.

Essayons, par exemple, de retracer le conflit entre le concret et l'abstrait dans la création du concept même de nombre réel. Comme nous l'avons vu, un nombre réel est le résultat d'un *processus sans fin de mesure* de plus en plus précise, ou, dans un sens légèrement différent, la valeur *infiniment, absolument* précise de la mesure d'une grandeur. Cela correspond au fait qu'en géométrie on considère des corps de formes et dimensions idéalisées, faisant totale abstraction de l'imprécision, en termes de position, forme et dimension, inhérente aux choses concrètes qu'on perçoit dans la réalité. Dans la fig. I.1 ci-dessus nous avons parlé de la mesure exacte d'un segment idéalisé.

Cependant, les formes géométriques parfaites et les quantités exprimées avec une précision absolue sont des abstractions. Aucun objet concret n'a une forme absolument précise, de même qu'aucune quantité concrète ne peut être non seulement mesurée de manière parfaitement exacte, mais même *ne possède* de valeur parfaitement exacte. Les règles graduées par exemple n'ont plus de sens si on descend en dessous de l'échelle atomique. Au-delà des limites bien connues des mesures les plus précises se produit un changement qualitatif dans le sens qu'on peut attacher à la mesure d'une quantité. Elle perd son sens ordinaire. Par exemple, on ne peut plus parler de la pression d'un gaz en dessous de la quantité de mouvement d'une seule molécule. Une charge électrique cesse d'être une quantité continue quand on atteint la précision de la charge d'un électron, etc. Étant donné qu'il n'existe pas dans la nature d'objets ayant des formes idéales parfaites, l'affirmation selon laquelle le ratio de la diagonale du carré avec son côté est $\sqrt{2}$, non seulement ne peut pas être vérifiée par des mesures aussi précises soient-elles, mais n'est jamais absolument exacte pour un carré réel.

La conclusion que la diagonale et le côté du carré sont incommensurables découle, comme nous l'avons vu, du théorème de Pythagore. C'est une conclusion *théorique* dans une construction à partir de données expérimentales. C'est le résultat de l'application de la logique à des prémisses géométriques élaborées à partir de l'expérience.

Ainsi le concept de segments incommensurables, et plus encore de nombre réel, n'est pas le reflet simple et direct des faits, mais va en quelque sorte au-delà de l'expérience immédiate. Cela reste toutefois compréhensible : le nombre réel ne reflète pas une quelconque grandeur spécifique, mais une grandeur en général, en faisant abstraction de tout ce qui est particulier, autrement dit il est l'expression de ce qui est *général* dans une quantité concrète particulière. Cet aspect général consiste, pour partie, en ce que la valeur de la grandeur considérée peut être exprimée de plus en plus précisément. Dans la réalité le processus de mesure de plus en plus précis, à un moment donné, selon la nature de la grandeur spécifique, devient vague et la limite vers laquelle il est supposé converger s'évanouit. Mais dans la théorie, où nous faisons abstraction des aspects matériels de la grandeur mesurée, le processus conserve un sens.

Ainsi la théorie *mathématique* des grandeurs, qui les considère en faisant abstraction de leur nature concrète et spécifique, doit inévitablement considérer la possibilité d'un raffinement infini de la mesure de leur valeur, ce qui nous conduit *nécessairement* au concept de nombre réel. En même temps, puisque les mathématiques ne reflètent que ce qui est général dans différentes quantités, elles omettent les caractéristiques spécifiques de chaque cas individuel. « Un individu particulier, souligne Lénine, ne correspond jamais parfaitement au cas général... » (V.I. Lénine, *Cahiers philosophiques*, Éditions politiques du Comité central du Parti communiste de l'Union soviétique, 1947, p. 329.)

En mettant en relief les propriétés générales, les mathématiques développent et travaillent sur des abstractions clairement définies, sans se préoccuper des limitations concrètes de leurs applications. Et c'est précisément parce que ces limites ne sont pas les mêmes dans chaque cas qu'on travaille sur des abstractions. Les limites dépendent des propriétés spécifiques des phénomènes étudiés, et des changements qualitatifs dans ces phénomènes. Par conséquent, quand on applique les mathématiques, il est nécessaire de vérifier la validité de l'application d'une théorie particulière. Ainsi, considérer une substance comme continue, exprimer les mesures de ses différentes qualités avec des valeurs continues n'est permis que si on peut, par exemple, omettre sa structure atomique. Ceci n'est possible que sous certaines conditions et dans certaines limites.

En dépit de ces limitations, les nombres réels se sont avérés un outil mathématique extrêmement puissant pour la modélisation et l'étude des quantités et processus continus. Leur théorie est confortée par la pratique. Ils sont irremplaçables en physique, ingénierie et chimie. Ainsi la pratique prouve que le concept de nombre réel reflète correctement les propriétés générales des quantités continues.

Mais cette justesse n'est pas sans restriction ; la théorie des nombres réels ne peut pas être regardée comme quelque chose d'absolu, autorisant des développements abstraits illimités en faisant abstraction complète de la réalité.

Le concept même de nombre réel continue à évoluer, et en fait son développement est loin d'être achevé.

I.4.5 Le rôle de l'une des oppositions mentionnées ci-dessus, celle entre le discret et le continu, peut aussi être observé notamment dans le cas du développement du concept de nombre. Nous avons déjà vu que les fractions sont apparues dans la division de quantités continues.

Sur la division il existe une devinette amusante qui est aussi très instructive : Mamie a acheté trois pommes de terre de forme irrégulière et doit les diviser équitablement entre ses deux petits-enfants. Comment faire ? Réponse : il faut faire de la purée.

Au-delà de sa chute humoristique, la réponse contient une vérité profonde sur l'opposition entre le discret et le continu. Les objets individuels, que l'on compte avec des nombres entiers, sont indivisibles en ce sens que la plupart du temps, après division, ils changent de nature et cessent d'être ce qu'ils étaient, comme le montrent clairement les exemples de « tiers d'une personne » ou « tiers d'une flèche ». Au contraire, les quantités ou substances qui présentent un caractère continu et homogène peuvent aisément être divisées ou additionnées sans changer de nature. La purée est un bon exemple de telle substance homogène, qui, bien que ne présentant pas en soi de parties, est cependant aisément divisible en autant de parts aussi petites que l'on veut. Les longueurs, les aires, les volumes ont la même propriété. Le concept même de continu est ce qui n'est réellement pas divisé, mais potentiellement divisible à l'infini.

Nous sommes ainsi confrontés à deux opposés : d'un côté les choses indivisibles, unitaires, *discrètes* comme on dit, et d'un autre côté les substances infiniment divisibles, qui néanmoins ne montrent pas de parties mais sont *continues*. Bien sûr, ces opposés ne le sont jamais totalement, car il n'existe pas d'objet qui soit absolument insécable, ni de substance qui soit infiniment divisible. Cependant ces descriptions des objets ne sont pas seulement des aspects de la réalité, mais souvent l'une des deux s'avère décisive pour décrire les objets.

Les mathématiques, qui extraient des formes abstraites des objets physiques, font par conséquent une distinction très nette entre ces deux formes : le discret et le continu. L'image mathématique d'un objet distinguable est l'unité, et l'image mathématique d'un ensemble d'unités est le nombre entier, vu aussi comme une somme d'unités. Le nombre entier est, pour ainsi dire, l'image pure du *discret*, où l'on a fait abstraction de tout autre aspect de la collection que le nombre qui la caractérise ; c'est le discret dans sa forme pure. La principale et première image mathématique du *continu* est la continuité que l'on observe dans une figure géométrique, le cas le plus simple étant le segment de droite.

Nous avons par conséquent devant nous deux opposés : le discret et le continu. Leurs images mathématiques abstraites sont respectivement le nombre entier et l'extension géométrique. La dimension, au sens de taille, est la combinaison de ces deux opposés car le continu est mesuré à l'aide d'unités. Mais les unités indivisibles ne suffisent pas ; il faut aussi introduire les fractions d'unités. C'est ainsi que sont apparus les nombres fractionnaires, qu'on appelle les *nombres rationnels*.

On voit que le concept de nombre s'est étoffé précisément sous l'influence des deux opposés que sont le discret et le continu – en cherchant, pour ainsi dire, à « remplir » le continu avec le discret et ses fractions.

En allant plus loin dans cette direction, le concept de segments incommensurables apparaît, c'est le cas où un segment ne peut jamais être exactement couvert par des réplications d'un autre y compris des fractions, aussi petites soient-elles, de cet autre. On accède alors, à un niveau plus abstrait, au concept de *nombre réel* qui est l'image mathématique d'un processus de mesure, comme dans la figure I.1, mais infiniment précis, nécessitant une infinité d'opérations, et une infinité de décimales. Cependant ce concept de nombre réel n'est pas apparu d'un coup dans toute sa clarté. Son long développement chemina à travers cette opposition entre le discret et le continu.

Démocrite, on l'a dit, voyait les figures comme composées d'atomes, ce qui ramenait le continu au discret. Cependant la découverte des segments incommensurables, quand elle fut enfin connue de la majorité des savants grecs (car Démocrite naquit une trentaine d'années *après* la mort de Pythagore), força à abandonner une telle conception. Après ça, les quantités continues n'étaient plus faites d'éléments individuels insécables – les atomes ou les points, conçus comme des sortes d'atomes sans dimension. Les grandeurs continues correspondant à des incommensurables, c'est-à-dire des irrationnels, n'étaient plus exprimées par des nombres, puisque les Grecs ne connaissaient pas d'autres nombres que les entiers et les rationnels.

L'opposition entre le discret et le continu réapparut en mathématiques avec une nouvelle vigueur au XVII^e siècle, quand furent jetées les bases du calcul différentiel et intégral. On commença à parler d'infinitésimaux. Dans une certaine conception des choses, ils étaient considérés comme tout à fait concrets. C'était des segments « infiniment petits », des particules « indivisibles » mais néanmoins continues, comme les atomes de Démocrite.

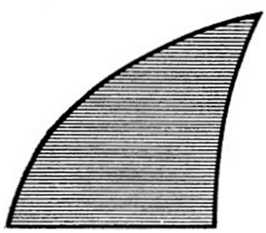


Figure I.3 : Surface vue comme une « somme de lignes ».

Toutefois maintenant, dans un segment, leur nombre était aussi considéré comme infini. Le calcul des surfaces et des volumes – l'intégration – était conçu comme une somme infinie d'infinitésimaux. Une surface, par exemple, était comprise comme la « somme des lignes dont elle était composée » (figure I.3). Par conséquent une fois de plus le continu semblait ramené au discret, mais d'une façon plus complexe que chez les Grecs, puisqu'on additionnait maintenant un nombre infini de quantités infiniment petites. On était à un niveau supérieur de sophistication. Mais cette façon de voir s'avéra insatisfaisante. C'est en opposition à ce retour confus au discret que principalement Newton élabora le concept de variable *continue* pouvant prendre ses valeurs dans l'ensemble des nombres réels, et redéfinit les « infinitésimaux » comme des quantités *continues* décroissant vers zéro sans l'atteindre.

La conception de Newton prévalut jusqu'à ce que dans la première moitié du XIX^e^ siècle une théorie plus rigoureuse des limites fût créée. Le segment n'était plus composé de points ou d'« indivisibles », mais était compris comme une « quantité ayant une extension », comme un milieu continu, où l'on pouvait seulement repérer des points, qui étaient des valeurs individuelles pouvant être prises par une variable. Les mathématiciens parlaient d'« extension ». Dans le pas de deux entre le discret et le continu, le continu était à nouveau le partenaire qui guidait la danse.

Cependant le développement de l'analyse demandait des raffinements supplémentaires dans la théorie des variables et, surtout, dans la définition générale des nombres réels comme valeurs que pouvait prendre une variable. Alors dans les années 1870-1880, la théorie des nombres réels apparut, qui représente un segment comme un ensemble de points, et, en parallèle, l'intervalle dans lequel une variable peut prendre ses valeurs comme un ensemble de nombres réels. Le continu était à nouveau composé de points discrets séparés, et les propriétés de la continuité commencèrent à être spécifiées à l'aide de la structure de tous les points du segment. Cette approche conduisit à des succès considérables en mathématiques et devint dominante. Malgré tout, elle révéla aussi de profondes difficultés, qui donnèrent lieu à des tentatives de revenir, à un autre niveau, au concept de pure continuité. D'autres façons de définir un segment comme un ensemble de points ont été proposées. Ce sont des nouveaux points de vue sur les concepts de nombres, de variables et de fonctions. Le développement de la théorie se poursuit et nous devons attendre ses prochains progrès.

I.4.6 L'interaction entre l'arithmétique et la géométrie ne joua pas seulement un rôle dans la création du concept de *nombre réel*. La même interaction entre la géométrie et l'arithmétique, ou plus précisément l'algèbre, avait conduit à des époques plus anciennes à l'élaboration du concept de *nombre négatif* et à celui de *nombre complexe* (c'est-à-dire les nombres de la forme $a+b\sqrt{-1}$). Les nombres négatifs sont représentés comme des points à gauche du point origine sur la droite. Les nombres complexes sont, eux, représentés comme des points du plan. C'est cette représentation qui donna une base solide aux nombres complexes jusque-là restés incompréhensibles.

Le concept de magnitude continua à se développer : par exemple apparurent les *grandeurs vectorielles*, qui sont représentées par des segments orientés dans le plan ou des espaces plus larges. D'autres grandeurs encore plus générales (comme les tenseurs) sont nées aussi de l'interaction entre l'algèbre et la géométrie.

La combinaison de plusieurs théories mathématiques a toujours joué et joue encore un grand rôle, parfois décisif. Nous rencontrerons à nouveau ce phénomène dans l'émergence de la géométrie analytique, du calcul différentiel et intégral, de la théorie des fonctions d'une variable complexe, de la récente théorie appelée analyse fonctionnelle et d'autres théories. Même en théorie des nombres, c'est-à-dire l'étude des *nombres entiers*, des méthodes utilisant la continuité se sont avérées très fructueuses : ainsi l'analyse infinitésimale et la géométrie engendrèrent des chapitres importants de la théorie des nombres, qu'on appelle la « théorie analytique des nombres » et la « géométrie des nombres ».

Selon un point de vue bien connu, on peut voir dans les fondements des mathématiques une combinaison de concepts issus de la géométrie et de l'arithmétique : les concepts de continuité et d'opérations algébriques (généralisant les opérations arithmétiques). Toutefois notre objectif ici n'est pas de présenter en détail ces théories sophistiquées, mais de donner une idée générale de l'interaction entre les concepts. Il s'agit simplement de souligner à la fois l'unité et l'opposition entre contraires en mathématiques, illustrées par le développement du concept de nombre.

I.5 L'âge des mathématiques élémentaires

I.5.1 Le développement des mathématiques ne se réduit pas à une simple accumulation de nouveaux théorèmes, mais inclut de temps à autre des changements significatifs – qualitatifs, pourrait-on dire – en mathématiques[2]. Ces changements qualitatifs, cependant, ne consistent pas en l'invalidation et l'élimination des théories antérieures, mais en leurs approfondissement et généralisation, en l'émergence de nouvelles théories d'une portée plus vaste rendues possibles par les précédentes.

Quatre grandes périodes dans l'histoire du développement des mathématiques :

Quand on prend du recul et contemple l'ensemble de l'histoire des mathématiques, on peut distinguer quatre périodes qualitativement différentes. Bien sûr il est impossible de fixer précisément les frontières entre périodes, car les caractéristiques essentielles de chacune sont apparues plus ou moins graduellement à partir de la précédente, mais les différences entre périodes et les transitions sont clairement identifiables.

La première étape, ou période, est celle de l'*émergence des mathématiques* avant qu'elles ne deviennent une science indépendante et purement théorique. Elle s'étendit des temps les plus reculés jusqu'au Vᵉ siècle avant jc, sinon un peu avant, quand la Grèce commença finalement à développer des « pures » mathématiques avec raisonnements logiques et théorèmes (au Vᵉ siècle av jc apparurent en particulier des

2. Depuis l'ouvrage de Thomas Kuhn, *La structure des révolutions scientifiques*, publié en 1962, le terme consacré est « changement de paradigme ».

premières présentations systématiques de la géométrie, par exemple les *Éléments* d'Hippocrate de Chios). Cette première période vit l'émergence de l'arithmétique et la géométrie que nous venons d'examiner en détail. Les mathématiques consistaient alors en une collection de règles sans relation entre elles dérivées de l'expérience et toujours en lien *direct* avec la pratique. Ces règles ne formaient pas encore un système logique unifié. La nature théorique des mathématiques avec démonstrations logiques de théorèmes n'apparut que très lentement en même temps que s'accumulaient des matériaux. L'arithmétique et la géométrie n'étaient pas encore séparées, mais au contraire, comme nous l'avons vu, fortement imbriquées.

La deuxième période peut être caractérisée comme celle des *mathématiques élémentaires* ; ce sont aussi les mathématiques des *quantités constantes* ; ses résultats fondamentaux les plus simples constituent maintenant le contenu de programmes de mathématiques à l'école primaire et au collège. Cette période dura environ deux mille ans et s'acheva au XVII^e siècle avec l'émergence des mathématiques « supérieures ». Nous allons examiner en détail cette deuxième période dans la suite de la présente section I.5. Les sections I.6 et I.7 seront consacrées aux troisième et quatrième périodes – respectivement la création et le développement de l'analyse, puis les mathématiques contemporaines.

I.5.2 On peut diviser à son tour la période des mathématiques élémentaires en deux parties : la période de développement de la *géométrie* (du Ve siècle avant jc jusqu'au IIe siècle de notre ère), puis celle surtout de l'*algèbre* (du IIe siècle a.d. jusqu'au XVIIe siècle). Dans les découpages historiques traditionnels, on distingue trois périodes qu'on peut appeler « grecque », « orientale » et « Renaissance européenne ». La période grecque coïncide avec l'épanouissement des cultures hellénique, hellénistique et gréco-romaine. Démarrant au VIIe siècle avant jc, elle atteignit son apogée au IIIe siècle avant jc. C'était alors l'époque des grands géomètres de l'Antiquité : Euclide (qui vécut aux alentours de 300 av jc), Archimède

(c. -287, -212), Apollonius de Perge (c. -250, début du IIe siècle). Cette période grecque s'acheva au VIe siècle de notre ère [3]. Les mathématiques, et plus spécialement la géométrie, brillèrent d'un éclat exceptionnel en Grèce ; nous connaissons les noms et les résultats de nombreux mathématiciens bien que peu de travaux qui puissent leur être authentiquement attribués aient survécu. Il est à noter que Rome, qui atteignit son apogée au premier siècle de notre ère, ne fit pas de contribution en mathématiques, tandis qu'en Grèce, alors sous le joug romain, la science continua de s'épanouir.

Les Grecs non seulement développèrent la géométrie élémentaire et l'amenèrent jusqu'au système harmonieux exposé dans les *Éléments* d'Euclide et enseigné de nos jours à l'école, mais ils atteignirent des résultats bien plus élevés. Ils étudièrent les sections coniques : ellipse, hyperbole et parabole ; ils prouvèrent des théorèmes appartenant à la géométrie projective ; guidés par les besoins de l'astronomie, ils développèrent la géométrie sphérique (1er siècle après jc), ainsi que le début de la trigonométrie ; ils calculèrent les premières tables de sinus (Hipparque, IIe siècle avant jc, et Claude Ptolémée, IIe siècle après jc).

Ptolémée est l'auteur bien connu de la théorie astronomique selon laquelle la Terre est au centre de l'univers et les autres corps célestes tournent autour d'elle dans des mouvements compliqués pour rendre compte de ce qu'on observe. Ce système fut réfuté par Copernic [4]. Les Grecs furent capables de calculer les surfaces et volumes de figures relati-

3. Athènes est restée dominante en philosophie jusqu'à la fermeture définitive de l'Académie de Platon par Justinien en 529 après jc. Mais en mathématiques, dès le IIIe siècle avant jc, la prééminence était passée à Alexandrie où travaillèrent nombre des plus grands mathématiciens : Euclide, Ératosthène (-276, -194), Héron (c. +10, c. +70), Diophante (IIIe ou IVe siècle après jc), Pappus (IVe siècle), etc.

4. Avant Ptolémée, Aristarque de Samos (c. -310, c. -230) avait déjà proposé un système héliocentrique, mais il fut violemment combattu pour impiété par le philosophe stoïcien Cléanthe (c. -330, -232). Puis sa théorie tomba dans l'oubli. Elle fut proposée à nouveau par le Polonais Nicolas Copernic (1473-1543), qui n'avait vraisemblablement pas connaissance des travaux d'Aristarque dix-huit siècles avant lui.

vement complexes ; par exemple Archimède démontra que la surface de la section de parabole montrée sur la figure I.4 est égale à 2/3 de la surface du rectangle qui la contient.

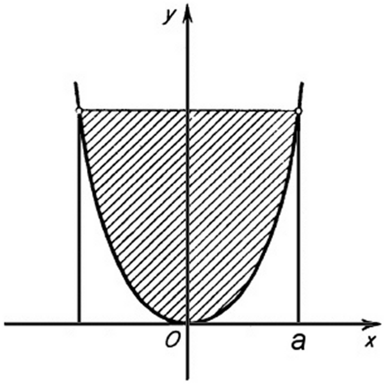


Figure I.4 : Surface d'une section de parabole

Les Grecs savaient même que parmi tous les corps ayant une surface donnée la boule sphérique est le corps qui a le plus grand volume, mais ils n'en avaient pas de démonstration satisfaisante. Une démonstration rigoureuse était inaccessible avec les moyens mathématiques dont ils disposaient. Elle ne fut trouvée qu'au XIXe à l'aide du calcul intégral.

Dans le domaine de l'arithmétique et des débuts de l'algèbre, les Grecs firent aussi des contributions importantes. Comme nous l'avons vu, ils jetèrent les fondations de la théorie des nombres. Cela inclut leurs recherches sur les nombres premiers (théorème d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers, « crible d'Érastosthène » pour trouver les nombres premiers), mais aussi la solution d'équations en nombres entiers (travaux de Diophante, qui vécut sans doute entre le IIIe et le IVe siècle).

Nous avons déjà dit que les Grecs découvrirent les quantités irrationnelles, mais ils les abordaient géométriquement, comme des segments. Par conséquent des problèmes que nous considérons appartenir à l'algèbre étaient pour les Grecs des problèmes de géométrie. De cette manière ils résolurent des équations quadratiques et transformèrent des expressions irrationnelles. Par exemple l'équation que nous écrivons de nos jours sous la forme $x^2 + ax = b^2$ était pour eux le problème suivant : trouver un segment x tel que si on construit son carré et on y ajoute encore un rectangle ayant le segment x pour un côté et le segment a pour l'autre, nous obtenons une surface rectangulaire égale à celle d'un carré de côté b donné. Après les Grecs, la domination de la géométrie perdura longtemps. Les Grecs savaient aussi extraire des racines carrées et des racines cubiques (par des moyens géométriques), et ils connaissaient les propriétés des suites arithmétiques et géométriques.

Ainsi les Grecs avaient atteint déjà beaucoup de résultats appartenant à l'algèbre moderne élémentaire, mais des concepts très importants leur faisaient défaut : les nombres négatifs et le zéro, les nombres irrationnels dégagés de leur interprétation exclusivement géométrique, et finalement un système de désignation des quantités à l'aide de lettres. Toutefois Diophante utilisait déjà des lettres pour désigner l'inconnue et ses puissances, ainsi que des signes spéciaux pour l'addition, la soustraction et l'égalité, si bien qu'il écrivait des équations algébriques, mais dont les coefficients étaient encore des nombres spécifiques.

En géométrie les Grecs approchèrent des mathématiques « supérieures » : Archimède du calcul intégral en déterminant des surfaces et des volumes complexes, Apollonius de la géométrie analytique avec ses recherches sur les sections coniques. En fait il donna même les « équations » de ces courbes, mais en lien avec des solutions de problèmes de géométrie. Par exemple il formule ainsi l'« équation » de la parabole $y^2 = 2px$: un carré de côté y est égal à un rectangle dont les côtés sont $2p$ et x. Et, bien sûr, au lieu des notations p, x, y, il faisait référence à des segments, c'est-à-dire qu'il s'exprimait, encore une fois, en langage géométrique.

Mais les Grecs n'avaient pas de concept général pour une constante arbitraire ni pour une quantité variable et encore moins de notation pour elles. Les lettres utilisées en algèbre apparurent bien plus tard. Or elles étaient nécessaires pour que leurs recherches conduisent à de nouvelles théories faisant réellement partie des mathématiques supérieures. Les créateurs de ces nouvelles théories, un bon millier d'années plus tard, partirent en grande partie de l'héritage des savants grecs. L'ouvrage de Descartes, *La Géométrie* (1637), qui pose les fondations de la géométrie analytique, débute justement par l'étude de problèmes légués par les Grecs. C'est un schéma général : les anciennes théories, en engendrant des problèmes nouveaux et profonds, semblent croître au-delà d'elles-mêmes et demandent alors pour continuer à se développer de nouvelles formes, de nouvelles idées. Ces nouvelles formes et idées peuvent demander un nouvel environnement pour émerger. Dans l'ancienne société les conditions n'étaient pas réunies, et ne pouvaient pas l'être, pour déclencher la transition vers les mathématiques supérieures. Celles-ci accompagnèrent le développement de la science à l'époque moderne. Mais ce développement lui-même résultait des nouveaux besoins technologiques et industriels apparus aux XVI^e^ et XVII^e^ siècles, et était par conséquent lié au développement du capitalisme.

Les Grecs semblaient avoir épuisé les possibilités de la géométrie élémentaire. Cela expliquerait que les progrès brillants de la géométrie cessèrent au début de l'ère chrétienne et furent remplacés par le développement de la trigonométrie et de l'algèbre dans les travaux de Ptolémée, Diophante, etc. Les travaux de Diophante, justement, peuvent être considérés comme marquant le début de la période où l'algèbre devint dominante. Mais l'Antiquité, dont la fin approchait, était épuisée pour faire avancer plus loin la science dans cette nouvelle direction.

Il convient de noter que quelques siècles plus tôt en Chine l'arithmétique atteignit un niveau élevé. Les savants chinois dans les second et premier siècles avant jc décrivirent des règles pour résoudre un système de trois équations du premier degré. En outre, pour la première fois dans l'histoire, des coefficients négatifs sont utilisés et les règles opératoires avec des quantités négatives sont formulées. (Cependant les savants chinois ne recherchaient que les solutions positives, exactement comme plus tard Diophante.) Les mêmes livres chinois présentent déjà une méthode pour extraire des racines carrées et cubiques.

I.5.3 Après la fin de la science grecque en Europe [5], la région stagna sur le plan scientifique, et les centres de développement des mathématiques se déplacèrent en Inde, en Asie centrale et dans les pays arabes. Pour avoir des repères chronologiques, voici les dates de quelques grands mathématiciens orientaux :

En Inde :
  Aryabhata, né vers 476
  Brahmagupta, c. 598-660
  Bhaskara II, 12e siècle
Dans le Khwarezm :
  Al-Khwarizmi, 9e siècle
  Al-Biruni, 973-1048
En Azerbaïdjan ;
  Nasireddin Tusi, 1201-1274
À Samarcande :
  Gyaseddin Jamschid, 15e siècle.

Dans ces régions, pendant un millier d'années du Vᵉ au XVᵉ siècle, les mathématiques se développèrent stimulées principalement par les besoins du calcul, particulièrement astronomique. Les mathématiciens orientaux étaient en effet pour la plupart aussi astronomes. En géométrie, il est vrai, ils n'ajoutèrent pas grand-chose à ce qu'avaient fait les Grecs ; dans cette discipline ils préservèrent les résultats de ces derniers et les transmirent aux époques suivantes. En revanche ils atteignirent des succès considérables en arithmétique et en algèbre. Noter que ce serait une erreur de penser que les développements des mathématiques à cette époque soient principale-

5. On y adjoint traditionnellement Alexandrie qui depuis sa fondation en -331 jusqu'au milieu du premier millénaire est restée sur le plan culturel totalement hellénique.

ment dus aux Arabes. Le terme générique de « mathématiques arabes » pour celles de cette époque provient du fait que beaucoup de savants orientaux écrivaient en langue arabe apportée par les conquêtes.

Les Indiens, comme nous l'avons déjà vu dans la section I.2, ont inventé le système de numération moderne. Ils ont aussi introduit les nombres négatifs, établissant un parallèle entre les nombres positifs et négatifs et l'opposition entre avoir et dette, ou entre les deux directions opposées sur une ligne droite. Enfin, ils commencèrent à manipuler les quantités irrationnelles exactement comme les quantités rationnelles, sans référence à leur représentation géométrique, dépassant en cela les Grecs.

Ils avaient aussi des notations spéciales pour les opérations algébriques, y compris l'extraction de racines. Parce que les savants indiens et d'Asie centrale n'étaient pas embarrassés par la différence entre quantités rationnelles et irrationnelles, ils furent capables de dépasser la domination de la géométrie, qui avait caractérisé les mathématiques grecques, et purent ouvrir la voie au développement de la vraie algèbre, libérée des entraves que lui avaient imposées les Grecs.

Le grand poète et mathématicien Omar Khayyam (c.1048-1122) et Nasireddin Tusi montrèrent clairement que n'importe quel ratio de quantités, qu'elles soient commensurables ou incommensurables, peut être appelé un nombre ; autrement dit, on trouve déjà chez eux la définition générale d'un nombre (rationnel ou irrationnel) que nous avons mentionnée dans la section I.4, formulée par Newton. On est frappé par le caractère remarquable de ces réussites quand on sait que l'acceptation complète des nombres négatifs et des nombres irrationnels par les mathématiciens européens prit très longtemps, même après le redémarrage des mathématiques en Europe à la Renaissance. Par exemple le grand mathématicien français François Viète (1540-1603), à qui l'algèbre doit beaucoup, évitait les nombres négatifs, et en Angleterre on entendait des protestations contre les nombres négatifs encore au XVIII^e^ siècle. Ces nombres étaient considérés comme absurdes puisqu'ils étaient moins que zéro, c'est-à-dire « plus petits que rien ». Maintenant ils nous sont devenus familiers, par exemple avec les températures négatives ; tout le monde comprend quand on lit dans le journal : « la température à Moscou est de -8 degrés Celsius. »

Le mot « algèbre » lui-même vient du livre le plus connu du mathématicien et astronome Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi (Mohammed fils de Musa venant du Khwarezm), qui vécut au IX^e siècle ; le titre abrégé de l'ouvrage est *Kitab al-jabr al-muqabala* qui peut se traduire par « Livre des restaurations et oppositions ». Par « restauration » – al-jabr – il faut entendre transfert d'une quantité négative d'un côté d'une égalité en une quantité positive de l'autre, et par « opposition » – al-muqabala – élimination de termes égaux de chaque côté.

Quand le livre fut traduit en latin, pour son titre le mot arabe « al-jabr » devint « algèbre », et « al-muqabala » ne fut pas retenu. Voilà comment est né notre mot algèbre. Notons aussi que le terme mathématique « algorithme », qui veut dire méthode de calcul en appliquant des règles plus ou moins automatiques, vient du nom du même Al-Khwarizmi.

L'origine du mot algèbre est parfaitement cohérente avec le contenu de la discipline [6]. En effet il s'agit fondamentalement de la science des opérations arithmétiques, vues de manière formelle dans leur généralité, en faisant abstraction des nombres spécifiques. Ses méthodes consistent principalement à transformer des expressions et à résoudre des équations. Al-Khwarizmi choisit pour titre de son livre précisément le nom de certaines des règles formelles qui reflétaient le mieux l'esprit général de l'algèbre.

Plus tard Omar Khayyam définit l'algèbre comme la science de la résolution des équations. Cette définition resta valide jusqu'à la fin du XIX^e siècle, lorsqu'à côté de la théorie des équations apparurent en algèbre de nouvelles directions qui

6. En espagnol qui pour des raisons historiques contient beaucoup de mots d'origine arabe « algebrista » veut dire algébriste mais aussi rebouteux, c'est-à-dire quelqu'un qui remet les os en place.

changèrent le visage de la discipline, mais pas son esprit qui reste d'être la science générale des opérations formelles.

Les mathématiciens d'Asie centrale découvrirent des méthodes pour extraire les racines et pour calculer des solutions approchées d'un grand nombre d'équations ; ils découvrirent la formule générale du « binôme de Newton » même s'ils l'exprimaient avec des mots, etc. Ils firent considérablement progresser la trigonométrie, en faisant un système cohérent, et ils calculèrent des tables de sinus très précises. Elles furent établies pour les besoins de l'astronomie par le mathématicien Gyaseddin (vers 1427) qui travaillait pour le célèbre astronome ouzbek Ulugh Beg (1394-1449). Gyaseddin inventa aussi les fractions décimales 150 ans avant qu'elles ne fussent réinventées indépendamment en Europe.

En un mot, au Moyen Âge, en Inde et en Asie centrale, furent développés un système de numération décimale presque complet (incluant les fractions), l'algèbre élémentaire et la trigonométrie.

À la même période, les accomplissements de la science chinoise commençaient à être connus des pays voisins. Aux alentours du VIe siècle les Chinois connaissaient des méthodes pour résoudre les équations indéfinies les plus simples, pour faire des calculs approximatifs en géométrie, et même pour calculer des solutions approximatives aux équations du 3e degré. Si l'on considère le programme de mathématiques de nos jours au début du lycée, seuls manquaient vers 1500 les logarithmes et les nombres imaginaires. En outre, le système de notation des quantités avec des lettres n'existait pas encore : la poussée de l'algèbre avait dépassé ses moyens d'expression.

Cependant de nouveaux moyens d'expression adaptés étaient indispensables. Afin de pouvoir faire abstraction des nombres spécifiques et formuler des règles générales, il fallait une façon appropriée d'écrire les formules ; il était nécessaire de savoir désigner *n'importe quel nombre* et les actions sur lui. Le symbolisme algébrique est une expression formelle nécessaire correspondant au contenu de l'algèbre.

Ainsi, de même qu'aux temps les plus anciens, à l'époque de l'émergence de l'arithmétique, pour travailler avec les nombres spécifiques il avait été nécessaire d'élaborer un système de notation pour eux, maintenant, afin de travailler avec des *nombres arbitraires* il était à nouveau nécessaire d'élaborer des notations. La résolution du problème, qui commença dès les Grecs des premiers siècles de notre ère, ne fut achevée qu'au XVII^e siècle quand dans les travaux de Descartes et d'autres fut finalement employé un système moderne de notations.

I.5.4 Lorsque redémarra en Occident l'intérêt pour la science, les Européens l'apprirent des Arabes et ils se familiarisèrent aussi avec la science grecque antique dans des traductions arabes. Les livres d'Euclide, de Ptolémée et d'Al-Khwarizmi furent traduits pour la première fois au XII^e siècle de l'arabe en latin [7] – la langue commune de toute l'Europe occidentale à l'époque pour les travaux de l'esprit. En même temps, les « chiffres arabes », c'est-à-dire le système de numération décimal positionnel venant des Indiens, commencèrent à supplanter très progressivement l'ancien système hérité des Grecs et des Romains [8].

Ce n'est qu'au XVI^e siècle que la science européenne finalement dépassa pour la première fois ses prédécesseurs. Les Italiens Tartaglia (1499-1557) et Ferrari (1522-1565) trouvèrent les solutions générales le premier aux équations cubiques, ou

---

7. Adélard de Bath (c. 1080 - c. 1152) traduisit Euclide. Plus tard quand les Turcs s'approchèrent et finalement s'emparèrent de Byzance en 1453 de nombreux savants, appartenant au monde grec tardif, fuirent l'Empire byzantin et emportèrent avec eux en Occident des versions originales des grands auteurs grecs antiques aussi bien en science avec Euclide qu'en philosophie avec Platon par exemple.

8. Un des livres qui contribuèrent à diffuser le système indo-arabe en Europe occidentale est le *Liber abaci* publié en 1202 par Léonard de Pise (c. 1175 - c. 1250), plus connu sous le nom de Fibonacci. Il l'avait appris à Bougie sur la côte algérienne où son père faisait du commerce. Le système indo-arabe rendit possible le développement de la *comptabilité en partie double* en Italie lors de la Renaissance italienne. Ses prémices existaient déjà chez les Arabes et encore avant les Indiens. Elle se diffusa ensuite lentement au cours des siècles suivants dans toute l'Europe puis le monde entier.

du troisième degré, le second à celles du quatrième (cf. chapitre IV). Notons que même si ces résultats sont un peu plus élevés que le niveau des mathématiques du lycée, ils appartiennent, par les méthodes qu'ils mettent en œuvre, à l'algèbre élémentaire. C'est la *théorie générale des équations* qui appartient à l'algèbre supérieure.

Les mathématiciens italiens commencèrent aussi à travailler sur les nombres imaginaires, tout d'abord avec des manipulations purement formelles, sans aucune réelle justification ; la légitimité de l'emploi des nombres imaginaires ne devint claire qu'au début du XIXe siècle. Les notations algébriques que nous utilisons de nos jours apparurent aussi au XVIe siècle. Viète, en particulier, dans un ouvrage publié en 1591, utilise non seulement des lettres pour les inconnues, mais aussi pour les paramètres ou coefficients : a, b, c, etc. De nombreux mathématiciens contribuèrent au développement de l'algèbre élémentaire. C'est à cette époque, incidemment, que les fractions décimales apparurent en Europe. Elles furent redécouvertes par le Hollandais Simon Stevin (1548-1620) qui les exposa dans un traité en 1585.

Enfin, l'Écossais John Napier (1550-1617) inventa les logarithmes comme outil pour faciliter les calculs astronomiques et les présenta en 1614. L'Anglais Henry Brigg (1556-1630) calcula les premières tables de logarithmes décimaux dans son ouvrage : *Arithmetica logarithmica* (Londres, 1624). Il est intéressant de noter que Napier ne définit pas les logarithmes comme on le fait de nos jours au lycée en disant que dans la formule $x = a^y$ le nombre y est le logarithme de x dans la base a. Cette définition des logarithmes apparut plus tard. La définition de Napier s'appuyait sur les concepts de variable et d'infinitésimal et se ramenait au fait que le logarithme de x est la fonction $y = f(x)$ dont le taux de croissance est inversement proportionnel à x, autrement dit $y' = \frac{c}{x}$ (voir chapitre II). On voit ainsi que le logarithme fut inventé à l'origine à l'aide d'une équation différentielle qui ne disait pas son nom, car les différentielles n'étaient pas encore inventées.

L'analyse combinatoire, et la formule générale du « binôme de Newton » pour n'importe quel exposant n entier, apparurent aussi en Europe. Il s'agit du binôme $(a+b)^n$; il porte le nom de Newton non pas car il l'aurait trouvé le premier, mais parce qu'il le généralisa à n'importe quel exposant n rationnel ou irrationnel. Quant aux progressions et suites élémentaires, elles étaient déjà connues avant.

Ainsi au début du XVII^e siècle, la construction de l'algèbre élémentaire était achevée. En même temps, toute la période des mathématiques des quantités constantes touchait à sa fin. Ce sont les mathématiques qui forment peu ou prou les programmes du secondaire. L'arithmétique, la géométrie élémentaire, la trigonométrie, l'algèbre élémentaire avaient atteint tout ce qui était essentiel dans leurs domaines. Débuta alors la transition vers les mathématiques supérieures – *les mathématiques des quantités variables.*

Il ne faudrait cependant pas en conclure que le développement des mathématiques élémentaires est achevé. Il se poursuit en effet, et par exemple en géométrie élémentaire de nouveaux résultats ont sans cesse continué à apparaître et apparaissent encore. En outre, c'est grâce aux développements ultérieurs des mathématiques que nous comprenons mieux l'essence des mathématiques élémentaires elles-mêmes. Néanmoins au XVII^e siècle ce sont les concepts de variables, de fonctions et de limites qui vont devenir les moteurs du développement des mathématiques. Des problèmes provenant des mathématiques élémentaires sont maintenant souvent non seulement abordés et résolus à l'aide de concepts appartenant aux mathématiques supérieures et des méthodes qui leur sont associées, mais certains ne sont pas solubles par des méthodes élémentaires. De même, des problèmes de mathématiques élémentaires sont encore à la source de résultats plus généraux et même de théories. Des exemples sont fournis par la théorie déjà mentionnée des systèmes réguliers de cristaux, ou des problèmes en théorie des nombres – élémentaires dans leur formulation, mais pas élémentaires du tout dans les méthodes nécessaires pour les résoudre (cf. chapitre X tome 2).

I.6 Mathématiques des quantités variables

I.6.1 Au XVI^e siècle l'étude du mouvement était devenue un sujet central des sciences de la nature. Plus généralement, au-delà du mouvement, le développement de ces sciences était stimulé par des questions pratiques concernant divers *processus de changement*, appelés aussi *processus dynamiques*, et par les relations entre des quantités variables.

Reflétant les aspects généraux de quantités qui pouvaient changer et de leurs relations, les concepts de variable et de fonction prirent forme en mathématiques. Cette expansion très importante de la discipline marque la transition vers une nouvelle période : les mathématiques des quantités variables.

On appelle *loi du mouvement* d'un objet le long d'une trajectoire, par exemple une ligne droite, la description de la façon dont la distance parcourue par l'objet depuis un point de départ s'accroît avec le temps (ou, plus généralement, si l'on autorise les retours en arrière, la façon dont la position de l'objet évolue avec le temps).

Ainsi Galilée (1564-1642) découvrit la loi de la chute des corps qui établit que la distance parcourue par un corps en chute libre s'accroît proportionnellement au carré du temps. Cette loi est exprimée par la fameuse formule

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \tag{I.1}$$

(où $g = 9,81\ m/s^2$).

D'une manière générale une loi de mouvement exprime une distance parcourue (ou une position atteinte) au bout d'un temps t. Ici le temps t et la distance s sont deux variables : la première est appelée la *variable indépendante*, la seconde la *variable dépendante*. Et le fait qu'à chaque temps t corresponde une distance s signifie que la distance s est fonction du temps t.

Les concepts mathématiques de variable et de fonction ne sont rien de plus qu'une généralisation abstraite de mesures concrètes (comme un temps, une distance, une vitesse, un angle de rotation, une superficie, etc.) et des relations concrètes entre elles (comme la dépendance de la distance au temps, etc.). Exactement comme le concept de nombre réel est l'image abstraite d'une grandeur donnée fixe, de même une « variable » est l'image abstraite d'une grandeur qui peut changer – une quantité qui dans le phénomène étudié prendra nécessairement plusieurs valeurs différentes. La variable mathématique x n'est rien d'autre que « quelque chose » qui peut prendre diverses valeurs numériques. C'est par conséquent une variable dans un sens essentiel. Il en est ainsi du temps, d'une distance, ou de n'importe quelle autre grandeur variable dans un phénomène vu dans sa globalité.

Exactement de la même façon, une fonction est l'image abstraite d'une relation où une quantité dépend d'une autre. La déclaration « y est une fonction de x » veut dire en mathématiques qu'à chaque valeur que x peut prendre correspond une certaine valeur de y. (Une fonction est aussi appelée une correspondance ou une loi de correspondance entre les valeurs de x et de y.) Par exemple, d'après la loi de la chute des corps, la distance parcourue vers le bas par l'objet est liée au temps écoulé depuis qu'il a été lâché par l'équation I.1. La distance parcourue est fonction du temps.

L'énergie d'un corps en mouvement est exprimée par une formule faisant intervenir sa masse et sa vitesse

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \tag{I.2}$$

Pour un corps donné, l'énergie E est fonction de sa vitesse v.

Selon la loi bien connue, la quantité de chaleur dégagée dans un fil conducteur par unité de temps durant le passage d'un courant électrique est exprimée par la formule

$$Q = \frac{1}{2}RI^2 \tag{I.3}$$

où I est l'intensité du courant et R la résistance du fil. Pour une résistance donnée, à chaque intensité I correspond une certaine quantité de chaleur dégagée par une unité de temps. En d'autres termes Q est fonction de I.

La surface S d'un triangle rectangle dont l'un des angles aigus est α et le côté adjacent autre que l'hypoténuse a la longueur x (figure I.5) est donnée par la formule

$$S = \frac{1}{2}x^2 \tan\alpha \tag{I.4}$$

Pour un angle α donné, la surface est fonction du côté x.

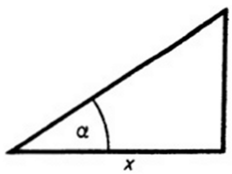


Figure I.5 : Surface (encore appelée aire) d'un triangle rectangle

Les formules (I.1) à (I.4) se ramènent toutes à la même formule générale

$$y = \frac{1}{2}ax^2 \tag{I.5}$$

C'est la transition depuis les variables concrètes t, s, S, E, Q, v, etc., vers les variables générales x et y. Et c'est leurs dépendances concrètes (I.1), (I.2), (I.3) et (I.4) vues sous l'angle d'une loi générale (I.5). Là où la mécanique et l'électricité s'occupent des lois matérielles (I.1), (I.2) et (I.3), liant des quantités concrètes, la théorie mathématique des fonctions s'occupe d'une seule loi générale, la loi (I.5), sans associer à y ni à x des grandeurs concrètes particulières.

L'étape suivante dans le processus d'abstraction progressive à partir du concret est de considérer non plus une dépendance particulière entre y et x, comme $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \sin x$ ou $y = \log x$, mais la dépendance de y à x dans sa généralité, exprimée par la formule

$$y = f(x)$$

Cette formule signifie que la grandeur y est d'une manière générale fonction de x, autrement dit à chaque valeur que peut prendre la variable x correspond une certaine valeur de la variable y (et une seule) donnée par une certaine loi qu'on n'a pas spécifiée, notée f. Le sujet des mathématiques n'est pas seulement telle ou telle fonction donnée ($y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \sin x$, etc.) mais les fonctions arbitraires (avec quelques limitations toutefois). Ces étapes dans l'abstraction, d'abord depuis des grandeurs concrètes, ensuite depuis des fonctions concrètes, sont analogues aux étapes franchies quand nous avons construit le concept de nombre entier : d'abord abstraction à partir de collections concrètes d'objets pour arriver au concept de nombre spécifique (1 ou 3 ou 12, etc.), ensuite deuxième abstraction conduisant au concept de nombre entier quelconque, considéré en général, noté n. Cette généralisation est le résultat d'une interaction profonde entre l'analyse et la synthèse : analyse des dépendances particulières et synthèse des caractéristiques communes sous forme de nouveaux concepts.

Le domaine des mathématiques qui s'occupe de l'étude des fonctions est appelé l'analyse, ou parfois l'analyse infinitésimale. Cette dernière dénomination vient du fait que le concept de quantité infinitésimale est un outil central dans l'étude des fonctions (le contenu du concept et sa signification seront expliqués au chapitre II).

Étant donné qu'une fonction est l'image abstraite de la dépendance d'une grandeur vis-à-vis d'une autre, on peut dire que l'analyse a pour sujet les relations entre variables – pas entre une quantité concrète et une autre, mais entre deux variables vues dans la généralité des valeurs qu'elles peuvent prendre, et en faisant abstraction de ce qu'elles représentent. Cette abstraction est à l'origine de l'étendue des applications de l'analyse, puisqu'avec une formule, avec un théorème, on couvre une infinité de cas concrets. Nos simples formules (I.1) à (I.5) en sont une illustration. On voit ici l'analogie totale entre l'analyse, l'arithmétique et l'algèbre. Toutes trois se sont développées à partir de certains problèmes pratiques et reflètent sous une forme générale et abstraite des quantités et des relations concrètes dans la réalité.

I.6.2 La nouvelle période des mathématiques, qui commença au XVII^{e} siècle – la période des mathématiques des quantités variables – peut donc aussi être définie comme celle de l'apparition et du développement de l'analyse. C'est la *troisième* des quatre grandes phases dans l'histoire des mathématiques, des origines à nos jours, présentées plus haut. Il est clair, cependant, qu'aucune théorie n'émerge seulement comme le résultat de la formation de nouveaux concepts ; et l'analyse ne pouvait pas naître seulement des concepts de variable et de fonction. Pour construire une théorie, et plus encore tout un nouveau champ scientifique – ce qu'est l'analyse infinitésimale –, il est nécessaire que les nouveaux concepts, pour ainsi dire, entrent en action, qu'à travers eux de nouvelles relations apparaissent, qu'ils nous permettent de résoudre de nouveaux problèmes.

De surcroît les nouveaux concepts eux-mêmes naissent, grandissent, se raffinent, se généralisent seulement grâce aux problèmes qu'ils permettent de résoudre, aux théorèmes dans lesquels ils entrent. Les concepts de variable et de fonction n'apparurent pas immédiatement sous une forme achevée chez Galilée, Descartes, Newton ou quiconque. Ils étaient en gestation dans les travaux de nombreux mathématiciens (par exemple chez Napier avec les logarithmes). On commence à distinguer clairement l'ébauche – mais en aucun cas la théorie achevée – chez Newton et Leibniz. Enfin les concepts furent raffinés et généralisés lors des développements ultérieurs de l'analyse. Leur définition moderne ne fut élaborée qu'au XIX^{e} siècle, et elle n'est pas encore absolument rigoureuse et satisfaisante. Le développement du concept même de fonction se poursuit de nos jours.

L'analyse mathématique est née de la mécanique, de problèmes en géométrie et de méthodes et problèmes en algèbre.

Le premier pas décisif dans la création des mathématiques des quantités variables fut la publication en 1637 de l'ouvrage de Descartes, *La Géométrie*, dans lequel il établit les fondations de ce qu'on appelle la *géométrie analytique*. Les principales idées de Descartes sont les suivantes. Considérons par exemple l'équation

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{I.6}$$

En algèbre on comprend x et y comme des *inconnues.* Et puisque cette équation ne permettait pas de les déterminer, car il y en a deux, elle ne présentait pas un grand intérêt pour les algébristes. Descartes, en revanche, ne regarde pas x et y comme des quantités inconnues qu'il faudrait trouver grâce à l'équation, mais comme des *variables* ; l'équation elle-même devient l'expression d'une dépendance entre ces variables. Une telle équation, quand on fait passer tous les termes du côté gauche, peut être réécrite sous la forme générale :

$$F(x, y) = 0$$

Allant plus loin, Descartes introduit dans le plan les coordonnées x, y, appelées maintenant coordonnées cartésiennes (figure I.6). À chaque paire de valeurs x, y correspond un point. Et vice-versa : à chaque point correspondent deux coordonnées x et y.

De cette manière l'équation $F(x, y) = 0$ définit un lieu géométrique dans le plan : l'ensemble des points dont les coordonnées la satisfont. Généralement il s'agit d'une courbe. Par exemple l'équation I.6 définit un cercle de rayon a centré à l'origine du système de repérage.

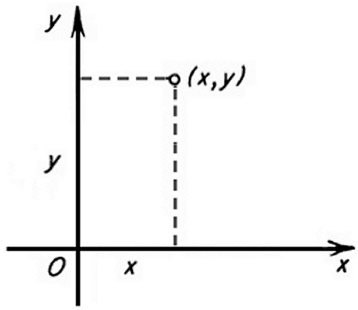


Figure I.6 : Coordonnées cartésiennes

En effet, comme on peut le voir sur la figure I.7, par le théorème de Pythagore x^2+y^2 est le carré de la distance entre l'origine O et le point M de coordonnées x, y. C'est pourquoi, l'équation I.6 définit le lieu géométrique des points dont la distance à l'origine est a, c'est-à-dire le cercle ci-dessous.

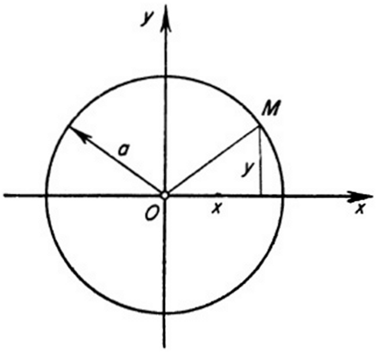


Figure I.7 : Définition d'un cercle avec l'équation $x^2 + y^2 = a^2$

Inversement : un lieu géométrique de points, défini par une condition géométrique ou une autre, peut aussi être défini par une équation, exprimant la même condition à l'aide d'une expression algébrique liant les coordonnées. Par exemple la condition géométrique définissant le cercle – être le lieu de tous les points à égale distance d'un point donné – devient en langage algébrique l'équation I.6.

Ainsi le problème général et la méthode de la géométrie analytique consistent en ceci : représenter une équation à deux variables comme une courbe dans le plan ; des propriétés *algébriques* de l'équation, déduire les propriétés *géométriques* de la courbe ; et inversement : à partir des conditions géométriques définissant la courbe, trouver son équation et ensuite, à nouveau, à l'aide des propriétés algébriques de l'équation, investiguer les propriétés géométriques du lieu qu'elle définit. Ainsi, grâce à la correspondance établie entre une équation et une courbe, les problèmes de géométrie peuvent être ramenés à des problèmes d'algèbre et finalement à des calculs.

Le contenu de la géométrie analytique sera expliqué en détail dans le chapitre III. Pour l'instant nous voulons simplement attirer l'attention sur le fait que, comme on peut le voir dans notre résumé, cette méthode a pour origine la combinaison de l'algèbre et de la géométrie, auxquelles vient s'ajouter l'idée générale de variable. Le principal domaine de la géométrie qui lança la géométrie analytique est la théorie des sections coniques (ellipse, hyperbole, parabole). Cette théorie, comme on l'a vu, fut développée dès l'Antiquité ; les résultats d'Apollonius de Perge contenaient déjà, sous forme géométrique, les équations des sections coniques. La combinaison de ce contenu géométrique avec sa forme algébrique, cette dernière préparée par le développement des mathématiques postérieures aux Grecs, et enfin l'idée générale de grandeur variable provenant de l'étude du mouvement, produisirent la géométrie analytique.

Si pour les Grecs l'étude des propriétés des sections coniques était une pure spéculation mathématique, à l'époque de Descartes cette étude était devenue très utile, avec d'importantes applications en astronomie, en mécanique et en technique. Johannes Kepler (1571-1630) découvrit que les planètes tournaient autour du soleil avec des trajectoires elliptiques, et Galilée découvrit qu'un corps lancé en l'air, hormis à la verticale, que ce soit une pierre ou un boulet de canon, décrit une parabole (en première approximation, si on peut négliger la résistance de l'air). Cela eut pour conséquence qu'il devint urgent de savoir faire toutes sortes de calculs liés aux sections coniques. Justement la méthode de Descartes était exactement adaptée à la résolution de ces problèmes urgents. En un mot elle naquit des développements précédents des mathématiques et des besoins pressants de la science et de la technique.

I.6.3 La phase décisive suivante dans les mathématiques des quantités variables fut la création par Newton et Leibniz, indépendamment l'un de l'autre, dans la seconde moitié du XVII^e siècle du calcul différentiel et intégral. C'est le vrai avènement de l'analyse puisque le sujet de ce calcul est les propriétés des fonctions elles-mêmes et non plus comme en géométrie analytique leur étude en relation avec des figures géométriques. À vrai dire Newton et Leibniz ne firent que placer la clé de voûte sur un énorme travail préparatoire de la part de nombreux mathématiciens et dont les débuts remontent aux méthodes élaborées par les Grecs de l'Antiquité pour calculer des surfaces et des volumes.

Nous n'allons pas expliquer ici le contenu des concepts de base du calcul différentiel et intégral ni les théories analytiques qui s'ensuivent – ce sera le sujet des chapitres suivants. Nous souhaitons seulement attirer l'attention sur les origines du calcul différentiel et intégral, qui sont principalement de nouveaux problèmes en mécanique et des problèmes fort anciens en géométrie : dans les deux cas il s'agit des problèmes, d'une part de trouver la tangente à une courbe, et d'autre part de calculer des surfaces et des volumes. Ces questions de géométrie occupaient déjà les Anciens (par exemple Archimède pour ne mentionner que lui). Au début du XVIIe siècle elles étaient étudiées par de nombreux mathématiciens, Kepler, Cavalieri (1598-1647) et d'autres. Cependant le pas décisif fut la découverte de la merveilleuse connexion entre les deux types de problèmes (tangente et surface) et la formulation d'une méthode générale pour les résoudre – le mérite en revient, indépendamment, à Newton et à Leibniz.

La découverte de cette connexion entre le problème de la *tangente* et celui de la *surface*, que l'on rencontre tous deux en mécanique et en géométrie, repose sur la possibilité offerte par la méthode des coordonnées de donner une représentation graphique de la dépendance entre une quantité et une autre, c'est-à-dire la possibilité de *dessiner une fonction*[9]. En s'ap-

9. Jusqu'alors la géométrie avait représenté des *figures concrètes*, comme on peut les voir dans la nature, en les idéalisant. La possibilité de représenter *la relation entre deux variables* était un pas conceptuel majeur. Des historiens des sciences, comme Pierre Duhem (1861-1916), attribuent à Nicolas Oresme (c. 1320 - 1382), dans son ouvrage *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*, la première suggestion sous forme encore confuse de représenter le lien entre deux variables à

puyant sur la représentation des fonctions à l'aide de courbes, il est aisé de formuler en quoi consiste la connexion entre le problème de la tangente et celui de la surface, connexion qui est à la source du calcul différentiel et intégral, et d'expliquer quel est le contenu de ce calcul.

Le calcul différentiel est au départ une méthode pour trouver la vitesse de déplacement d'un objet, à un moment quelconque au cours de son mouvement, quand on connaît la dépendance entre sa position et le temps. Ce problème est résolu par « différentiation ». Il s'avère qu'il est complètement équivalent au problème de trouver la droite tangente en chacun des points de la courbe qui donne une image graphique de la dépendance entre la position s et le temps t. La vitesse v au temps t est simplement égale à la tangente (valeur trigonométrique) de l'angle que fait la droite tangente (concept géométrique) à la courbe au point d'abscisse t (figure I.8).

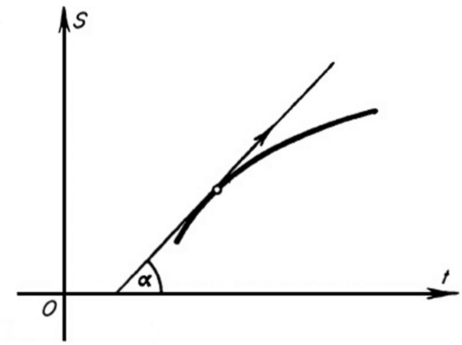


Figure I.8 : Courbe de la position en fonction du temps. Au point de tangence la vitesse v de l'objet est égale à $\tan \alpha$.

l'aide d'une courbe dans un graphique où la variable dépendante est en ordonnée et la variable indépendante en abscisse. Oresme considérait la vitesse d'un cavalier en fonction du temps. Il avait même fait observer, dès le milieu du XIVᵉ siècle, que la surface sous la courbe entre deux temps t_1 et t_2 était la distance parcourue pendant cet intervalle par le cavalier (voir figure I.9).

Le calcul intégral est au départ une méthode pour trouver la distance parcourue quand la dépendance entre la vitesse et le temps est connue (ou plus généralement trouver le résultat total de l'action d'une quantité variable). Ce problème est manifestement l'inverse de celui du calcul différentiel, qui était de trouver la vitesse quand on connaissait la distance en fonction du temps.

Maintenant trouver la distance parcourue est résolu par « intégration ». Il s'avère que c'est complètement équivalent au problème de trouver la surface sous la courbe représentant graphiquement la dépendance entre la vitesse v et le temps t. Le chemin parcouru par l'objet dans l'intervalle de temps (t_1, t_2) est simplement égal à la surface sous la courbe de la vitesse entre les lignes verticales correspondant aux temps t_1 et t_2 (figure I.9).

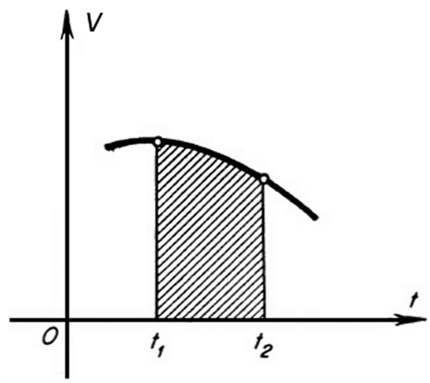


Figure I.9 : Courbe de la vitesse en fonction du temps. La distance parcourue dans l'intervalle de temps (t_1, t_2) est égale à la surface hachurée.

En nous éloignant à présent des illustrations concrètes du calcul différentiel et intégral liées à la mécanique, à la position et la vitesse d'un objet, et en abordant les fonctions en général, de manière plus abstraite, nous allons mieux comprendre l'essence des concepts du calcul différentiel et intégral.

À la base du calcul différentiel et intégral, ainsi que de toute l'analyse qui s'est développée dans son sillage, à côté des concepts de variable et de fonction, il y a aussi, qui a émergé cependant seulement un peu plus tard, le *concept de limite*.

Pendant la période d'élaboration de l'analyse on employait à la place du concept de limite le concept quelque peu vague d'infinitésimal. Sur un plan pratique les méthodes pour calculer d'une part la vitesse à partir de la distance parcourue – la « différentiation » –, et d'autre part la distance parcourue à partir de la vitesse – l'« intégration » –, utilisaient de l'algèbre en conjonction avec le concept de limite. L'analyse est née de la combinaison de ces concepts et techniques dans les problèmes mentionnés plus haut en mécanique et en géométrie et dans quelques autres (par exemple les problèmes de maximum et de minimum). On en avait un besoin urgent pour le développement de la mécanique, dans les lois de laquelle ils étaient déjà présents, même si c'était encore sous une forme cachée. La seconde loi de Newton, telle qu'il l'a formulée lui-même, dit que « le changement dans la quantité de mouvement est proportionnel à l'action de la force »[10]. Plus précisément, le taux de variation de la quantité de mouvement est proportionnel à la force. Par conséquent pour employer cette loi on doit être capable de déterminer le taux de variation de cette quantité, c'est-à-dire différentier. Si nous choisissons de formuler la même loi en disant que l'accélération est proportionnelle à la force, le problème reste entier, car l'accélération n'est rien d'autre que le taux de variation de la vitesse. Il va sans dire que pour déterminer la loi de mouvement d'un objet causé par une force variable donnée,

10. La quantité de mouvement, ou impulsion, d'un corps de masse m se déplaçant à la vitesse v est la grandeur mv. Elle dépend du temps car v en dépend. Une formulation de la seconde loi de Newton est $mdv = Fdt$. Pour une présentation de la mécanique newtonienne et lagrangienne, du même niveau que le présent ouvrage, voir le livre de Leonard Susskind *Le Minimum théorique : tout ce que vous avez besoin de savoir pour commencer à faire de la physique*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2015 (du même traducteur).

ou plus généralement dont on connaît l'accélération variable, il faut savoir résoudre le problème inverse – connaître la vitesse à partir de l'accélération, et même la position à partir de la vitesse –, c'est-à-dire intégrer. On peut donc dire que Newton était *forcé* d'inventer la différentiation et l'intégration afin de développer la théorie de la mécanique.

I.6.4 En même temps que le calcul différentiel et intégral, naquirent d'autres branches de l'analyse : la théorie des séries (voir chapitre II, section II.14, du présent volume), la théorie des équations différentielles (chapitres V et VI, dans le volume 2), l'application de l'analyse à la géométrie, qui plus tard donna naissance à tout un domaine de la géométrie : la théorie générale des courbes et surfaces, appelée géométrie différentielle (chapitre VII dans le volume 2).

Toutes ces théories apparurent et leur développement fut stimulé par les problèmes en mécanique, en physique et en technique. La théorie des équations différentielles – la branche la plus importante de l'analyse – porte sur les équations où l'inconnue n'est plus une grandeur (c'est-à-dire un nombre) mais une fonction. La loi de dépendance d'une grandeur à une autre ou plusieurs autres est maintenant elle-même l'inconnue à trouver.

Il est aisé de comprendre d'où viennent de tels problèmes. En mécanique on doit déterminer toute la loi de mouvement d'un corps soumis à certaines conditions, pas seulement une valeur de sa vitesse ou de sa position. En mécanique des fluides on doit trouver la distribution des vélocités au sein de l'ensemble formé par chaque petit élément de fluide, ce qui veut dire déterminer la dépendance de la vitesse à trois coordonnées spatiales plus une coordonnée temporelle. De manière analogue, en électromagnétisme on veut trouver le champ de potentiel dans tout un espace, c'est-à-dire la dépendance d'un voltage à trois coordonnées spatiales (et là encore fonction éventuelle du temps). Et ainsi de suite.

De tels problèmes surgissaient constamment en mécanique, y compris en hydrodynamique et en théorie de l'élasticité, en acoustique, en électromagnétisme, en théorie de la chaleur. Dès ses débuts l'analyse s'est développée en lien étroit avec le développement de la mécanique et de la physique en général. Les plus grands succès ont toujours été atteints en résolvant des problèmes posés par ces sciences. Démarrant avec Newton, les plus grands analystes, comme D. Bernoulli (1700-1782) et L. Euler (1707-1783), J.-L. Lagrange (1736-1813) et H. Poincaré (1854-1912), M.V. Ostrogradski (1801-1861) et A.M. Liapounov (1857-1918), et beaucoup d'autres, par leurs travaux ouvrirent de nouvelles voies, partant en règle générale de problèmes urgents issus des sciences exactes de leur époque.

C'est ainsi que naquirent de nouvelles théories : Euler et Lagrange créèrent, en lien direct avec la mécanique, une nouvelle branche de l'analyse appelée calcul des variations (voir chapitre VIII, vol. 2) ; et, à la fin du XIXe siècle, Poincaré et Liapounov, partant eux aussi de problèmes en mécanique, ont construit ce que l'on appelle la théorie qualitative des équations différentielles (chapitre V, vol 2, section V.7).

Au XIXe siècle l'analyse s'est enrichie d'une nouvelle branche importante : la théorie des fonctions d'une variable complexe (chap. IX, vol. 2). Les prémices de cette théorie se trouvaient déjà dans les travaux d'Euler et quelques autres mathématiciens, mais sa formulation en une théorie unifiée et élégante date du milieu du XIXe siècle, principalement avec les travaux du mathématicien français Augustin Cauchy (1789-1857). Cette théorie atteignit rapidement un développement significatif et acquit une grande importance à cause de la richesse de son contenu, et aussi car elle pénétrait plus profondément dans un grand nombre de résultats de l'analyse, et enfin car elle permettait de résoudre de grands problèmes en mathématiques, en physique et en technique.

L'analyse s'est développée très rapidement et devint non seulement la partie centrale et la plus importante des mathématiques, mais déborda aussi sur les domaines plus anciens de l'algèbre, de la géométrie et même de la théorie des nombres. On en vint à voir l'algèbre essentiellement comme la doctrine des fonctions exprimées sous forme de polynômes d'une ou plusieurs variables. Ce sont les fonctions $y = f(x)$ de la forme

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$$

Le principal problème de l'algèbre à cette époque était de résoudre l'équation

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$$

Ce n'était rien d'autre que la recherche des valeurs de x pour lesquelles la fonction polynomiale $y = f(x)$ ci-dessus s'annule. L'existence même d'une solution, qu'on établit à l'aide de la théorie des fonctions d'une variable complexe, indique que le polynôme a une racine. C'est ainsi que le théorème fondamental de l'algèbre est résolu par l'analyse (chap. IV, section IV.3).

En géométrie, la géométrie analytique et la géométrie différentielle devinrent dominantes. Enfin Euler introduisit les méthodes de l'analyse en théorie des nombres, fondant ce qu'on appelle la théorie analytique des nombres. Son développement est lié aux résultats les plus profonds de la théorie des nombres entiers.

Par le biais de l'analyse et de ses concepts de variable, de fonction et de limite, les idées de mouvement et de changement, et par conséquent la dialectique, pénètrent toutes les mathématiques. De même, toujours principalement à travers l'analyse, les mathématiques sont influencées par les sciences exactes et les techniques ; et les mathématiques font elles-mêmes partie du développement de ces dernières en tant que méthode permettant de formuler précisément des lois et de résoudre des problèmes. De même que pour les Grecs les mathématiques étaient essentiellement la géométrie, on peut dire qu'après Newton elles devinrent essentiellement l'analyse. Bien sûr l'analyse ne représente pas toutes les mathématiques ; en géométrie, en théorie des nombres et en algèbre, des objectifs et des méthodes demeurèrent qui leur étaient spécifiques.

Revenant au XVIIe siècle, en même temps que la géométrie analytique naquit un autre chapitre de la géométrie – la géométrie projective – dans laquelle les méthodes purement géométriques restent dominantes. Elle a pour origine le problème de décrire des objets projetés dans le plan et par conséquent a des applications en particulier en géométrie descriptive.

À la même époque, un nouveau domaine important des mathématiques vit le jour : la théorie des probabilités. Son objet est l'étude des régularités que l'on observe quand on répète un grand nombre de fois un certain type d'expérience, comme par exemple faire une série de tirs vers une cible distante, ou bien lancer un grand nombre de fois une pièce de monnaie. Elle a acquis dans la première moitié du vingtième siècle une signification spéciale en physique et aussi en technique. Elle atteignit sa grande époque, où les savants russes puis soviétiques jouèrent un rôle de premier plan, quand elle s'attaqua avec succès à des problèmes venant des sciences de la nature et de la pratique et en utilisant les méthodes de l'analyse. La spécificité de cette théorie réside dans le fait qu'elle s'occupe de *phénomènes où intervient le hasard*. Elle propose des méthodes mathématiques pour étudier les régularités particulières et quelque peu étonnantes qu'il engendre. Les bases de la théorie des probabilités seront exposées dans le chapitre XI (vol. 2).

I.6.5 L'analyse avec ses nombreuses ramifications donna aux sciences naturelles et à la technique une puissante méthode et de puissants outils pour résoudre une grande variété de problèmes. Nous en avons déjà mentionné quelques-uns : trouver le taux de variation à chaque instant d'une quantité quand on sait comment elle varie avec le temps ; calculer la surface de figures curvilignes et le volume de corps dans l'espace à trois dimensions ; déterminer le résultat total d'un processus ou l'action totale d'une grandeur variable. Ainsi le calcul intégral permet de déterminer le travail fourni par un gaz au cours de son expansion, quand sa pression change selon une loi connue ; il permet aussi de calculer par exemple le champ de potentiel électrique créé par un système de charges (ou de densité de charges), aussi complexe soit-il, en appliquant la loi de Coulomb qui donne le champ pour une charge ponctuelle unique, etc.

L'analyse offrit aussi une méthode pour trouver les valeurs maximales et minimales que peut prendre une grandeur variable soumise à certaines contraintes.

Par exemple à l'aide de l'analyse il est aisé de déterminer la forme du réservoir cylindrique qui, pour un volume donné, aura la plus petite surface, et donc coûtera le moins de matière. Il s'avère que ce minimum est atteint quand la hauteur du réservoir est égale au diamètre de sa base (figure I.10).

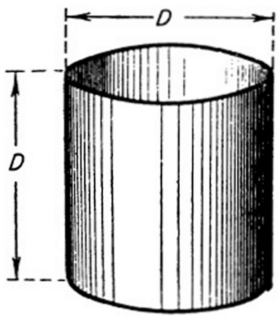


Figure I.10 : Réservoir de surface minimale pour un volume donné.

Autre exemple plus difficile : considérons, dans un plan vertical, entre deux points A et B, une courbe sur laquelle peut glisser sans frottement un objet ponctuel sous l'action de la gravité (fig. I.11). Trouver la courbe telle que l'objet la parcourra en un temps minimum. L'analyse permet de déterminer que cette courbe, qui porte le nom de « brachistochrone », du grec « brachis » court, « brachistos » le plus court, et « chronos » temps, est un segment de cycloïde.

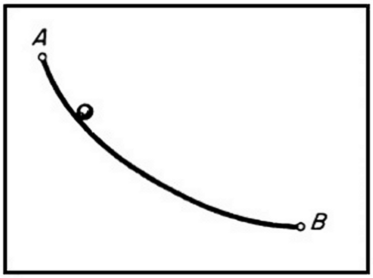


Figure I.11 : Courbe brachistochrone.

Nous apprendrons comment résoudre ces problèmes, et d'autres similaires, dans les chapitres II à IV (qui forment le reste du volume 1) et V à VIII (qui forment une partie du volume 2).

L'analyse, plus précisément la théorie des équations différentielles, permet de trouver non seulement des *valeurs individuelles inconnues* de grandeurs variables, mais aussi des *fonctions inconnues*, c'est-à-dire toute la loi de dépendance d'une variable vis-à-vis d'une ou plusieurs autres.

Par exemple, nous sommes capables, en utilisant les lois générales de l'électricité, de calculer comment variera l'intensité électrique en fonction du temps quand on met sous tension un circuit quelconque comprenant des résistances, des condensateurs et des bobines. Nous sommes capables de déterminer la loi d'écoulement d'un fluide, et la loi de distribution des vélocités en tous les points de son volume, sous des contraintes données. Nous sommes capables de calculer d'une manière générale les lois de vibration des cordes et membranes, et les lois de propagation des vibrations dans différents milieux physiques : cela s'applique aux ondes acoustiques, aux ondes électromagnétiques, et aux vibrations élastiques se propageant dans la terre lors des tremblements de terre ou des explosions. Cela fournit aussi, soit dit en passant, de nouvelles méthodes pour l'exploration minière et l'étude des sols en profondeur. Nous présenterons au lecteur et la lectrice quelques-unes de ces méthodes dans les chapitres V et VI (vol. 2).

Enfin l'analyse fournit non seulement les moyens de résoudre certains problèmes, mais elle offre des méthodes générales pour la formulation mathématique de lois quantitatives dans les sciences exactes. Comme déjà dit, les lois fondamentales de la mécanique ne peuvent pas être formulées mathématiquement sans recours aux concepts de l'analyse. Et sans une telle formulation, nous ne serions pas capables de résoudre les problèmes de mécanique. De même, les lois générales de la propagation de la chaleur, de la diffusion, de la propagation des vibrations, l'évolution des réactions chimiques, les lois de base de l'électromagnétisme, et beaucoup beaucoup d'autres ne peuvent tout simplement pas être formulées précisément sans les concepts de l'analyse. C'est seulement grâce à une telle formulation que les lois peuvent commencer à être mises en œuvre dans les cas les plus divers, et qu'elles fournissent la base pour des conclusions mathématiques précises dans une variété de problèmes se rapportant à la conduction de la chaleur, aux oscillations, à la dissolution, aux champs électromagnétiques, dans des problèmes de mécanique, d'astronomie, dans les nombreuses branches de la physique, de la chimie, de l'ingénierie thermique, dans les techniques de l'énergie, des machines, de l'électrochimie, etc., etc.

I.6.6 De même que dans l'histoire de la géométrie grecque l'exposition rigoureuse et systématique d'Euclide représente l'apothéose du long cheminement des développements précédents, à mesure que se développait l'analyse, le besoin se fit sentir de manière croissante pour une justification de ses procédés, et pour une exposition plus rigoureuse et systématique que celle que lui avaient donnée les premiers créateurs de ses outils : Newton, Euler, Lagrange et d'autres. L'analyse qu'ils avaient créée, à mesure qu'elle grandissait, premièrement conduisait à des problèmes de plus en plus profonds et difficiles, et deuxièmement son volume même commençait à exiger un examen plus systématique et bien pensé de ses fondations. D'une manière générale, la croissance quantitative d'une théorie conduit au besoin d'une meilleure justification, systématisation et sélection critique de ses fondations.

La justification d'une théorie vient toujours *après* ses premiers résultats remarquables, pas dès le départ, car sans les développements de la théorie on ne sait tout simplement pas ce qui a besoin d'être justifié. « Les principes, a dit Engels, ne sont pas le point de départ d'une discipline mais leur point final. » (citation extraite de son ouvrage contre le philosophe allemand Eugen Dühring, intitulé *Anti-Dühring*, Science Marxiste, 2007). Cette idée est souvent oubliée par certains formalistes modernes qui considèrent parfaitement satisfaisant d'exposer et même développer des théories à partir d'axiomes qui ne sont précédés d'aucune analyse du contenu réel et concret que la théorie aborde [11]. Cependant les axiomes ont besoin d'être substantiés ; ils ne font que synthétiser et abstraire des matériaux provenant de la réalité concrète et ils permettent la construction logique d'une théorie. Cette dualité dans le rôle des axiomes est parfois oubliée même dans des travaux de nature méthodologique, qui confèrent alors à la construction axiomatique une sorte de justification étrange et absolue de la théorie.

Pour l'analyse, la nécessaire période d'examen critique, de systématisation et de justification est venue au milieu du XIXe siècle. Grâce aux efforts d'un grand nombre de savants cet important et difficile travail a été mené à bien. En particulier, les concepts fondamentaux de nombre réel, de variable, de fonction, de limite, de continuité ont été établis sur des bases solides et rigoureuses.

Cependant, comme nous avons déjà eu l'occasion de le noter, aucune des définitions qu'ont reçues ces concepts ne peut être considérée comme absolument rigoureuse et finale.

---

11. Les auteurs font ici une critique voilée de l'école française Bourbaki qui a entrepris dès les années 1930 d'exposer dans une série de volumes les mathématiques sous une forme axiomatique aussi rigoureuse que possible, mais aussi très aride et peu adaptée à la pédagogie.

L'affinement des concepts se poursuit. Euclide et tous les mathématiciens pendant deux mille ans après lui considéraient les *Éléments* d'Euclide pratiquement comme la limite ultime en matière de logique et de rigueur. Pourtant de nos jours, selon le point de vue contemporain, la substantiation de la géométrie euclidienne apparaît plutôt superficielle. Cet exemple historique est là pour nous rappeler qu'il ne faut pas se laisser séduire par la rigueur « absolue » et « définitive » des mathématiques modernes.

Dans aucune science, qui n'est pas encore morte et embaumée, il n'y a et il ne peut y avoir quoi que ce soit de totalement définitif. Nous pouvons cependant affirmer avec confiance, premièrement que les fondations de l'analyse sont parfaitement adaptées aux défis scientifiques modernes et conformes à la conception actuelle de la rigueur logique, et deuxièmement que le continuel approfondissement des concepts et les débats qu'ils nourrissent ne remettent pas en cause ces fondations ; mais ils conduisent à une compréhension renouvelée et approfondie de ceux-ci, dont il est encore difficile d'apprécier toute la portée.

Bien que l'établissement des principes de la théorie vienne après son développement initial, ce n'est pas l'objectif final de la théorie. Au contraire, les principes servent pour de nouveaux développements. En même temps qu'étaient raffinées les fondations de l'analyse, une nouvelle théorie mathématique vit le jour, créée par le mathématicien allemand Georg Cantor (1845-1918) dans les années 70 du XIXe siècle. Il s'agit de la théorie générale des ensembles infinis d'éléments abstraits quelconques ; ces éléments peuvent être des nombres, des points, des fonctions, ou d'autres « choses » de même nature. Sur la base de ces idées un nouveau chapitre de l'analyse naquit : ce qu'on appelle la théorie des fonctions d'une variable réelle. Les concepts de cette théorie, ainsi que ceux des fondations de l'analyse et de la théorie des ensembles, sont exposés au chapitre XV (qui fait partie du volume 3). En même temps, les idées générales de la théorie des ensembles pénétraient dans toutes les branches des mathématiques. Mais cette approche « ensembliste » est indissolublement liée à une nouvelle phase dans le développement des mathématiques que nous allons à présent brièvement décrire.

I.7 Mathématiques contemporaines

I.7.1 Aux quatre grandes phases dans le développement des mathématiques, dont nous avons parlé dans la section I.5, correspondent naturellement quatre modes d'enseignement des mathématiques, si bien que le contenu de base de chaque phase est corrélé avec un niveau différent dans l'enseignement de la discipline.

Les principaux résultats, qui furent atteints en arithmétique et en géométrie lors de la période initiale de développement des mathématiques, sont connus de tous et sont enseignés à l'école primaire. Ainsi quand on veut évaluer la quantité de matériau nécessaire pour un travail quelconque, par exemple le carrelage d'une pièce, nous utilisons déjà des résultats élémentaires de mathématiques.

Les résultats les plus importants de la deuxième période – celle des mathématiques élémentaires – font partie des programmes de l'enseignement secondaire.

Les principaux résultats de la troisième période (les bases du calcul différentiel et intégral, les équations différentielles, l'algèbre supérieure, etc.) forment la plus grande partie de l'enseignement mathématique que reçoivent les ingénieurs. Sous une forme ou sous une autre, ils sont enseignés dans toutes les grandes écoles et toutes les universités dispensant un enseignement autre que purement littéraire. Par conséquent les idées et résultats de base des mathématiques de cette période sont largement connus, et presque tous les ingénieurs et scientifiques en font un usage de plus en plus important.

En revanche les idées et résultats de la dernière des quatre phases du développement des mathématiques sont enseignés seulement dans les facultés et les écoles spécialisées en mathématiques et en physique. En plus des mathématiciens, ces idées et résultats sont employés par les scientifiques en mécanique, physique et dans un grand nombre de nouvelles branches de la technologie. Leur niveau plus élevé ne veut pas dire du tout qu'ils soient éloignés des applications, mais étant donné qu'ils représentent les dernières avancées dans le développement de la science ils sont naturellement plus ardus.

Par conséquent, nous tournant maintenant vers une description générale de la phase la plus récente du développement des mathématiques, nous ne pouvons plus nous attendre à ce que tout ce que nous allons dire soit parfaitement accessible à tous. À grands traits nous allons nous efforcer de montrer les aspects les plus généraux des nouvelles branches des mathématiques. Leur contenu sera exposé en détail dans les chapitres respectifs qui leur sont consacrés.

Si la section suivante paraît trop difficile, elle peut être sautée en première lecture, et le lecteur et la lectrice pourront y revenir après avoir lu les chapitres spécialisés.

I.7.2 Les débuts de la période contemporaine en mathématiques sont marqués par de profonds changements dans les trois grandes branches que sont l'algèbre, la géométrie, et l'analyse.

Le changement le plus significatif est peut-être celui apporté en géométrie dès 1826 par le Russe Nicolas Lobatchevski (1792-1856), et presque au même moment par le Hongrois Janos Bolyai (1802-1860), quand ils développèrent deux variantes de la géométrie non euclidienne.

Les idées de Lobatchevski ne furent pas tout de suite claires pour tous les mathématiciens car elles étaient trop inattendues et audacieuses. Cependant, c'est à ce moment-là que commença un développement fondamentalement nouveau de la géométrie, et que la compréhension même qu'on en avait fut profondément bouleversée. La nouvelle branche mathématique que cela ouvrait crût rapidement. Le pas le plus important dans cette direction, après Lobatchevski, fut franchi en 1854 par le célèbre mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866). Il formula explicitement l'idée que la géométrie n'a pas seulement pour objet l'espace euclidien mais peut étudier les espaces les plus variés. En même temps il clarifia le sens même de ce qu'est un espace.

Deux circonstances notables caractérisent ces nouveaux développements de la géométrie.

Premièrement, tandis que la géométrie précédente étudiait seulement les formes et relations *spatiales* du monde matériel – et seulement dans la mesure où elles s'inscrivaient dans le cadre de la géométrie euclidienne –, maintenant le sujet de la géométrie portait sur de nombreuses *autres* formes et relations de la réalité, présentant seulement des *similitudes* avec l'espace. Ces autres formes et relations de la réalité pouvaient alors être étudiées à l'aide de méthodes géométriques. Le mot « espace » lui-même a acquis en mathématiques un sens nouveau, plus large et aussi plus technique. En même temps les méthodes de la géométrie se sont enrichies et diversifiées. En retour elles fournirent des outils neufs plus avancés pour connaître le monde qui nous entoure, lequel avait au départ, dans le processus d'abstraction que nous avons longuement décrit, engendré la géométrie originelle.

Deuxièmement, même en géométrie euclidienne, d'importantes évolutions eurent lieu : on se mit à étudier les propriétés de figures beaucoup plus complexes, jusqu'à des ensembles arbitraires de points. Une approche fondamentalement neuve pour investiguer les propriétés des figures vit le jour. Des groupes de propriétés spécifiques sont distingués et étudiés en faisant abstraction d'autres propriétés plus concrètes. En outre, au sein même de la géométrie, cette abstraction engendre des branches particulières, qui sont essentiellement des disciplines ou des géométries indépendantes. Le développement de la géométrie dans toutes ces directions se poursuit ; et son sujet est de plus en plus, simplement, les « espaces » et leurs « géométries ». Parmi les nombreux espaces auxquels on s'intéresse il y a l'espace de Lobatchevski, l'espace projectif, l'espace euclidien ordinaire à trois dimensions ou avec un nombre différent de dimensions, par exemple quatre, les espaces de Riemann, les espaces de Finsler, les espaces topologiques, etc. Ces théories trouvent d'importantes applications aussi bien en mathématiques pures au-delà de la géométrie, qu'en physique et en mécanique. Particulièrement remarquables sont les applications en théorie de la relativité qui, dans sa version restreinte, décrit l'univers comme un espace-temps à quatre dimensions plus complexe que celui de Galilée et Newton, et, dans sa version générale, qui y adjoint la gravitation, enrichit encore sa géométrie et la rend plus extraordinaire. De tout ce qu'on vient de dire, on peut conclure que la nature même de la géométrie a connu d'importants changements qualitatifs.

Les idées modernes en géométrie et quelques aspects des différents espaces qu'on y étudie seront présentés dans les chapitres XVII et XVIII (volume 3).

I.7.3 Des changements qualitatifs ont aussi eu lieu en algèbre. Dans la première moitié du XIXe siècle de nouvelles théories ont émergé qui bouleversèrent la discipline et élargirent son sujet et son champ d'application.

Dans la forme qu'elle avait à ses débuts, qui a été présentée dans la section I.5, l'algèbre consistait en l'étude des opérations arithmétiques sur les nombres, mais considérés formellement, dans leur généralité, en faisant abstraction de valeurs numériques spécifiques. Cette abstraction est reflétée par le fait qu'en algèbre élémentaire les grandeurs sur lesquelles on travaille ne sont pas des valeurs numériques mais sont représentées par des lettres. Et les opérations sur ces valeurs littérales sont effectuées selon les règles formelles bien connues.

L'algèbre moderne, tout en conservant cette base, l'a étendue dans des proportions inouïes. On considère désormais des « quantités » ou « grandeurs » de nature bien plus générale que les nombres. En outre on étudie des opérations sur ces « grandeurs », qui sont plus ou moins analogues dans leurs propriétés formelles aux opérations arithmétiques habituelles d'addition, soustraction, multiplication et division. L'exemple le plus simple est fourni par les grandeurs vectorielles, qui, comme chacun sait, peuvent être additionnées selon la règle du parallélogramme. Mais les généralisations effectuées en algèbre moderne sont telles que le terme même de « quantité » ou « grandeur » perd souvent son sens, et l'on préfère parler d'« objets » sur lesquels on peut faire des opérations similaires aux opérations algébriques usuelles. Par exemple deux déplacements effectués l'un après l'autre sont équivalents à un déplacement ; plus généralement il est évident que deux transformations algébriques exécutées l'une après l'autre sont équivalentes à une grande transformation unique, etc. Par conséquent on peut parler d'une sorte d'« addition » des déplacements ou des transformations [12]. Toutes ces choses et bien d'autres du même genre sont étudiées avec un haut degré d'abstraction en algèbre moderne.

Les nouvelles théories algébriques dans cette direction sont nées dans la première moitié du XIX^e siècle des travaux de plusieurs mathématiciens, parmi lesquels le Français Évariste Galois (1811-1832) mérite une mention particulière. Les concepts, méthodes et résultats de l'algèbre moderne trouvent des applications importantes en analyse, géométrie, physique, cristallographie, etc. La théorie des symétries d'un cristal notamment, mentionnée à la fin de la section I.3, développée par E.S. Fedorov, est fondée sur la combinaison de considérations géométriques avec l'une des nouvelles théories algébriques : la théorie des groupes.

On voit que l'on parle d'une généralisation radicale et d'un changement qualitatif du sujet de l'algèbre. Ce que l'on entend même par algèbre a profondément évolué. Les idées de l'algèbre moderne et les éléments de quelques-unes de ses théories sont présentés dans les chapitres XVI et XX, volume 3.

I.7.4 L'analyse enfin a aussi connu dans toutes ses branches des évolutions profondes. D'abord, comme déjà dit section I.6, ses fondations ont été clarifiées. Ses concepts fondamentaux, en particulier, ont reçu des définitions précises et générales : il s'agit des concepts de fonction, limite, intégrale, et enfin

12. En français on utilise le terme de « composition » des transformations. Si on a deux transformations f et g, la transformation consistant à appliquer d'abord f, puis g, sera notée habituellement $g \circ f$.

du concept même de variable (on a aussi donné une définition rigoureuse de ce qu'est un nombre réel). On peut faire remonter les débuts de cette refonte des bases de l'analyse pour leur donner plus de rigueur aux travaux du mathématicien tchèque Bernard Bolzano (1781-1848), du mathématicien français Augustin Cauchy et de quelques autres.

Cette mise au net date de la même époque que les nouveaux développements en algèbre et en géométrie dont nous venons de parler (théorie de Galois, théorie de Lobatchevski) ; elle fut en bonne partie achevée, dans les années 80 du XIX^e siècle, par les mathématiciens allemands Weierstrass, Dedekind et Cantor. Ce dernier, comme on l'a dit à la fin de la section I.6, a jeté les bases de la théorie des ensembles infinis, qui a joué un grand rôle dans les développements de nouvelles idées mathématiques. La clarification des concepts de variables et de fonctions en lien avec la théorie des ensembles permit de nouveaux progrès en analyse. Une transition se déroula vers l'étude de fonctions plus générales.

En parallèle on généralisa les deux grands outils de l'analyse, c'est-à-dire le calcul différentiel et le calcul intégral. À l'orée du XX^e siècle, comme dit plus haut, un nouveau chapitre de l'analyse fut ajouté, appelé la théorie des fonctions d'une variable réelle. Cette théorie a été développée d'abord sous l'impulsion des mathématiciens français Émile Borel (1871-1956), Henri Lebesgue (1875-1941) et quelques autres, puis par Nikolaï N. Louzine (1883-1950) et ses disciples. D'une manière générale les nouveaux chapitres de l'analyse sont appelés l'*analyse moderne*, en contraste avec ses chapitres plus anciens appelés l'*analyse classique*.

D'autres théories sont encore apparues en analyse. La théorie de l'approximation des fonctions est devenue une discipline à part entière. Son objet est de trouver les meilleures représentations approximatives de fonctions quelconques à l'aide de fonctions « simples », au premier chef les polynômes, c'est-à-dire les fonctions de la forme

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

La théorie de l'approximation des fonctions est importante ne serait-ce que parce qu'elle fournit des méthodes générales pour effectuer pratiquement des calculs sur des fonctions, en remplaçant les fonctions d'origine qui peuvent être difficiles à manier par des fonctions plus simples qui les approximent. Les premiers rudiments de cette théorie datent des débuts mêmes de l'analyse (à la fin du XVII^e^ et au début du XVIII^e^ siècle). Une impulsion dans une nouvelle direction lui fut donnée par le grand mathématicien russe Pafnouti L. Tchebychev (1821-1894). Cette direction fut par la suite élaborée en la théorie constructiviste des fonctions, principalement par les mathématiciens soviétiques, au premier rang desquels Sergeï N. Bernstein (1880-1968) à qui l'ont doit les résultats les plus importants. Le chapitre XII (vol. 2) est consacré à l'approximation des fonctions.

On a déjà parlé plus haut du développement de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Nous devons aussi mentionner ce qu'on appelle la théorie qualitative des équations différentielles. Les travaux précurseurs sont dus à H. Poincaré et A.M. Liapounov. Cette théorie est présentée au chapitre V (vol. 2). La théorie des équations intégrales doit aussi être signalée, etc.

Ces récentes théories en analyse sont d'une grande importance pratique en mécanique, physique et technologie. Par exemple la théorie qualitative des équations différentielles résout le problème de la stabilité des mouvements, du fonctionnement des mécanismes et machines, des systèmes électriques présentant des oscillations, etc.

Un processus est dit stable, dans un sens très général, quand un petit changement dans ses données initiales ou dans les conditions de son déroulement n'entraînera qu'un changement insignifiant de toute son évolution au cours du temps [13].

13. L'ouvrage a été écrit avant l'avènement de la théorie du chaos à la fin du XX^e^ siècle à la suite de la découverte par le météorologiste américain Edward Lorenz (1917-2008) de l'instabilité étonnante de certains systèmes d'équations très simples modélisant les mouvements atmosphériques, et devenue célèbre sous le nom d'« effet papillon ».

L'importance technique de ces questions n'appelle pas de commentaires.

I.7.5 Basé sur le développement de l'analyse et de la physique mathématique, en relation avec les nouvelles idées en géométrie et en algèbre, un vaste nouveau champ a vu le jour. Il s'agit de l'*analyse fonctionnelle*, qui joue un rôle extrêmement important en mathématiques contemporaines. De nombreux savants prirent part à sa création ; nous citerons par exemple le plus grand mathématicien allemand de l'époque moderne, David Hilbert (1862-1943), le mathématicien hongrois Frédéric Riesz (1880-1956) et le mathématicien polonais Stéphane Banach (1892-1945). D'importants résultats dans ce domaine sont liés à la physique mathématique et sont au crédit de jeunes mathématiciens soviétiques. L'analyse fonctionnelle est le sujet du chapitre XIX.

L'essence de cette nouvelle partie des mathématiques peut se résumer ainsi : là où en analyse classique la variable prend ses valeurs dans un ensemble de *nombres*, en analyse fonctionnelle la variable prend ses « valeurs » dans un ensemble de *fonctions*. Autrement dit la variable est elle-même une fonction ; et dans une équation d'analyse fonctionnelle, ce qu'il faut trouver est une *fonction inconnue*.

Les informations permettant de retrouver cette fonction portent sur ses relations avec d'autres fonctions, y compris des fonctions qui en découlent (dérivées, etc.). Par conséquent on ne considère plus des fonctions individuelles, mais dès le départ la totalité des fonctions partageant une ou plusieurs caractéristiques. Par exemple on travaille au sein des fonctions continues. Cet ensemble de fonctions dans lequel on travaille forme ce qu'on appelle un *espace fonctionnel*. Cela correspond au fait que nous pouvons considérer l'ensemble des courbes dans le plan ou tous les mouvements possibles d'un système mécanique donné ; on détermine les propriétés des courbes ou des mouvements par leurs relations avec d'autres courbes ou d'autres mouvements.

La transition entre l'étude ou la recherche de fonctions individuelles et la considération d'une fonction *variable* est semblable à la transition entre les nombres inconnus x, y et les *variables* x, y, autrement dit c'est comparable à l'idée de Descartes décrite dans la section précédente. Mettant en œuvre cette idée, Descartes produisit la célèbre combinaison de l'algèbre et de la géométrie, liant une équation et le dessin d'une courbe – ce qui marque l'une des dates majeures dans les travaux qui pavèrent la voie à l'analyse.

De la même façon maintenant la combinaison du concept de *fonction variable* avec les idées en algèbre et géométrie contemporaines a engendré une nouvelle analyse : l'analyse fonctionnelle. De même qu'au XVII^e siècle l'analyse était nécessaire pour l'essor de la *mécanique classique* qui venait d'être créée par Galilée, de même l'analyse fonctionnelle offrait de nouvelles méthodes pour résoudre les problèmes en physique mathématique et apportait la boîte à outils mathématique pour la nouvelle physique atomique apparue dans les années 20 du XX^e siècle sous l'impulsion de savants comme Louis De Broglie, Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger et Paul Dirac la *mécanique quantique*.

Dans une certaine mesure l'histoire se répète, mais en se renouvelant, à un niveau plus élevé. L'analyse fonctionnelle combine, comme nous l'avons dit, les idées et méthodes de base de l'analyse, avec l'algèbre et la géométrie contemporaines, et en retour elle a une influence sur leur développement. Des problèmes d'analyse classique reçoivent maintenant de nouvelles solutions, souvent grâce à l'analyse fonctionnelle. Ici, comme dans une sorte de focalisation, les idées les plus générales et abstraites des mathématiques pures se rassemblent et produisent une moisson de résultats pratiques.

Dans cette courte présentation, à partir d'une énumération des nouveaux domaines de l'analyse (la théorie des fonctions d'une variable réelle, la théorie des approximations, la théorie qualitative des équations différentielles, la théorie des équations intégrales, l'analyse fonctionnelle, etc.), on peut voir qu'il s'agit d'une étape substantiellement nouvelle dans le développement de l'analyse.

I.7.6 À toutes les époques le niveau technique des outils de calcul (avec des nombres) a eu une influence importante sur les méthodes mathématiques elles-mêmes. Cependant jusqu'à récemment les outils à notre disposition pour faire des calculs étaient restés très limités. Les outils les plus simples (comme les comptes), les tables de logarithmes, la règle à calcul, les arithmomètres, enfin les machines à calculer mécaniques motorisées et les machines à calculer analogiques, représentaient essentiellement tous les outils disponibles pour faire des calculs encore dans les années 40 du vingtième siècle. Ces outils permettent l'exécution plus ou moins rapide d'opérations individuelles (addition, multiplication, etc.).

Mais conduire la résolution d'un problème pratique jusqu'à un résultat numérique demande parfois une quantité colossale d'opérations de ce genre, suivant un cheminement complexe, dépendant lui-même souvent des résultats numériques intermédiaires. La solution de tels problèmes s'avéra pratiquement irréalisable ou bien perdant toute utilité à cause du temps nécessaire pour l'atteindre.

Entre 1940 et 1950, nous avons assisté à la naissance d'outils de calcul d'un tout autre niveau technologique. Les ordinateurs modernes, fondés sur de nouveaux principes, non seulement exécutent les opérations élémentaires à une vitesse stupéfiante, mais sont capables d'effectuer automatiquement des chaînes de calculs selon un programme spécifique hautement flexible (pouvant prendre en compte les résultats intermédiaires pour orienter la suite des calculs [14]) préparé à l'avance. Quelques questions liées à la conception et aux aspects mathématiques fondamentaux des ordinateurs sont abordées dans le chapitre XIV (dernier chapitre du tome 2).

L'informatique née au XX^e^ siècle non seulement permet des recherches auparavant hors de notre portée mais elle nous force à modifier notre façon de voir un certain nombre de résultats mathématiques connus. Elle stimule en particulier le développement des méthodes d'approximation. Maintenant,

14. Les lignes de code comme « if (condition) {opération} else {opération différente} ».

dans un problème quelconque, à l'aide de chaînes de calculs élémentaires, on peut s'approcher avec la précision dont on a besoin de la solution numérique exacte. Les méthodes numériques doivent elles-mêmes être évaluées au regard de la commodité de leur mise en œuvre sur des ordinateurs.

Le développement de la programmation s'est déroulé en lien étroit avec celui de la logique mathématique. Cette dernière est née de difficultés et besoins intrinsèques que l'on rencontrait en mathématiques ; son sujet principal est la théorie de la preuve. La logique mathématique est la partie de la logique générale qui se prête à une formalisation, peut être abordée par des méthodes mathématiques, et par conséquent fait partie intégrante de la discipline.

Se tournant d'un côté vers les sources et fondations des mathématiques, la logique mathématique s'avère, d'un autre côté, étroitement liée aux questions les plus actuelles en informatique. Il est évident par exemple qu'une démonstration conduisant à la construction d'une méthode de calcul permettant de s'approcher numériquement aussi près qu'on veut de la solution exacte d'un problème n'est pas du tout la même chose qu'une démonstration abstraite de l'existence d'une telle solution exacte.

Tout un ensemble de questions particulières a surgi aussi en lien avec l'étude des limites de généralité de la classe de problèmes pouvant être attaqués par une méthode bien définie, uniforme, et dont on sait qu'elle conduira à une solution. Dans ce domaine, la logique mathématique a atteint des résultats profonds, importants même du point de vue de la connaissance.

On peut dire sans exagération qu'en mathématiques contemporaines, le développement des nouvelles méthodes de calcul faisant appel à l'informatique et les succès de la logique mathématique marquent une nouvelle période. Celle-ci est caractérisée par le fait que les sujets d'étude ne sont plus tel ou tel objet, mais aussi les façons de l'aborder et les formes sous lesquelles il apparaît, et ne sont plus seulement la solution de tel ou tel problème mais aussi les différentes voies possibles pour le résoudre.

Il reste à ajouter que les domaines plus anciens des mathématiques – que sont la théorie des nombres, la géométrie euclidienne, l'algèbre et l'analyse classiques, la théorie des probabilités – ont continué à se développer vigoureusement durant la période des mathématiques contemporaines, constamment enrichis par de nouvelles idées et de nouveaux résultats. On peut citer dans ce domaine les travaux des mathématiciens russes ou soviétiques P.L. Tchebychev, E.S. Fedorov, I.M. Vinogradov et d'autres.

Enfin le vaste développement de la théorie des probabilités est associé aux importantes lois observées en physique statistique et aux problèmes modernes en technologie.

I.7.7 Quelles sont les caractéristiques communes à l'ensemble des mathématiques contemporaines que l'on peut distinguer à partir des développements de la géométrie, de l'algèbre et de l'analyse que nous venons d'examiner ?

C'est avant tout l'énorme expansion du sujet des mathématiques et de leurs champs d'application. Une telle expansion du sujet et des champs d'application veut dire à la fois leur croissance énorme quantitative et qualitative, l'émergence de nouvelles théories et de méthodes mathématiques puissantes qui permettent de résoudre des problèmes jusqu'alors inaccessibles. En outre l'expansion du sujet des mathématiques est caractérisée par le fait que celles contemporaines se donnent pour tâche l'étude de tous les types de relations quantitatives et de formes spatiales.

Une autre caractéristique des mathématiques contemporaines est la création de concepts généralisateurs nouveaux et à un niveau plus élevé d'abstraction. C'est précisément cet aspect qui garantit l'unité des mathématiques, malgré la croissance et la diversification de leurs branches. Entre les domaines les plus éloignés les uns des autres, des concepts et théories généralisateurs révèlent les caractéristiques partagées et l'unicité. Ces concepts et théories apportent des méthodes communes, avec des applications très étendues, et permettent une profonde interpénétration des grands domaines des mathématiques que sont la géométrie, l'algèbre et l'analyse. Ainsi la théorie des ensembles est au cœur de toutes les branches des mathématiques modernes. Bien sûr elle a pu prendre cette place précisément car elle synthétise des matériaux accumulés durant les développements précédents.

Enfin une caractéristique des mathématiques contemporaines qu'il faut encore noter est l'approfondissement de leurs fondations, l'examen de l'interdépendance entre leurs concepts, entre les structures des théories particulières, et l'éclairage sur les traits communs des méthodes de démonstration et des résultats. Sans une telle analyse des fondations, ces principes et théories généralisateurs ne pourraient pas s'améliorer ni se développer davantage.

Ce qui marque au premier chef les mathématiques contemporaines est que leur sujet n'est plus seulement les données, mais aussi les relations quantitatives et les formes possibles elles-mêmes. En géométrie nous ne parlons pas seulement de ce qui est spatial, mais aussi, dans ce qui s'assimile au spatial, des relations et des formes possibles. En algèbre nous parlons de différentes structures d'objets abstraits et des opérations possibles sur eux. En analyse d'une variable ce n'est plus seulement une quantité qui est la variable, mais toute une fonction qui devient considérée comme la variable. Dans un espace fonctionnel toutes les fonctions d'un même type forment l'espace, c'est-à-dire toutes les dépendances possibles entre variables ordinaires.

Par conséquent, si on a pu dire en résumé que les mathématiques élémentaires (la deuxième des grandes périodes, cf. p. 56) étaient les mathématiques des *quantités constantes*, et les mathématiques de la période suivante celles des *quantités variables*, alors on peut dire des mathématiques de la période contemporaine (quatrième période) ceci :

Les mathématiques contemporaines sont les mathématiques des relations possibles entre variables très générales, les relations et interconnexions quantitatives entre objets.

Cette définition est bien sûr incomplète, cependant elle souligne bien ce qui d'une manière générale distingue les mathématiques contemporaines des mathématiques des périodes précédentes.

I.8 L'essence des mathématiques

I.8.1 À la suite de tout ce qui vient d'être dit, nous sommes maintenant en mesure de conclure de manière générale sur ce qu'est l'essence des mathématiques.

L'essence des mathématiques a été décrite par Engels dans son livre *Anti-Dühring*. Nous en citons ci-dessous un passage remarquable.

Dans la formulation d'Engels, le lecteur ou la lectrice reconnaîtra aisément ce qui a été dit plus haut, par exemple concernant l'arithmétique et la géométrie. Et c'est compréhensible : nous avons exposé l'histoire factuelle de l'émergence et du développement des mathématiques, guidés dans notre compréhension par le matérialisme dialectique. Celui-ci conduit aux bonnes conclusions, précisément car il n'impose aucune interprétation aux faits, mais les considère en ce qu'ils sont, dans leurs connexions et développements nécessaires.

Engels commence son exposition de l'essence des mathématiques par une critique des vues absurdes de Dühring, en particulier de l'opinion erronée que les mathématiques sont une création de la « raison pure » indépendamment de l'expérience. Engels écrit :

> « Mais il est tout à fait faux qu'en mathématiques pures l'esprit ne s'occupe que du produit de sa propre créativité et de sa propre imagination. Les concepts de nombres et de figures ne viennent pas de nulle part mais du monde réel. Les dix doigts sur lesquels les gens ont appris à compter, c'est-à-dire à faire la première opération arithmétique, sont tout sauf le produit de la libre créativité de l'esprit. Pour compter, on doit avoir non seulement des objets pouvant être énumérés, mais on doit posséder aussi la capacité de faire abstraction

de toutes les propriétés particulières de ces objets sauf la cardinalité de l'ensemble qu'ils forment. Et cette capacité d'abstraction est le résultat d'une longue expérience accumulée au cours de l'histoire de l'humanité. Le concept de nombre aussi bien que celui de figure viennent seulement de la réalité extérieure et ne sont pas apparus dans la tête des hommes par pure pensée. Il fallait qu'il y ait des choses ayant des formes, et ces formes devaient être comparées avant qu'on puisse élaborer le concept de figure géométrique. Les mathématiques pures ont pour sujet les formes spatiales et les relations quantitatives du monde réel, et par conséquent sont très concrètes. Le fait que cela prenne un aspect extrêmement abstrait en mathématique peut obscurcir leur origine, qui se trouve dans le monde extérieur. Mais pour être capable d'explorer ces formes et ces relations dans leur forme pure, il est nécessaire de les séparer complètement de leurs contenus, de laisser de côté tout ce qui n'a pas de rôle ; c'est ainsi que nous parvenons à des points géométriques sans dimensions, des lignes sans épaisseur ou largeur, à des paramètres a ou b, et des grandeurs variables x ou y ; seulement à la fin arrivons-nous au produit de la libre créativité et de la libre imagination de l'esprit lui-même, c'est-à-dire à des grandeurs dans l'esprit. De la même façon, la dérivation de quantités mathématiques l'une par rapport à l'autre, qui semble a priori, ne démontre pas que leur origine soit a priori, mais seulement qu'elles ont une relation mutuelle sur laquelle on peut raisonner. Avant de parvenir à l'idée que la rotation d'un rectangle autour d'un de ses côtés produisait la *forme* d'un cylindre, il était nécessaire d'étudier beaucoup de rectangles et de cylindres même s'ils avaient des formes très imparfaites. Comme les autres sciences, les mathématiques se sont développées à partir des *besoins pratiques* des gens : la mesure de la surface d'un terrain et du volume d'un récipient, la mesure

> du temps et la mécanique. Mais, comme dans tous les autres domaines de la pensée, les lois proviennent de l'examen du monde réel. À une certaine étape de développement, elles sont séparées du monde réel, dans un processus d'abstraction, et deviennent au contraire quelque chose d'indépendant, comme des lois qui viendraient d'ailleurs et auxquelles le monde devrait se conformer. De même qu'il en est ainsi de la société et de l'État, et pas autrement, les mathématiques *pures s'appliquent* au monde, bien qu'elles aient été empruntées à ce monde et ne fassent que représenter certaines formes et relations propres à ce monde ; c'est *seulement après cette abstraction* qu'elles peuvent s'appliquer. » (F. Engels, *Anti-Dühring*, 1878, dans les Œuvres complètes de Marx et Engels traduites en russe, Sotsekgiz. 1931, Tome 14, pp 36-37.)

I.8.2 Engels souligne ainsi que les mathématiques reflètent la réalité, qu'elles sont issues des besoins pratiques des gens, et que l'émergence des premiers concepts et lois fut le résultat d'un long processus historique à partir de l'expérience. Nous avons déjà donné suffisamment d'illustrations avec l'arithmétique et la géométrie.

Nous avons vu en particulier que c'est ainsi que sont apparus les concepts de nombre, de quantité, et de figure géométrique, et qu'ils reflètent des relations quantitatives qui existent dans la réalité. De la même manière les concepts de base de l'analyse reflètent des relations quantitatives réelles ; ils ont été peu à peu développés dans un processus de généralisation à partir d'une énorme quantité de matériau concret ; ainsi le concept de fonction reflète-t-il sous une forme généralisée et abstraite une variété de dépendances entre grandeurs matérielles.

Synthétisant tout cela, Engels parvient à la conclusion centrale que *les mathématiques ont pour sujet des aspects tout à fait réels de monde concret, mais les considèrent de manière abstraite en laissant de côté certains contenus et qualités spé-*

cifiques. En cela, comme nous l'avons vu, les mathématiques se distinguent des sciences de la nature, et Engels le souligne clairement (op. cit., pp. 10-11).

La possibilité d'une telle approche abstraite du sujet dont s'occupent les mathématiques a une base objective dans le sujet lui-même. Les aspects généraux du monde extérieur qui ne dépendent pas de qualités ou contenus spécifiques, c'est-à-dire les formes, relations et lois qui sont reflétées par les mathématiques existent objectivement, indépendamment de notre conscience.

C'est l'existence du nombre en tant que propriété objective d'un ensemble d'objets, indépendamment des qualités spécifiques des objets considérés, et la richesse de ce concept qui ont permis le développement de l'arithmétique. Là où il n'y a pas une telle forme générale ou une telle relation générale que l'on puisse aborder de manière abstraite indépendamment des qualités particulières des contenus, les considérations mathématiques sont impossibles.

I.8.3 Cette caractéristique principale des mathématiques, que nous venons de décrire, en entraîne d'autres. Dans la section I.2 nous avons considéré certaines d'entre elles en prenant l'exemple de l'arithmétique. Il s'agit du « langage des formules », de l'étendue des applications, et de la nature des conclusions mathématiques atteintes en faisant abstraction des aspects spécifiques de l'expérience, c'est-à-dire qu'il s'agit du caractère logique et indiscutable de ces conclusions. Cette nature spéculative des mathématiques est une de leurs caractéristiques très importantes, et nous allons l'examiner plus en détail.

Si nous considérons de manière abstraite, mettons, le concept de nombre, dégagé des qualités spécifiques des objets qu'il compte dans un exemple particulier, si nous considérons le concept général de nombre entier, sans lien avec des ensembles particuliers d'objets, alors il va sans dire que nous ne pouvons pas nous livrer à des expériences sur ces nombres abstraits.

Quand on reste à ce niveau abstrait, dégagé des choses que comptent les nombres, la seule manière de parvenir à de nouvelles connaissances est en utilisant le raisonnement logique, fondé sur la définition même du concept de nombre.

La même chose peut être dite, bien sûr, de toutes les conclusions mathématiques. Quand on se cantonne à la géométrie pure, c'est-à-dire en considérant les figures géométriques en faisant totale abstraction de toute qualité spécifique ou contenu concret, nous ne pouvons pas atteindre de nouveaux résultats autrement que par le raisonnement logique, en partant du concept même d'une figure ou d'une autre, et en utilisant les concepts ou axiomes de base de la géométrie. Ainsi les propriétés du cercle sont déduites de la définition du cercle comme lieu géométrique des points, dans un plan, à égale distance d'un point donné [15], pas du tout en les testant expérimentalement sur chaque cercle concret.

Par conséquent, *le caractère abstrait des mathématiques est déjà prédéterminé par le fait que les théorèmes mathématiques sont démontrés exclusivement par le raisonnement logique, en partant des concepts eux-mêmes.*

On peut dire que les relations quantitatives sont étudiées en mathématiques en gardant à l'esprit seulement ce qui est contenu dans leur définition, et que les conclusions mathématiques correctes auxquelles on parvient sont des conséquences logiques des définitions. Bien sûr ce serait une erreur de prendre cette phrase trop à la lettre et penser que des définitions suffisamment rigoureuses de concepts magmatiques ont été établies avant que la théorie correspondante ne fût créée ; en fait, les concepts eux-mêmes ont été raffinés tout au long du développement de la théorie et *en conséquence* de ce développement. Une analyse approfondie du concept de nombre entier, de même qu'une formulation précise des axiomes de la géométrie, ne furent pas données dès l'Antiquité, mais seulement à la fin du XIX^e siècle. Il serait er-

15. Une intéressante définition alternative du cercle est donnée par le mathématicien Jean-Marie Souriau (1922-2012) dans l'entretien suivant : `https://lapasserelle.com/documents/SouriauJME3.pdf`

roné aussi de croire qu'il existe une définition absolument précise d'un concept mathématique, quel qu'il soit. Chaque concept, aussi précis puisse-t-il sembler, est encore en évolution ; il est raffiné à mesure que la science qui l'utilise se développe. C'est parfaitement illustré par le développement des mathématiques en relation avec tous leurs concepts ; et cela confirme une fois de plus l'affirmation fondamentale de la dialectique selon laquelle rien dans ce monde n'est absolument fixe, mais tout est en évolution. C'est pourquoi, en ce qui concerne les concepts mathématiques, premièrement on peut parler seulement de définitions satisfaisantes, pas de définitions parfaites, et deuxièmement il faut garder à l'esprit que la précision et la clarté de leur définition, la profondeur de leur analyse, continuent de progresser en parallèle au développement des mathématiques. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce caractère évolutif plus loin. Pour l'instant, laissant cela de côté, tournons-nous vers leur caractère satisfaisant.

C'est précisément ce caractère bien défini des concepts mathématiques en même temps que la validité générale de la logique qui expliquent la force interne des mathématiques et l'irréfutabilité de leurs résultats.

Que les conclusions des mathématiques spéculatives soient incontestables a conduit certains à l'idée erronée que les mathématiques seraient un produit de la pure pensée, a priori, sans lien avec l'expérience, et ne refléteraient pas la réalité. C'est la conclusion à laquelle est parvenu par exemple le célèbre philosophe allemand Emmanuel Kant (1724-1804). Cette profonde erreur des philosophes du courant idéaliste vient en particulier de ce qu'ils ne contemplent pas les mathématiques dans leur histoire et leur développement mais seulement dans leur forme achevée.

Une telle approche est cependant indéfendable ne serait-ce que parce qu'elle ne correspond pas à l'état actuel de la discipline. Le fait que les mathématiques ne soient pas a priori, mais soient issues de l'expérience pratique est bien établi. Rappelons-nous par exemple ce qu'écrivait Eudème de Rhodes (p. 32) sur la façon dont a émergé la géométrie.

Non seulement les concepts mêmes des mathématiques, mais aussi leurs conclusions, leurs méthodes sont un miroir de la réalité. C'est ce fait important que souligne à juste titre Engels quand il écrit que « la dérivation de quantités mathématiques l'une par rapport à l'autre, qui semble a priori, ne démontre pas que leur origine soit a priori, mais seulement qu'elles ont une relation mutuelle sur laquelle on peut raisonner ». Les conclusions mathématiques et les démonstrations sont nées en tant que reflet des relations réelles que les gens observaient dans l'expérience.

L'addition des nombres reflète la combinaison concrète de plusieurs ensembles d'objets pour n'en former plus qu'un. Il ne fait pas de doute que la démonstration bien connue du théorème sur l'égalité des triangles, dans laquelle on parle de leur superposabilité, a sa source dans l'opération pratique consistant à prendre une forme concrète et à la poser sur une autre, opération que l'on fait constamment quand on veut comparer leurs tailles. Le calcul des volumes par la technique de l'intégration reflète de manière abstraite la possibilité concrète de découper un volume en un grand nombre de fines tranches, dont on connaît le volume de chacune à partir de sa surface et son épaisseur, puis en additionnant le tout. Les démonstrations mathématiques plus complexes sont elles aussi des développements plus sophistiqués de procédés comparables ayant une base matérielle.

I.8.4 Le processus d'abstraction appliqué par les mathématiques à leurs objets concrets d'origine, éliminant tout ce qui est spécifique et ne jouant pas de rôle, et la nature par conséquent spéculative des résultats conduisent à une autre caractéristique notable des mathématiques : on n'y étudie pas seulement les relations quantitatives et les formes spatiales directement issues de la réalité et purifiées par le processus d'abstraction, mais aussi les relations et les formes qui émergent au sein des mathématiques elles-mêmes à partir de concepts et théories déjà élaborés. C'est sur cette caractéristique qu'Engels attire notre attention quand, parlant de l'émergence des concepts de points, de lignes, de paramètres et de variables, il dit : « seulement à la fin arrivons-nous au produit de la libre créativité et de la libre imagination de l'esprit lui-même, c'est-à-dire à des grandeurs dans l'esprit. »

C'est un fait historique, il est vrai, que les nombres complexes ne se sont pas développés à l'origine à partir de la réalité dans le même sens que, par exemple, les nombres entiers. Ils apparurent au départ à l'intérieur des mathématiques elles-mêmes, au cours du développement de l'algèbre. Leur nécessité se fit sentir quand des manipulations algébriques légitimes conduisirent inexorablement à des racines d'équations étranges de la forme $x^2 = -a$ (où $a > 0$). Et, bien qu'on les utilisât peu à peu avec une grande liberté, leur vraie signification resta longtemps mystérieuse, c'est pourquoi on leur donna le nom d'« imaginaires ». Ensuite on découvrit pour eux une interprétation géométrique simple et ils eurent beaucoup d'applications.

De même la géométrie de Lobatchevski est née purement dans les travaux de ce grand savant ; il ne vit pas non plus sa vraie signification, c'est pourquoi il l'appela « géométrie imaginaire ». Cependant elle n'était pas un pur jeu de l'esprit, mais une conséquence inévitable des concepts de base de la géométrie, et Lobatchevski la considérait comme une théorie possible des formes et relations spatiales.

La « libre créativité et imagination de l'esprit », pour reprendre l'expression d'Engels, ne doit donc pas être comprise comme un simple exercice intellectuel avec des règles arbitraires. La libre créativité en science est une nécessité logique et consciente, procédant des concepts et idées issus de l'expérience.

Lors de la nouvelle phase de développement des mathématiques, qui commença avec l'élaboration de la géométrie de Lobatchevski et la clarification de la théorie des nombres imaginaires, de nouveaux concepts et de nouvelles théories sont apparus – et continuent à apparaître – qui sont fondés sur des concepts et théories déjà existants, et non plus dérivés directement de la réalité. Depuis leurs débuts les mathématiques élaborent et explorent les formalisations possibles de la réalité. Et c'est particulièrement vrai des mathématiques de l'époque contemporaine.

La compréhension correcte de cet aspect des mathématiques est apportée par la théorie de la connaissance qui fait partie du matérialisme dialectique. Lénine a écrit :

> « La connaissance est un reflet de la nature dans l'esprit de l'homme. Mais ce n'est pas une image miroir simple et directe, reproduisant intégralement la nature ; c'est le résultat d'un processus comportant plusieurs étapes d'abstraction, de création, de formation de concepts, de lois... » (V.I. Lénine, *Cahiers philosophiques*, p. 156).

Le matérialisme métaphysique indique aussi que le savoir, en particulier en mathématiques, est un reflet de la nature. Cependant, comme l'a écrit Lénine, la difficulté à laquelle se heurte le matérialisme métaphysique, c'est qu'il est incapable d'appliquer la dialectique à la doctrine du reflet (ibid. p. 330). Le matérialisme métaphysique comprend la complexité de ce reflet, mais ne comprend pas qu'il est le résultat d'une série d'abstractions, chacune incluant la formation de nouveaux concepts, l'élaboration de nouvelles théories fondées sur les concepts et théories existants, et considérant non seulement ce qui est apporté par l'expérience, mais aussi ce qui est possible.

Cette transition depuis le donné, issu directement de l'expérience, vers le possible est déjà évidente dans la formation de concepts comme celui de nombre quelconque ou de ligne droite infinie. Lorsque le concept de nombre a émergé, comme on l'a décrit à partir de ce concept même et de la loi de formation des nombres consécutifs en ajoutant chaque fois un, a pris corps l'idée d'une suite sans fin. La possibilité d'un cheminement sans limites le long d'une ligne droite est déjà exprimée dans le second axiome d'Euclide qui dit que « chaque ligne droite peut être prolongée indéfiniment ». Ainsi c'est la poursuite du processus d'abstraction – qui avait déjà créé les nombres et les droites – qui a conduit aux concepts d'*ensemble infini des nombres entiers*, et de *droite infinie*.

Lors de la phase la plus récente du développement des mathématiques, il y a eu un changement qualitatif dans l'élaboration des théories, chacune reposant désormais déjà sur des théories et des concepts abstraits. Mais, cette construction ascendante d'abstractions empilées les unes sur les autres ne veut pas dire que les mathématiques ne reposent pas à la base sur la réalité.

Cette croissance nouvelle, toujours basée en définitive sur la réalité, progresse maintenant principalement grâce à la logique. Mais c'est parce que la réalité reste à la base des théories les plus abstraites qu'elles trouvent néanmoins des applications dans les problèmes de physique et de technologie. C'est précisément ce qui s'est passé avec les nombres complexes. Et la même chose se passe avec les autres théories mathématiques, aussi abstraites soient-elle.

Un exemple caractéristique est offert par la théorie des espaces multidimensionnels de diverses natures. Ils sont apparus au départ en tant que généralisation de la géométrie euclidienne ordinaire à deux ou trois dimensions, combinée avec le développement de l'algèbre et de l'analyse, et stimulée par les problèmes de mécanique et de physique. La combinaison de ces idées a conduit Riemann à la construction d'une théorie générale, qui fut poursuivie encore par d'autres mathématiciens, et trouva un grand nombre d'applications, et, finalement, apporta tout préparés les outils nécessaires à Einstein pour construire sa théorie de la relativité générale, mieux nommée théorie de la gravitation.

Ce n'est pas par hasard que les théories géométriques abstraites trouvèrent de si brillantes applications, pas à cause d'une quelconque « harmonie préexistante entre la nature et l'esprit humain », mais parce qu'elles se sont développées elles-mêmes à partir de la géométrie ordinaire qui est une première abstraction de l'expérience. Dans l'élaboration de ces théories géométriques abstraites, leurs créateurs conservèrent toujours l'objectif d'explorer l'espace réel. Riemann, en particulier, anticipa le lien entre sa théorie et celle de la gravitation.

Ainsi, dans le développement des mathématiques on peut observer une application de la loi d'évolution de la connaissance formulée par V.I. Lénine

> « La pensée, allant du concret à l'abstrait, *ne s'éloigne pas* – si elle est *correcte* – de la vérité, mais s'en rapproche. L'abstraction de la *matière*, des *lois* de la nature, l'abstraction des *grandeurs*, etc. en un mot *toutes* les abstractions scientifiques (correctes, sérieuses, pas absurdes) reflètent la nature plus profondément, ou plutôt plus *complètement*. De la vie contemplative vers la pensée abstraite *et de là vers la pratique*, c'est la façon de connaître la vérité, de connaître la réalité objective. » (V.I. Lénine, *Cahiers philosophiques*, pp. 146-147.)

D'après ce que l'on vient de dire il est clair que la vision idéaliste selon laquelle les théories mathématiques ne seraient que des schémas hypothétiques ayant pour but de décrire les données expérimentales ou d'« organiser le flux des perceptions brutes » sur la base du « principe d'économie des explications » [16] est totalement fausse.

Engels note (voir citation dans la section I.8.1) que présenter les mathématiques comme abstraites du monde réel revient en quelque sorte à les opposer à lui et décrire leurs théories comme des schémas préparés à l'avance. Il est vrai que nous utilisons constamment, par exemple, les nombres pour compter, et qu'on peut les voir comme des structures préparées. C'est encore plus vrai en ce qui concerne les théories apparaissant à des niveaux plus élevés d'abstraction. Une illustration est fournie par la géométrie riemannienne, déjà mentionnée, qui était *toute prête* pour servir à la théorie de la gravitation. Mais Engels explique qu'une telle application des mathématiques au monde réel n'est possible que parce qu'elles procèdent de ce monde, ne font qu'exprimer à l'aide de théories abstraites les formes et relations inhérentes à la réalité, *c'est pourquoi* elles marchent.

16. Appelé aussi le « rasoir d'Ockham », du nom du philosophe scolastique nominaliste Guillaume d'Ockham (1285-1347).

Le fait que de nombreuses théories soient créées *au sein* des mathématiques ne fait pas de différence. Étant en dernier ressort des formes potentielles de la réalité, elles n'ont rien d'hypothétique ou arbitraire ; elles sont des conséquences logiques de la nature elle-même, c'est la raison pour laquelle elles trouvent en définitive des applications concrètes. D'une manière ou d'une autre, les théories mathématiques reflètent la réalité ; simplement parfois le lien est plus direct, d'autres fois il traverse préalablement une série d'abstractions et de concepts intermédiaires, etc.

I.8.5 La période contemporaine du développement des mathématiques est caractérisée non seulement par son haut degré d'abstraction, mais aussi par l'accroissement considérable de l'étendue des sujets qu'elles touchent, qui va bien au-delà de l'étude initiale des relations quantitatives et des formes spatiales.

Les figures dans les espaces multidimensionnels ou de dimensions infinies ne sont bien sûr pas des formes spatiales au sens ordinaire, comme nous l'entendons tous quand nous parlons de l'espace réel qui nous entoure et non d'espaces abstraits. Ces derniers ont toutefois un sens réel et reflètent de manière abstraite certaines formes de la réalité, mais ces formes sont seulement similaires aux formes spatiales ordinaires ; c'est pourquoi, de par leur relation à l'espace réel, on peut les qualifier de « spatialement similaires » aux figures habituelles. En parlant d'espaces multidimensionnels et des figures qu'ils contiennent, nous donnons par là même au concept d'espace un contenu nouveau, si bien qu'il est nécessaire de faire une claire distinction entre le concept abstrait, généralisé d'espace en mathématiques, d'un côté, et le concept d'espace dans son sens originel d'univers dans lequel existe la matière, dans lequel nous vivons, de l'autre.

Un autre exemple du développement foisonnant des mathématiques, au-delà des formes spatiales et relations quantitatives au sens originel de ces mots, est l'émergence à la fin du XIXe siècle d'une nouvelle discipline – la logique mathématique – qui s'est vigoureusement développée. Elle a pour sujet la structure des démonstrations et conclusions qu'on peut atteindre, en d'autres termes, elle étudie quelles assertions peuvent être déduites de prémisses données selon des règles données. Elle explore son sujet selon l'approche commune à toutes les mathématiques, c'est-à-dire en faisant abstraction des contenus spécifiques, par conséquent en remplaçant les énoncés en français par des expressions formelles, et les principes ordinaires de l'inférence logique par des règles de manipulation de ces expressions. Les relations entre prémisses et conclusions, entre axiomes et théorèmes, traitées par la logique mathématique, ne se limitent bien sûr pas aux formes spatiales ni aux relations quantitatives dans le sens ordinaire, disons aux relations entre concepts de volumes.

En guise d'illustration mentionnons aussi la théorie des groupes, qui peut être vue comme l'étude des symétries dans un sens très général. Un changement dans la symétrie d'un cristal cependant, mettons la transition du soufre d'un rhombe vers un prisme, entraîne un changement qualitatif fondamental de l'état de la matière. Ainsi la théorie des groupes est la théorie de ces grandeurs ou qualités des objets qui lors d'une transition physique changent radicalement les objets eux-mêmes.

L'expansion du sujet des mathématiques conduit donc à une expansion substantielle des concepts même de relations quantitatives et de formes spatiales. Quelles sont alors les caractéristiques générales de cette croissance du sujet des mathématiques ?

Si nous voulons répondre à cette question autrement que par une énumération, mais cherchons à décrire les aspects communs à l'ensemble des mathématiques, considérées dans toute leur diversité, nous trouvons la réponse essentiellement chez Engels. Il suffit de prendre en compte non seulement sa référence aux mathématiques, mais aussi la façon dont il aborde le sujet : une séparation complète entre les formes et relations et les contenus concrets. Ce caractère abstrait des mathématiques est aussi ce qui définit leur sujet d'étude.

Le sujet des mathématiques est ces formes et relations existant dans la réalité, qui sont néanmoins suffisamment indépendantes objectivement des contenus concrets pour qu'on puisse les considérer dans l'abstrait et les définir en termes généraux avec une telle clarté et précision – tout en préservant la richesse de leurs liens avec la réalité – que cela puisse servir de base à un développement purement logique de la théorie. Si on peut qualifier ces relations et formes, dans un sens général, de quantitatives, alors nous pouvons dire en résumé que les mathématiques ont pour sujet les relations et les formes quantitatives dans leur état pur.

L'abstraction n'est en aucun cas le privilège des mathématiques. Cependant, les autres sciences se focalisent principalement sur la correspondance entre leurs schémas abstraits, appelés encore modèles, et un ensemble bien défini de phénomènes concrets. Parmi leurs objectifs les plus importants se trouvent l'étude des limites de l'applicabilité, à un ensemble donné de phénomènes, du modèle qu'elles ont construit, et l'étude des modifications imposées au modèle par les phénomènes réels.

Les mathématiques, en revanche, explorant des propriétés générales en totale abstraction avec de quelconques phénomènes concrets n'ont pas de telles contraintes. Elles considèrent les modèles qu'elles élaborent en eux-mêmes dans toute leur généralité abstraite, sans se soucier a priori de leur applicabilité à des phénomènes concrets. On peut dire que les mathématiques sont caractérisées par une forme d'absolu dans leurs abstractions.

C'est justement l'indifférence susmentionnée au contenu concret des modèles étudiés en mathématiques qui caractérise la discipline : leur nature spéculative, la nécessité logique et l'indiscutabilité manifeste de leurs conclusions, ainsi que l'émergence de nouveaux concepts et nouvelles théories en leur sein même. L'indifférence aux contenus concrets est une conséquence nécessaire de la façon dont les mathématiques opèrent. Quand nous sommes capables de traduire un problème pratique en langage mathématique, nous sommes simultanément capables de nous détacher de tous les aspects secondaires et spécifiques du problème ; et grâce à cela, en utilisant des expressions et conclusions générales, nous sommes capables d'obtenir certains résultats. Autrement dit, l'abstraction des mathématiques est ce qui fait leur force mais c'est aussi une nécessité pratique.

I.8.6 Retournant maintenant au jugement d'Engels sur les mathématiques, nous voyons quelle profondeur et quelle richesse de contenu, quelles possibilités de développement se trouvent dans ce jugement. N'étant pas lui-même mathématicien, il donna une analyse aussi profonde des fondations de cette science, non seulement parce que c'était un penseur de génie, mais aussi, encore plus important, parce qu'il maîtrisait le matérialisme dialectique et était guidé par lui dans son travail de clarification de l'essence des mathématiques. Il n'est donc pas surprenant que personne avant Engels n'ait pu donner une solution aussi profonde et juste à cette question. Les plus grands mathématiciens ne pouvaient pas la résoudre avec une telle ampleur de vue.

De même Lénine donna plus tard une analyse du problème de la physique qui surpasse tout ce qui avait été écrit auparavant sur la question.

Cela prouve une fois de plus la signification et la puissance du matérialisme dialectique ; cela prouve que la connaissance de certains éléments n'est pas suffisante pour maîtriser la science ; ce n'est pas suffisant même pour être un travailleur créatif dans cette science. Pour cela vous devez aussi posséder la méthode générale correcte, maîtriser le matérialisme dialectique.

Sans l'aide du matérialisme dialectique, les conclusions de la science soit ressembleront à une accumulation informe de faits, soit seront présentées sous une forme distordue ; au lieu d'une vraie compréhension de la science, nous nous en ferons une idée fausse, métaphysique, idéaliste. Ainsi, par exemple, de nombreux mathématiciens qui ignorent le matérialisme dialectique soit sont désorientés au milieu des grandes questions de leur science, soit les interprètent de façon totalement erronée.

Il est curieux de noter, à cet égard, que les deux géomètres américains fort connus, Oswald Veblen (1880-1960) et John Whitehead (1904-1960), dans leur livre *The Foundations of Differential Geometry* (Cambridge University Press, 1932), quand ils essaient de donner une définition de ce qu'est la géométrie, parviennent à la conclusion qu'une telle définition ne peut être donnée autrement que par « la géométrie est ce que les spécialistes appellent la géométrie ».

À l'époque où Engels écrivait *Anti-Dühring*, en 1876-1877, la géométrie non euclidienne et la géométrie des espaces multidimensionnels commençaient seulement à être connues des mathématiciens, la théorie des groupes prenait seulement forme, la théorie des ensembles était en gestation, et la logique mathématique encore dans l'enfance. Par conséquent il est compréhensible que tous les aspects de la nouvelle phase du développement des mathématiques ne pouvaient pas encore être décrits en détail par Engels ; néanmoins ses jugements nous aident à comprendre et nous guident.

I.9 Schéma de développement des mathématiques

Pour conclure ce chapitre de présentation générale des mathématiques à l'aide d'un aperçu de leur histoire – avant de rentrer dans le vif du sujet –, tentons de dégager brièvement les lois générales de développement des mathématiques.

I.9.1 Les mathématiques ne sont pas la création d'une époque historique donnée ni celle d'un peuple en particulier ; elles sont le produit d'une succession de périodes et du travail de nombreuses générations. Les premiers concepts et énoncés sont nés, comme nous l'avons vu, dans la haute Antiquité. Et, il y a déjà plus de deux mille ans, leur fut donnée une première présentation synthétique harmonieuse. Malgré toutes les transformations par lesquelles sont passées les mathématiques, leurs concepts et résultats sont préservés d'une phase à l'autre, comme par exemple les règles de l'arithmétique ou le théorème de Pythagore.

Les nouvelles théories mathématiques incorporent les résultats précédents, sans jamais les invalider, mais en les raffinant, les complétant et les généralisant.

En même temps, il est clair après le bref survol de l'histoire des mathématiques que nous venons de faire que leur développement ne consiste pas seulement en une accumulation continue et incessante de nouveaux théorèmes, mais connaît aussi de temps en temps des changements qualitatifs essentiels.

C'est pourquoi nous avons proposé une division de l'histoire du développement des mathématiques en quatre grandes périodes, présentant chacune une certaine homogénéité, et dans les transitions entre lesquelles on peut à l'inverse distinguer des bouleversements significatifs dans le sujet ou la structure de la discipline.

Les mathématiques incluent dans leur sphère d'étude tous les nouveaux champs où l'on peut distinguer des relations quantitatives de la réalité. En même temps, les formes spatiales et les relations quantitatives, dans le sens le plus simple et le plus direct des termes, ont été et demeurent le sujet central des mathématiques. Et la compréhension mathématique des nouvelles connexions et relations s'appuie inévitablement sur les systèmes de représentation scientifique quantitative et spatiale déjà établis.

Finalement, l'accumulation de résultats au sein des mathématiques elles-mêmes conduit nécessairement vers des niveaux plus élevés d'abstraction, vers des concepts généralisateurs, et vers un approfondissement de l'analyse des fondations et des concepts initiaux.

De même qu'un chêne au cours de sa croissance puissante renforce ses branches anciennes avec de nouvelles épaisseurs de bois, laisse tomber certaines branches mortes, étend et enfonce plus profondément ses racines, les mathématiques dans leur développement accumulent de nouveaux matériaux dans les domaines existants, s'étendent dans de nouvelles directions, atteignent de nouveaux sommets d'abstraction, et renforcent leurs fondations.

I.9.2 Les mathématiques ont pour sujet les formes et relations réelles de la réalité, mais, comme l'a dit Engels, afin d'étudier ces formes et relations dans leur aspect pur, il est nécessaire de les détacher complètement de leur contenu, de laisser ce dernier de côté car ne jouant pas de rôle. Cependant les formes et les relations n'existent pas en dehors de leur contenu ; les formes et relations mathématiques ne peuvent pas être absolument indifférentes à leur contenu.

Par conséquent, les mathématiques, par leur essence même qui est de s'efforcer de réaliser cette séparation, cherchent à réaliser l'impossible. *C'est la contradiction fondamentale qui est au cœur des mathématiques.* Elle n'est que la version mathématique de la contradiction dialectique plus générale qui touche toute connaissance.

La réflexion dans la pensée de chaque phénomène dans la nature, chaque aspect, chaque moment de la réalité les simplifie et schématise en les extrayant de toutes les autres relations que l'on observe en même temps. Quand les gens, en étudiant les propriétés de l'espace, découvrirent qu'il avait une géométrie euclidienne, ils accomplirent un acte fondateur de cognition, mais aussi une erreur : les réelles propriétés de l'espace ont été perçues de manière simplifiée, schématiquement, en faisant abstraction de la matérialité du monde extérieur. Mais sans cette modélisation, il n'y aurait tout simplement pas eu de géométrie, et c'est précisément grâce à celle-ci (à la suite de développements internes aux mathématiques et de comparaisons entre leurs résultats et les nouvelles données d'autres sciences) que les théories géométriques sont nées et se sont affermies.

La constante attaque et réduction de cette contradiction, rapprochant notre connaissance toujours plus près de la réalité, est l'essence du développement de la connaissance. Cette détermination est bien sûr le contenu positif de la connaissance, l'élément de vérité absolue qu'elle contient. La connaissance suit une ligne ascendante, elle ne fait pas du surplace dans la confusion et l'erreur. Le mouvement de la connaissance consiste en un progrès constant pour dépasser les inexactitudes et les limitations.

La contradiction de base que nous avons mentionnée en entraîne d'autres. Nous l'avons vu dans l'exemple de l'opposition entre le discret et le continu. Dans la nature, il n'y a pas de fossé absolu entre les deux, et leur séparation en mathématiques a conduit inévitablement au besoin de créer de nouveaux concepts qui reflètent plus profondément la réalité et en même temps surmontent les imperfections internes à la théorie mathématique existante.

Exactement de même les contradictions entre le fini et l'infini, l'abstrait et le concret, la forme et le contenu, etc., surgissent en mathématiques comme des manifestations de la contradiction dialectique fondamentale. Mais sa manifestation la plus décisive consiste en ce que, s'éloignant du concret, vivant au milieu de leurs concepts abstraits, les mathématiques sont par là même séparées de l'expérience et de la pratique ; néanmoins, dans la mesure où elles sont une science (c'est-à-dire ont une valeur cognitive), les mathématiques s'inspirent de la réalité, ne sont donc pas pures mais appliquées. Avec un langage hégélien, nous dirions que *les mathématiques « nient » constamment elles-mêmes en tant que pures mathématiques ; sans cela elles ne pourraient pas avoir de signification scientifique, pas se développer, pas surmonter les difficultés qui se présentent inévitablement en leur sein.*

Dans leur aspect formel les théories mathématiques s'opposent au contenu réel comme étant seulement des sortes de schémas servant à des conclusions concrètes. Les mathématiques sont alors une méthode pour formuler les lois quantitatives des sciences naturelles, comme une boîte à outils pour le développement de leurs théories, comme un moyen pour résoudre les problèmes des sciences de la nature et de la technologie. L'importance des mathématiques pures dans la phase contemporaine de leur développement réside principalement dans leur caractère de boîte à outils.

Cependant, de même qu'aucune boîte à outils n'existe et n'est développée dans le vide, mais seulement grâce aux applications qu'ont ses outils, en lien avec les contenus sur lesquels ils permettent d'avoir prise et d'agir, de même les mathématiques ne peuvent exister et se développer sans applications. Ici encore se révèle l'unicité des contraires : la méthode générale est opposée à la tâche particulière, comme un moyen pour résoudre le problème concret. La méthode elle-même naît de la généralisation de techniques concrètes ; elle existe, se développe et trouve sa justification seulement dans la solution de problèmes matériels.

I.9.3 Leur utilisation par la communauté scientifique joue un rôle décisif dans le développement des mathématiques pour trois raisons. Des utilisateurs proviennent de nouveaux problèmes que les mathématiciens doivent résoudre ; ces problèmes stimulent les développements des mathématiques dans diverses directions ; et les usages appliqués offrent aussi des critères pour vérifier les résultats.

C'est extrêmement clair dans le cas de l'émergence de l'analyse. Premièrement, c'était précisément le développement de la mécanique et de la technologie qui poussa au premier plan le problème de l'étude de la dépendance entre plusieurs variables sous une forme générale. Archimède, qui ne passa pas loin du calcul différentiel et intégral, resta cependant dans le cadre des problèmes statiques, tandis qu'après la Renaissance c'est l'étude du mouvement qui engendra les concepts de variable, de fonction, et força pour ainsi dire le développement de l'analyse [17]. Newton n'aurait pas pu développer la mécanique sans développer une nouvelle méthode mathéma-

17. L'absence du temps en tant que variable étudiée dans les problèmes de mathématiques des Grecs – qui, comme on se le rappelle, étaient exclusivement des problèmes de géométrie et *figurant la nature* – rendait moins pressant le besoin d'examiner la dépendance entre une variable et une autre. De surcroît les Grecs avaient encore une perception très concrète des problèmes et des outils pour les aborder, et étaient très éloignés de concevoir une *relation* elle-même comme un objet mathématique et encore moins un objet qu'on pût représenter.

tique appropriée.

Deuxièmement, c'était les nouveaux besoins de la société en matière économique qui incitèrent à la formulation et la solution de tous ces problèmes. Ni dans l'Antiquité ni au Moyen Âge n'existaient les mêmes incitations. Finalement, il est tout à fait remarquable que l'analyse mathématique dès ses débuts trouvât dans les applications la confirmation de ses résultats. Cela explique pourquoi elle put se développer sans les définitions rigoureuses de ses concepts de base (variable, fonction, limite) qui ne furent apportées que plus tard, quand elles étaient devenues indispensables. La véracité de l'analyse fut établie par ses applications en mécanique, physique et technologie.

Ce qui vient d'être dit s'applique à toutes les périodes des mathématiques. Depuis le XVII^e siècle, la mécanique, la physique théorique et les problèmes liés aux nouvelles techniques ont eu les effets les plus directs sur le développement de l'analyse. La mécanique des milieux continus, puis la théorie classique des champs (conduction de la chaleur, électricité, magnétisme, gravitation) ont stimulé et guidé le développement de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles. Le développement de la théorie moléculaire, et plus généralement la physique statistique, depuis la fin du XIX^e siècle, ont fortement motivé le développement de la théorie des probabilités, en particulier des processus aléatoires. La théorie de la relativité a joué un rôle décisif dans le développement de la géométrie riemannienne avec ses méthodes analytiques et ses généralisations.

À l'époque actuelle le développement de nouvelles théories mathématiques, comme l'analyse fonctionnelle, etc., est stimulé par les problèmes en mécanique quantique et en électrodynamique, les problèmes en informatique, les problèmes statistiques en physique et en technologie, etc., etc.

La physique et la technologie non seulement posent de nouveaux défis aux mathématiques, poussent vers de nouveaux sujets de recherche, mais aussi réveillent le développement de toutes les branches des mathématiques dont elles ont besoin, qui s'étaient développées initialement dans une grande mesure en interne, comme ce fut le cas de la géométrie riemannienne. En bref, pour le développement intensif de la science il est nécessaire non seulement qu'elle progresse vers la solution de nouveaux problèmes, mais aussi que le besoin pour leur solution résulte du développement de la société.

Récemment de nombreuses théories sont apparues en mathématiques. Mais se sont développées et se sont installées fermement en science seulement celles qui ont trouvé des applications en science et en technologie ou ont joué un rôle important en généralisant des théories qui avaient de telles applications. En même temps, d'autres théories ne progressent pas, comme par exemple certains raffinements de la géométrie (les géométries où le théorème de Desargues ne s'applique pas, ou les théories non archimédiennes), car elles n'ont pas trouvé d'applications significatives.

La vérité des résultats mathématiques trouve ses fondations ni dans les définitions et les axiomes, ni dans la rigueur formelle des démonstrations, mais dans les applications à la réalité, c'est-à-dire en dernier ressort dans la pratique. En général, il faut comprendre le développement des mathématiques avant tout comme le résultat de l'interaction entre la logique et leur sujet, reflétée par la logique interne des mathématiques elles-mêmes, et par l'influence de la production industrielle et les liens avec les sciences de la nature. Cette distinction suit les chemins complexes de la lutte entre opposés, incluant des changements significatifs dans le contenu de base et la forme des mathématiques. En ce qui concerne leur contenu, le développement des mathématiques est déterminé par leur sujet. Mais il est en définitive stimulé principalement par les besoins de la production industrielle. Tel est le schéma basique de développement des mathématiques.

Bien sûr, nous ne devons pas oublier qu'il s'agit là d'un schéma de base et que le lien entre les mathématiques et la production, généralement parlant, se révèle complexe. À la suite de ce qu'on vient de dire, il est clair qu'il serait toutefois naïf d'essayer de justifier l'apparition de chaque théorie mathématique donnée directement par un « ordre de la production ». De plus, les mathématiques, comme n'importe quelle science, sont relativement indépendantes, ont leur logique propre, reflétée, comme nous l'avons souligné, par la logique objective, c'est-à-dire l'ordre des choses.

I.9.4 Les mathématiques ont toujours été influencées non seulement par les besoins de l'économie, mais aussi par les conditions générales de la vie sociale. Les brillants progrès des mathématiques dans la Grèce antique, les succès de l'algèbre en Italie à la Renaissance, le développement de l'analyse après la Première Révolution anglaise au XVIIe siècle, les succès des mathématiques françaises parallèlement à la Révolution, tout cela démontre de manière convaincante le lien étroit entre les progrès des mathématiques et le progrès général de la société sur les plans technique, culturel et politique.

Ce phénomène s'observe clairement aussi dans le développement des mathématiques en Russie. L'émergence d'une école russe indépendante, remontant à Lobatchevski, Ostrogradski et Tchebychev, ne peut pas être séparée des progrès de la société russe dans son ensemble au XIXe siècle. L'époque de ces mathématiciens, c'est aussi l'époque de Pouchkine, Glinka, des Décabristes, et l'essor des mathématiques participe de ce progrès général[18].

Encore plus frappante est l'influence des progrès sociaux qui eurent lieu dans la période qui suivit la Grande Révolution d'Octobre 1917. C'est durant cette période qu'apparurent, avec une vitesse étonnante, des théories très importantes dans de nombreuses directions : théorie des ensembles, topologie, théorie des nombres, probabilités, équations différentielles, analyse fonctionnelle, algèbre, géométrie.

Finalement, les mathématiques se sont toujours développées en relation avec les idées politiques et sociales dominantes de chaque époque. Comme pour n'importe quelle autre

18. Lobatchevski (1792-1856), Ostrogradski (1801-1861), Tchebychev (1821-1894), Pouchkine (1799-1837), Glinka (1804-1857), Insurrection décabriste (1825).

science, le contenu objectif des mathématiques est perçu et interprété par les mathématiciens et les philosophes dans un cadre idéologique. En bref, le contenu objectif d'une science peut toujours être vu en parallèle avec une idéologie ; l'unité et la lutte entre ces opposés dialectiques, que sont le contenu objectif et l'idéologie, en mathématiques comme dans n'importe quelle science, jouent un rôle prépondérant dans leur développement.

La lutte entre d'un côté le matérialisme, qui considère objectivement le contenu de la science, et de l'autre l'idéalisme, qui contredit ce contenu et pervertit sa compréhension, traverse toute l'histoire des mathématiques [19]. On l'observe déjà dans l'Antiquité grecque où l'opposition entre l'idéalisme de Pythagore, Socrate et Platon et le matérialisme de Thalès, Démocrite et d'autres philosophes, engendra les mathématiques grecques. Avec le développement de l'esclavage, l'élite de la société grecque fut de plus en plus éloignée de la production économique, considérée alors comme le lot du hoi polloi ; cela conduisit à une séparation entre la science « pure » et la pratique.

Seule la géométrie pure, théorique était digne de l'attention d'un vrai philosophe. À cet égard on note que Platon, de manière caractéristique, considérait l'étude de certaines courbes mécaniques et même des sections coniques comme étant en dehors du champ de la géométrie, puisqu'« elle ne nous conduit pas vers le monde des idées pures et éternelles » et « nécessite l'emploi des outils vulgaires de l'artisan ». Un bon exemple de la lutte entre le matérialisme et l'idéalisme en mathématique est offert par les travaux de Lobatchevski, qui proposa et défendit une vision matérialiste des mathématiques par opposition à la vision kantienne.

L'école russe de mathématiques fait dans l'ensemble partie de la tradition matérialiste. Ainsi Tchebychev a clairement souligné l'importance décisive de la pratique et Liapounov a décrit le style de l'école russe de mathématiques dans le

19. La doctrine sur la réalité défendue ici par les auteurs, en philosophie est appelée par ses détracteurs « le Réalisme naïf ».

remarquable extrait suivant :

> « Une exposition détaillée des questions qui sont très importantes du point de vue des applications et en même temps présentent des difficultés théoriques particulières, demandant l'invention de nouvelles méthodes et une prise de hauteur vers les principes de la science, puis une généralisation de ce qui a été trouvé et la création de cette manière d'une théorie plus ou moins générale. »

Les généralisations et les abstractions ne sont pas développées en soi, mais en lien avec des questions concrètes, les théorèmes et théories ne sont pas des résultats en soi, mais dans une relation générale avec la science, qui en dernier ressort conduit à la pratique – voilà ce qui en réalité est important et offre des perspectives. D'une manière générale la compréhension des liens nécessaires des différents domaines des mathématiques entre eux et avec les sciences de la nature et la pratique est extrêmement importante non seulement pour une vision des mathématiques elles-mêmes, mais aussi pour orienter les savants dans le choix des sujets de recherche.

C'était aussi les aspirations des grands savants Gauss et Riemann.

Cependant, avec le développement du capitalisme en Europe, la vision matérialiste qui avait accompagné l'essor de la bourgeoisie depuis le XVIe siècle, à travers le XVIIe siècle et le siècle des Lumières, jusqu'au début du XIXe siècle, commença à céder la place à la vision idéaliste.

Par exemple, quand il créa la théorie des ensembles infinis Cantor (1846-1918) fit explicitement référence à Dieu, disant en substance que les ensembles infinis avaient une existence absolue dans l'esprit divin.

Le plus grand mathématicien français à la fin du XIXe et au début du XXe siècle, Henri Poincaré, proposa le concept idéaliste de « conventionnalisme » selon lequel les mathématiques ne sont qu'un ensemble de conventions adoptées par commodité pour décrire la diversité des expériences immédiates provenant des sens [20].

Ainsi selon Poincaré, les axiomes de la géométrie euclidienne ne sont rien de plus que des conventions, leur importance provenant de leur commodité et simplicité, pas du fait qu'ils correspondraient à la réalité. Cela conduisit Poincaré à déclarer par exemple qu'en physique il était préférable d'abandonner la loi de propagation rectiligne de la lumière plutôt que la géométrie euclidienne. Ce point de vue fut réfuté par le développement de la théorie de la relativité qui, contrairement à la « simplicité » et la « commodité » de la géométrie euclidienne, mais en parfait accord avec les idées matérialistes de Lobatchevski et Riemann, conduisit à la conclusion que la vraie géométrie de l'espace est différente de la géométrie euclidienne [21].

À cause des difficultés qui surgirent en théorie des ensembles, et en lien avec le besoin d'analyser les concepts de base des mathématiques, au début du XX^e^ siècle apparurent au sein de la communauté mathématique différents courants de pensée. L'unité de compréhension des mathématiques était rompue ; certains mathématiciens commencèrent à considérer différemment non seulement les fondations générales de la science telle qu'elle avait existé jusqu'alors, mais portèrent sur la signification même de résultats concrets individuels et leurs démonstrations un regard nouveau. Les conclusions des démonstrations, qui semblaient convaincantes et pleines de sens aux uns, étaient déclarées par d'autres dénuées de sens et de valeur. Apparurent ainsi les courants du « logicisme », de l'« intuitionnisme », du « formalisme », etc.

Les logiciens affirment que les toutes les mathématiques

20. Les promoteurs principaux du « conventionnalisme », même s'ils n'utilisaient pas eux-mêmes ce terme forgé plus tard, sont Henri Poincaré (1854-1912), Pierre Duhem (1861-1916) et Édouard Le Roy (1870-1854).

21. Henri Poincaré contribua à faire connaître la géométrie non euclidienne en France. Il resta effectivement attaché à la géométrie euclidienne pour repérer l'espace, comme il resta attaché au temps universel. Mais il considérait que les deux géométries, euclidiennes et non euclidiennes, étaient aussi « vraies » l'une que l'autre. Et du reste, il construisit des modèles euclidiens de géométrie non euclidienne.

peuvent être déduites des concepts de la logique. Les intuitionnistes voient la source des mathématiques dans l'intuition et n'accordent de sens qu'à ce qui peut être perçu intuitivement. C'est pourquoi ils dénient en particulier toute importance à la théorie de Cantor des ensembles infinis.

Allant plus loin, les intuitionnistes nient même la signification d'affirmations aussi simples que celle du théorème disant qu'une équation polynomiale de degré n possède n racines, mais dont la démonstration n'établit que leur existence. Pour eux cette affirmation est vide de sens tant qu'on n'a pas indiqué une méthode constructive pour calculer ces n racines. Ainsi le refus radical d'accorder un sens objectif aux mathématiques a conduit les intuitionnistes (proches des « constructivistes ») à dénoncer comme « dénué de sens » une fraction importante des résultats de la science mathématique. Les plus extrémistes d'entre eux sont allés jusqu'à dire qu'il y avait autant de mathématiques que de mathématiciens.

Le plus grand mathématicien du début du XX^e^ siècle, David Hilbert (1862-1943), tenta une voie nouvelle pour sauver les mathématiques de ces attaques. Son idée centrale était que toutes les théories mathématiques se ramenaient à de pures opérations formelles sur des symboles à l'aide de règles prédéfinies. Il espérait ainsi, par une approche complètement formelle, déblayer toutes les difficultés, car le sujet des mathématiques deviendrait seulement les symboles et les règles opératoires sans plus aucun lien avec une signification quelconque dans la réalité. C'est l'arrivée du formalisme en mathématiques. L'intuitionniste néerlandais L.E.J. Brouwer (1881-1966), de l'école pour ainsi dire opposée, put ainsi déclarer : pour le formaliste la vérité des mathématiques est sur la feuille de papier, tandis que pour l'intuitionniste elle est dans la tête du mathématicien.

Il n'est pas difficile cependant de voir que les deux approches sont aussi fausses l'une que l'autre. En effet, ce qui est écrit sur la feuille de papier, autant que ce qui est dans la tête du mathématicien, reflètent la réalité ; et la vérité des mathématiques réside dans leur correspondance avec la réalité objective. En détachant les mathématiques de la réalité matérielle, tous ces courants deviennent des chapelles de l'idéalisme.

Les idées de Hilbert contenaient les ferments de leur propre effondrement. Le mathématicien autrichien Kurt Gödel (1906-1978) démontra que même l'arithmétique ne pouvait pas être complètement formalisée comme l'avait espéré Hilbert [22]. Le résultat de Gödel mettait en lumière la dialectique interne des mathématiques, qui interdit d'explorer de manière complète et définitive leurs différents domaines avec une approche formelle. Même l'infini le plus simple, celui des nombres entiers, s'avéra n'être qu'une construction finie, mais inépuisable, de symboles et de règles pour travailler sur eux. Ainsi était démontré mathématiquement ce qu'Engels exprimait en termes généraux quand il écrivait :

> « L'infini *est* une contradiction... La destruction de cette contradiction serait la fin de l'infini. » (F. Engels, *Anti-Dühring*, p. 49).

Hilbert espérait inclure le concept mathématique d'infini dans le cadre de schémas finis et par là éliminer toutes les contradictions et difficultés. Il s'avéra que c'était impossible.

Cependant le capitalisme ainsi que le conventionnalisme, l'intuitionnisme, le formalisme et les autres courants similaires ne sont pas seulement préservés, mais alimentés par de nouvelles versions de la vision idéaliste des mathématiques. Les théories liées à l'analyse logique des fondations des mathématiques sont essentiellement utilisées pour produire de nouvelles variantes de l'idéalisme subjectif. L'idéalisme subjectif utilise maintenant les mathématiques, en particulier la logique mathématique, pas moins qu'il n'utilisait la physique ; c'est pourquoi les questions liées à la compréhension des fondations

22. Dans un article en allemand de 1931 intitulé « Sur les propositions formellement indécidables des *Principia Mathematica* [l'ouvrage de B. Russell et A. N. Whitehead, publié entre 1910 et 1913] et des systèmes apparentés », en formalisant et développant le paradoxe du menteur – quelqu'un qui dit « je mens » ment-il ? –, Gödel démontra que des énoncés mathématiques pouvaient à la fois être vrais et indémontrables.

des mathématiques restent d'actualité. Ainsi les difficultés de développement des mathématiques sous le régime capitaliste créèrent une crise idéologique dans cette science, similaire à celle en physique, dont l'essence fut clarifiée par Lénine dans son ouvrage génial *Matérialisme et empiriocriticisme*.

Cette crise ne veut pas dire que toutes les mathématiques des pays capitalistes soient irrémédiablement handicapées. De nombreux savants, qui ont clairement adopté une position idéaliste, font d'importantes, parfois remarquables, contributions dans la résolution de problèmes mathématiques et la construction de nouvelles théories. Il suffit de mentionner le brillant développement de la logique mathématique.

Le défaut fondamental de la vision des mathématiques largement répandue dans les pays capitalistes consiste en leur idéalisme et leur métaphysique : c'est-à-dire la séparation entre la réalité et les mathématiques, et le peu d'importance attachée à la signification de leur développement historique. La logique, l'intuitionnisme, le formalisme, et les autres directions similaires portent sur les mathématiques un regard unidimensionnel et biaisé – tout ramener à la logique, ou donner le rôle prééminent à l'intuition, ou tout faire reposer sur la rigueur formelle, etc. –, exagèrent jusqu'à la déraison, donnent une signification absolue aux théories, les détachent de la réalité. Cette approche à la fois profonde et sectaire des mathématiques fait perdre de vue ce qu'elles sont dans leur ensemble. C'est précisément à cause de leur vision unidimensionnelle qu'aucun de ces courants, malgré toute la subtilité et l'importance de résultats individuels, ne peut conduire à une compréhension correcte de la discipline.

En opposition avec les divers courants et nuances d'idéalisme et de métaphysique, le matérialisme dialectique considère les mathématiques comme n'importe quelle autre science, c'est-à-dire les considère pour ce qu'elles sont, dans toute la richesse et la complexité des liens entre leurs différentes ramifications et avec le monde réel. Et justement parce que le matérialisme dialectique cherche à comprendre toute la richesse et la complexité des liens entre la science et la réalité, toute la complexité du développement de la science, partant d'une simple généralisation de l'expérience vers des abstractions de plus en plus élevées, et retournant de celles-ci vers la pratique, précisément parce qu'il apporte constamment la puissance de son approche à la science, en accord avec le contenu objectif de celle-ci, avec ses nouvelles découvertes, pour cette raison et finalement pour elle seule, le matérialisme dialectique s'avère être la seule philosophie vraiment scientifique conduisant à la compréhension de la science en général et en particulier des mathématiques.

Suggestions de lecture

BACHELARD Gaston, *La formation de l'esprit scientifique*, Vrin, 2000.

BELL Eric Temple, *Les grands mathématiciens*, Payot, 1950.

COURANT Richard et ROBBINS Herbert, *Qu'est-ce que les mathématiques ?*, Cassini, 2015.

EINSTEIN Albert et INFELD Léopold, *L'évolution des idées en physique*, Flammarion Champs, 2015.

POINCARÉ Henri, *La science et l'hypothèse*, Flammarion Champs, 2017.

POLYA George, *Comment poser et résoudre un problème*, Dunod, 1965.

RUSSELL Bertrand, *Histoire de la philosophie occidentale*, Les Belles Lettres, 2011.

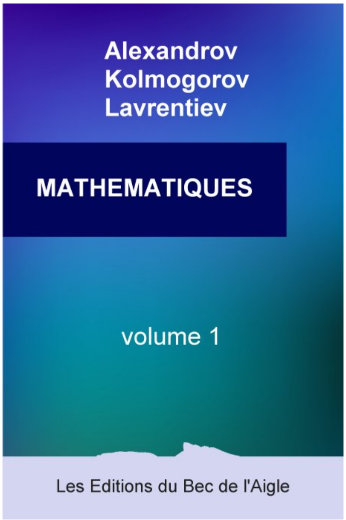
TABLE DES MATIÈRES

du volume 1

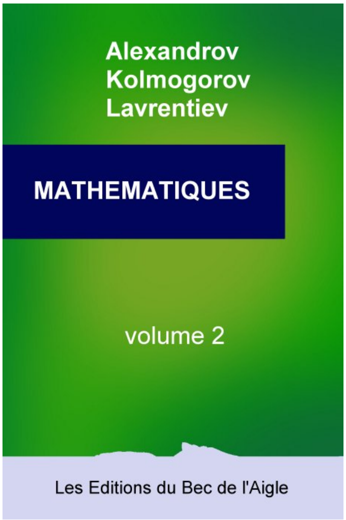
TABLE DES MATIÈRES GÉNÉRALE

Catalogue des

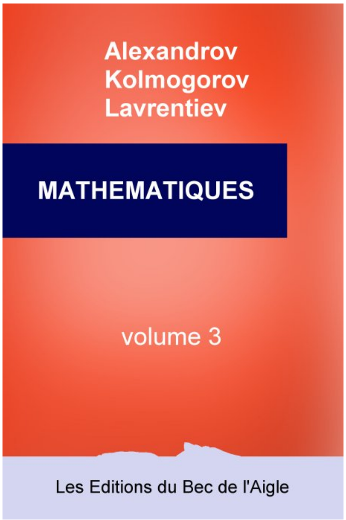
ÉDITIONS DU BEC DE L'AIGLE



www.amazon.fr/dp/2957239124
Introduction aux mathématiques (niveau baccalauréat)

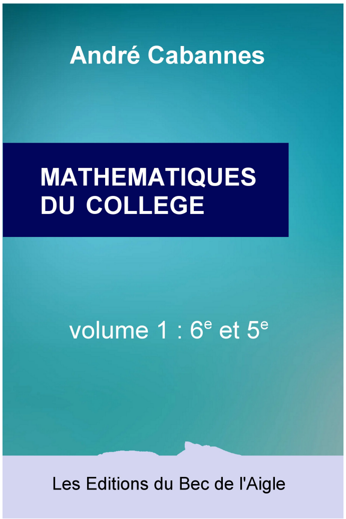


www.amazon.fr/dp/2957239116
Les mathématiques pour l'utilisateur (niveau première année d'université)



www.amazon.fr/dp/2957239132
Les mathématiques pour l'étudiant spécialisé et le chercheur (niveau licence)

www.amazon.fr/dp/2957239140
Cours de comptabilité (niveau baccalauréat)

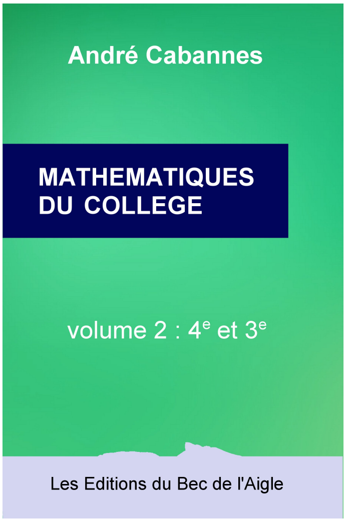


www.amazon.fr/dp/2957239159

Cours de mathématiques du collège.

Volume 1 : 6e et 5e.

à l'intention des collégiens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2957239167

Cours de mathématiques du collège.

Volume 2 : 4e et 3e.

à l'intention des collégiens et de leurs parents