Chapitre XV

THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

par Sergueï B. Stechkin

Contenu :

XV.1 Introduction

Au tournant du XIXᵉ siècle, le calcul différentiel et intégral était essentiellement achevé. Jusqu'à cette époque (en fait durant tout le XVIIIᵉ siècle), les savants avaient été occupés à développer ses différentes branches, découvrant de plus en plus de nouveaux faits, ouvrant de nouveaux champs d'application du calcul différentiel et intégral, répondant à de nombreuses questions en mécanique, astronomie, ingénierie. Maintenant on pouvait commencer à avoir une vue d'ensemble sur les résultats obtenus, à les systématiser, et en même temps à approfondir le sens des concepts de base de l'analyse. Il fallait en effet se rendre à l'évidence que l'édifice, malgré ses succès éblouissants, reposait sur des fondations fragiles.

Au XVIII^{e} siècle, les plus grands mathématiciens ne s'accordaient pas sur ce qu'était une fonction. Cela nourrit de longues controverses pour savoir si telle solution à un problème était correcte ou pas, ou bien si tel résultat était juste ou faux. On prit progressivement conscience que d'autres concepts de base demandaient aussi une clarification. Le manque de compréhension claire de ce qu'était une fonction continue et de ses propriétés avait conduit à de nombreuses assertions erronées. C'était, par exemple, une idée répandue qu'une fonction continue était toujours différentiable. Les mathématiques commençaient à opérer sur des fonctions si compliquées qu'il devenait impossible de s'appuyer sur l'évidence ou de deviner le vrai. Il devenait urgent de mettre de l'ordre dans les concepts de base de l'analyse.

Lagrange (1736-1813) fit la première tentative sérieuse dans cette direction, suivi par Cauchy (1789-1857) dans la même voie. Cauchy apporta des raffinements et introduisit l'usage généralisé des définitions de limite, de continuité et d'intégrale qui sont encore celles employées de nos jours. Vers la même époque, le mathématicien tchèque Bolzano (1781-1848) mena une étude rigoureuse des propriétés de base des fonctions continues.

Regardons ces propriétés des fonctions continues plus en détail. Soit une fonction $f(x)$ donnée, continue sur un certain segment $[a,\ b]$, c'est-à-dire continue en toutes les valeurs x satisfaisant $a \le x \le b$. Dans les premiers temps de l'analyse, on considérait comme évident que si $f(a)$ et $f(b)$ avaient des signes opposés, alors forcément en un point intermédiaire, quelque part entre a et b, la fonction $f(x)$ prenait la valeur zéro. C'est vrai, mais aujourd'hui ce fait reçoit une justification rigoureuse. Exactement de la même façon, on démontre rigoureusement qu'une fonction continue sur un segment $[a,\ b]$ atteint une valeur minimum et une valeur maximum sur ce segment [1].

1. Il est important dans cet énoncé que le segment inclue ses bornes – sinon il suffit de regarder la fonction $\tan\theta$ pour $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. (Sauf mention du contraire, les notes de bas de page sont du traducteur.)

L'étude de ces propriétés des fonctions continues nous a forcés à aller plus profondément dans celle de la nature des nombres réels. Cela a marqué le début de la théorie des nombres réels, et les propriétés de base de la « droite des nombres réels » ont été clairement formulées.

La poursuite du développement de l'analyse mathématique a rendu de plus en plus fréquente la nécessité de considérer des fonctions « se comportant mal », pour commencer les fonctions discontinues. Par exemple, une suite de fonctions continues sur un segment fermé peut avoir pour limite une fonction discontinue (cf. exemple vol. 1, chap. II, p. 293). En outre, on ne peut pas savoir a priori si la fonction limite sera continue ou pas, ni, quand on modélise un processus, s'il montrera un changement abrupt. Les mathématiciens furent donc confrontés au nouveau problème consistant en la généralisation des outils de l'analyse aux fonctions discontinues.

Riemann (1826-1866) étudia à quelle classe de fonctions discontinues on pouvait étendre le concept d'intégrale. Toutes ces recherches sur les fondements de l'analyse eurent pour résultat, parmi d'autres choses, l'apparition d'une nouvelle branche des mathématiques : la théorie des fonctions d'une variable réelle.

Si l'analyse mathématique classique opère principalement sur de « bonnes » fonctions (par exemple des fonctions continues et différentiables), la théorie des fonctions d'une variable réelle, quant à elle, étudie des classes bien plus générales de fonctions. Là où en analyse mathématique on a défini une opération (par exemple, l'intégration) pour les fonctions continues, la théorie des fonctions d'une variable réelle s'occupe de savoir à quelles classes plus générales de fonctions on peut l'appliquer, et comment éventuellement l'adapter pour cette généralisation. En particulier, seule la théorie des fonctions d'une variable réelle a été en mesure d'apporter une solution satisfaisante à la question de ce qu'est la longueur d'une courbe, et pour quelles courbes cette notion a un sens.

Fondamentalement, ce sur quoi repose la théorie des fonctions d'une variable réelle est la *théorie des ensembles.*

C'est pourquoi nous allons commencer la présentation de notre sujet par quelques éléments de théorie des ensembles. Nous poursuivrons avec les ensembles de points. Et nous conclurons le chapitre par la présentation de l'un des concepts centraux de la théorie des fonctions d'une variable réelle : l'intégrale de Lebesgue [2].

XV.2 Ensembles

Les gens ont constamment affaire à des collections de choses. Comme déjà expliqué chapitre I (vol. 1), cela a conduit à l'émergence du concept de *nombre*, et aussi à celui d'*ensemble*, qui est un des concepts mathématiques les plus simples qui soient, et dont on ne peut pas donner de définition précise à l'aide de concepts encore plus fondamentaux. La phrase suivante a pour but de clarifier ce qu'est un ensemble, mais n'a pas la prétention d'être une définition : un ensemble est une collection, un agrégat, un amas de choses ou éléments, réunis selon un certain critère ou une certaine règle.

Le concept d'ensemble est le résultat d'un processus d'abstraction. Quand on considère l'ensemble formé par des objets, on fait abstraction (c'est-à-dire on détourne notre attention) de toutes les relations entre les divers objets qui forment l'ensemble ; mais chaque élément conserve ses caractéristiques particulières, à commencer par celle d'être individualisable, ainsi que celles qui nous permettent de dire qu'il fait partie ou pas de l'ensemble. Ainsi un ensemble de cinq pièces de monnaie et un ensemble de cinq pommes sont deux ensembles différents. Mais un ensemble de cinq pièces disposées en cercle et l'ensemble des mêmes cinq pièces empilées les unes sur les autres sont un seul et même ensemble.

2. Nommée en l'honneur du mathématicien français Henri Lebesgue (1875-1941) qui l'exposa dans sa thèse de doctorat *Intégrale, longueur, aire*, effectuée sous la direction d'Émile Borel (1871-1956) et soutenue en 1902. L'intégrale de Lebesgue généralise l'intégrale de Riemann, qui elle-même raffinait l'intégrale des fonctions continues que les mathématiciens avaient construite dès la deuxième moitié du XVIIe siècle, et que Cauchy avait établie sur des bases solides, voir vol. 1, chap. II sur l'analyse.

Voici quelques exemples d'ensembles. On peut parler de l'ensemble des grains de sable formant un tas de sable, ou de la collection des planètes de notre système solaire, ou du groupe de tous les habitants d'un logement, ou de la multitude des pages d'un livre, ou des livres composant une bibliothèque. En mathématiques, on rencontre aussi constamment toutes sortes d'ensembles, par exemple, l'ensemble de toutes les racines d'une équation donnée, l'ensemble de tous les nombres entiers naturels, l'ensemble de tous les points sur une ligne droite, etc.

La discipline mathématique qui étudie les propriétés générales des ensembles, c'est-à-dire ces propriétés des ensembles qui sont sans rapport avec la nature des objets qui les composent, s'appelle la *théorie des ensembles*. Elle est apparue et a crû rapidement à la fin du XIX^e^ siècle et au début du XX^e^. Le fondateur de la théorie scientifique des ensembles est le mathématicien allemand Georg Cantor (1845-1918).

Les travaux de Cantor sur la théorie des ensembles sont nés de considérations de sa part sur la convergence des séries trigonométriques. C'est une circonstance courante : des considérations sur des problèmes mathématiques particuliers conduisent souvent à des théories très générales et abstraites. L'importance des constructions abstraites peut alors venir non seulement du fait qu'elles éclairent le problème d'origine, mais aussi qu'elles ont des applications dans de nombreuses autres questions. C'est le cas de la théorie des ensembles. Les idées et concepts de cette théorie ont pénétré littéralement toutes les branches des mathématiques et ont eu une influence considérable sur elles. Il est donc impossible de bien comprendre les mathématiques modernes sans se familiariser avec quelques aspects de la théorie des ensembles [3]. La théorie des ensembles est particulièrement importante pour la théorie des fonctions d'une variable réelle.

3. L'auteur parle d'enseigner des éléments de théorie des ensembles *au niveau licence*, pas aux collégiens et lycéens comme cela a été pratiqué en France pendant des années au détriment de leurs connaissances pratiques en géométrie, en algèbre et en calcul.

Un ensemble est considéré comme donné, si pour n'importe quel objet on peut dire si celui-ci fait partie de l'ensemble ou pas. Autrement dit, l'ensemble est complètement déterminé par les objets qui lui appartiennent. Si l'ensemble M est composé des objets a, b, c, ..., et seulement de ces objets-là, alors on écrit

$$M = \{a,\ b,\ c,\ ...\}$$

Les objets qui appartiennent à un ensemble, et en quelque sorte le composent, sont habituellement appelés ses *éléments*. Le fait qu'un objet m appartienne à l'ensemble M est écrit symboliquement comme ceci

$$m \in M$$

Cette formule se lit : « m appartient à M » ou « m est un élément de M ». Si l'objet n n'appartient pas à l'ensemble M, on écrit : $n \overline{\in} M$ ou $n \notin M$. Un objet ne peut être qu'un seul élément dans un ensemble, ou, dit autrement, les éléments d'un ensemble sont tous différents les uns des autres.

Les éléments d'un ensemble M peuvent eux-mêmes être des ensembles, cependant pour éviter des contradictions, on impose qu'un ensemble M ne puisse jamais être un de ses propres éléments : $M \notin M$ [4].

Un ensemble peut ne contenir aucun élément. C'est un ensemble un peu particulier qu'on appelle l'*ensemble vide*. Par exemple, l'ensemble de toutes les racines réelles de l'équation

$$x^2 + 1 = 0$$

est l'ensemble vide. Dans la suite, l'ensemble vide sera noté avec le symbole $\varnothing$.

4. Nous évitons ainsi des paradoxes comme celui de Russell (1872-1970) qui pose la question suivante : en quoi consiste l'ensemble de tous les ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes ? Appartient-il à lui-même ou pas ? La *logique mathématique* a plus à dire sur le sujet, mais cela sort du cadre de l'ouvrage.

Considérons deux ensembles M et N. Si chaque élément x de M est aussi un élément de N, alors on dit que M est inclus dans N, ou que M est une partie de N, ou que N contient M. On le note

$$M \subseteq N \quad \text{ou} \quad N \supseteq M$$

Par exemple, l'ensemble $M = \{1,\ 2\}$ est une partie de l'ensemble $N = \{1,\ 2,\ 3\}$.

Il est clair qu'on a toujours $M \subseteq M$. Et il est commode de considérer que l'ensemble vide fait partie de tous les ensembles.

Deux ensembles sont *égaux* s'ils consistent en les mêmes éléments. Par exemple, l'ensemble des racines de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ et l'ensemble $M = \{1,\ 2\}$ sont égaux.

Définissons les règles d'*opération* sur les ensembles.

Union ou somme. Considérons les ensembles $M,\ N,\ P,\ \ldots$ On appelle union ou somme de ces ensembles l'ensemble X tel que n'importe quel élément de X appartient à au moins un des « termes » $M,\ N,\ P,\ \ldots$ On écrit

$$X = M + N + P + \ldots \quad \text{ou} \quad X = M \cup N \cup P \cup \ldots$$

Dans la suite, nous utiliserons le signe $+$.

En outre, si un élément x appartient à plusieurs termes, alors il apparaît dans leur union, mais seulement une fois. Il est clair qu'on a

$$M + M = M$$

et si $M \subseteq N$, alors

$$M + N = N$$

Intersection. L'intersection ou partie commune des ensembles $M,\ N,\ P,\ \ldots$ est l'ensemble Y tel que n'importe quel élément de Y appartient à tous les termes $M,\ N,\ P,\ \ldots$ On le note

$$Y = M \cdot N \cdot P \cdot \ldots \quad \text{ou} \quad X = M \cap N \cap P \cap \ldots$$

Dans la suite, nous utiliserons le signe $\cdot$ comme dans $M \cdot N$, ou même rien du tout comme dans MN.

Il est clair que $M \cdot M = M$. Et si $M \subseteq N$, alors $M \cdot N = M$.

Si l'intersection de M et N est l'ensemble vide, ce que l'on note comme on a vu $M \cdot N = \varnothing$, alors on dit que ces deux ensembles n'ont pas d'intersection ou *ne se coupent pas*.

Toujours en parallèle avec les notations d'algèbre ordinaire sur des variables numériques, pour dénoter les sommes et les intersections de plusieurs ensembles on utilise aussi les signes $\sum$ et $\prod$. Ainsi

$$E = \sum E_i$$

dénote l'union de tous les E_i, et

$$F = \prod E_i$$

leur intersection.

Le lecteur et la lectrice sont encouragés à démontrer que l'union et l'intersection d'ensembles satisfont la loi de distributivité habituelle

$$M(N + P) = MN + MP$$

ainsi que la loi qui n'a pas de pendant avec les nombres

$$M + NP = (M + N)(M + P)$$

Différence. On définit la différence entre M et N comme l'ensemble Z formé des éléments qui appartiennent à M mais n'appartiennent pas à N. On le note

$$Z = M - N$$

Si $N \subseteq M$, alors l'ensemble $Z = M - N$ s'appelle le *complément* de N au sein de M ou par rapport à M.

Il n'est pas difficile de montrer qu'on a toujours

$$M(N - P) = MN - MP$$

et

$$(M - N) + MN = M$$

On voit ainsi que les opérations sur les ensembles ne suivent pas les mêmes règles que les opérations arithmétiques ordinaires sur les nombres, ou, ce qui est la même chose, les opérations algébriques usuelles sur les variables numériques.

Ensembles finis et ensembles infinis. Un ensemble qui a un nombre fini d'éléments est appelé un ensemble fini. Et de manière analogue, un ensemble qui a un nombre infini d'éléments est appelé un ensemble infini. Par exemple, l'ensemble de tous les entiers naturels est infini.

Considérons deux ensembles M et N et posons-nous la question de savoir s'ils ont le même nombre d'éléments.

Si l'ensemble M est fini, alors la collection de ses éléments correspond à un nombre entier naturel qu'on détermine par comptage et qu'on appelle le nombre de ses éléments. Dans ce cas, pour comparer les éléments des deux ensembles M et N, il suffit de compter le nombre d'éléments de M, le nombre d'éléments de N, et de comparer les deux entiers naturels obtenus. Il va aussi de soi que si l'un des ensembles est fini et l'autre infini, alors celui infini a plus d'éléments que celui fini.

Cependant, si les ensembles M et N sont tous deux infinis, la solution qui consiste à compter leurs éléments et comparer les nombres entiers naturels obtenus ne convient plus. Se pose immédiatement la question suivante :

deux ensembles infinis ont-ils nécessairement le même nombre d'éléments, ou bien existe-t-il des ensembles infinis tels que l'un ait plus d'éléments que l'autre ?

Si c'est la seconde réponse qui est la bonne, comment fait-on pour comparer les nombres d'éléments de deux ensembles infinis ?

Après avoir posé ces différentes questions de manière tout à fait informelle, en faisant seulement référence au comptage qu'on a appris à l'école primaire, et en étant vagues sur ce qu'on peut entendre par « deux ensembles infinis qui ont le même nombre d'éléments », nous allons maintenant aborder ces questions avec plus de méthode.

Correspondance biunivoque, appelée aussi **bijection**. Soit de nouveau deux ensembles finis M et N. Comment peut-on savoir si l'un a plus d'éléments que l'autre sans compter les éléments de chacun d'entre eux ? Pour ce faire, nous allons former des *paires* d'éléments comprenant chacune un élément de M et un élément de N. On en forme autant qu'on peut. Et on procède de telle sorte que chaque élément de M ne puisse appartenir qu'à une seule paire, et de même chaque élément de N ne puisse appartenir qu'à une seule paire. Si chaque élément de M trouve sa place dans une paire, et chaque élément de N aussi, alors on a affaire à ce qu'on appelle une correspondance biunivoque ou bijection. Voici une bijection.

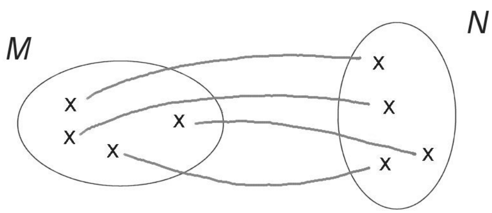


Figure XV.1 : Il y a une bijection entre les éléments de M et ceux de N. Les deux ensembles ont donc par définition le même nombre d'éléments.

Si au terme de cette procédure, tous les éléments de N avaient été mis en correspondance avec des éléments de M, et il nous restait encore quelques éléments de M sur les bras, alors il y aurait plus d'éléments dans M que dans N. Pour savoir si deux ensembles finis ont le même nombre d'éléments ou pas, il n'est pas nécessaire de compter chacun d'eux. Cette méthode d'appariement suffit. Illustrons-le avec un exemple.

Supposons que dans une salle de conférence il y ait un grand nombre de gens, d'abord tous debout, et un grand nombre de chaises. Pour savoir s'il y a autant de chaises que de gens, ou bien s'il y a davantage de gens ou davantage de chaises, il suffit de demander aux gens de s'assoir. Si au moins une personne n'a pas de siège, il y a plus de gens que de sièges. Si tout le monde peut s'assoir et il ne reste aucun siège libre, alors les deux nombres sont égaux, etc.

La méthode d'appariement pour comparer deux nombres a non seulement l'avantage de ne pas nécessiter de compter les gens et les sièges (même si c'est utile quand on organise une conférence), mais elle a aussi l'autre avantage de pouvoir être appliquée sans changement essentiel à des ensembles infinis.

Considérons l'ensemble des entiers naturels qu'on va dénoter N

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ...\}$$

et l'ensemble des nombres pairs qu'on va dénoter P

$$P = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ ...\}$$

Quel ensemble a le plus d'éléments ? À première vue, on est tenté de dire que c'est le premier. Cependant nous pouvons former des paires, comme montré ci-dessous dans la table XV.1, qui utilisent tous les éléments du premier ensemble et tous les éléments du second.

Table XV.1 : Correspondance biunivoque entre les entiers naturels et les entiers naturels pairs.

N	1	2	3	4	...
P	2	4	6	8	...

Aucun élément de N n'apparaît surnuméraire, voulant dire par là que tous les éléments de N ont trouvé place dans une paire avec un élément de P, et tous les éléments de P sont utilisés aussi. Il est vrai qu'on peut aussi construire des paires comme ceci :

Table XV.2 : Autre correspondance entre les entiers naturels et les entiers pairs.

N	1	2	3	4	5	...
P	–	2	–	4	–	...

Alors beaucoup d'éléments de N ne sont pas dans des paires. D'un autre côté, on peut aussi construire des paires d'une troisième façon :

Table XV.3 : Troisième correspondance entre les entiers naturels et les entiers pairs.

N	–	1	–	2	–	3	–	...
P	2	4	6	8	10	12	14	...

Cette fois-ci ce sont beaucoup d'éléments de P qui se retrouvent sans correspondant, alors que tous ceux de N en ont un.

Ainsi, quand les deux ensembles A et B sont infinis, il y a différentes façons de construire des paires qui conduisent à des configurations différentes. Quand il y a un moyen de construire des paires de sorte que chaque élément de A et aussi chaque élément de B trouve sa place dans une paire, on dit qu'il existe une correspondance biunivoque, ou bijection, entre les ensembles A et B. Par exemple, entre les ensembles N et P, ci-dessus, on a pu construire une correspondance biunivoque. C'est celle montrée dans la table XV.1 ; et on peut en construire beaucoup d'autres.

Si entre deux ensembles A et B on peut construire une correspondance biunivoque, alors on dit qu'ils ont le *même nombre d'éléments* ou le même *cardinal*. On dit encore qu'ils ont la même *cardinalité*. Si *quelle que soit* la méthode d'appariement, il y a toujours des éléments de A qui restent sans correspondants, alors on dit que A contient plus d'éléments que B, ou que A a une cardinalité supérieure à celle de B.

Ainsi nous avons apporté une réponse à l'une des questions ci-dessus : comment comparer les nombres d'éléments de deux ensembles infinis. Mais nous n'avons toujours pas répondu à l'autre question : existe-t-il des ensembles infinis de cardinalité différente ? Pour répondre à cette question, examinons quelques exemples simples d'ensembles infinis.

Ensembles dénombrables. S'il est possible d'établir une correspondance biunivoque entre les éléments de l'ensemble A et l'ensemble des entiers naturels

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ ...\}$$

alors on dit que l'ensemble A est *dénombrable*. Le terme anglais est « *countable* », c'est-à-dire « qui peut être compté » (y compris jusqu'à l'infini...). De même, en français, l'ensemble A est dénombrable si on peut « compter » ou « énumérer » ses éléments comme une suite

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...,\ a_n,\ ...$$

Une suite est par définition indexée par les entiers naturels, ce qui est une autre façon de faire apparaître la bijection entre les éléments de A et les entiers naturels. Comme on l'a vu dans le vol. 1 chap. II, quand nous avons introduit les fonctions, une suite est une fonction (pas forcément bijective) de l'ensemble des entiers naturels vers un ensemble d'objets quelconques, qui peuvent être des nombres ou d'autres choses.

La table XV.1 montrait que l'ensemble des nombres entiers naturels pairs était dénombrable. La ligne du haut pouvait alors être vue comme celle des index de numérotation, et la ligne du bas celle des nombres pairs : $a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...,\ a_n,\ ...$

Les ensembles dénombrables sont, pour ainsi dire, les ensembles infinis les plus petits : n'importe quel ensemble infini contient un sous-ensemble dénombrable.

Si deux ensembles non vides finis n'ont pas d'intersection, leur union contient plus d'éléments que chacun d'eux séparément. Pour les ensembles infinis, cette règle n'est plus valide. En effet, soit P l'ensemble des nombres pairs, I l'ensemble des nombres impairs, et N l'ensemble de tous les entiers naturels. (Étant donné qu'on s'intéresse ici à des comptages, par commodité, comme l'ont vu la lectrice et le lecteur, on fait démarrer N à 1 plutôt que 0 – mais ce n'est pas un point essentiel.) Comme le montre la table XV.4, les ensembles P et I sont dénombrables. Cependant leur union $N = P + I$ est aussi dénombrable.

Table XV.4 : Les ensembles P, I et $N = P + I$ sont tous trois dénombrables

P	2	4	6	8	...
I	1	3	5	7	...
N	1	2	3	4	...

La violation par les ensembles infinis de la règle « le tout est plus grand que la partie » montre que les propriétés des ensembles infinis sont qualitativement différentes de celles des ensembles finis. La transition des ensembles finis vers les ensembles infinis reflète le principe dialectique bien connu : dans certaines situations, un changement quantitatif important entraîne un changement qualitatif.

Démontrons que l'ensemble Q des nombres rationnels est dénombrable. Pour ce faire, on range tous les nombres rationnels dans la table suivante :

Table XV.5 : Rangement de tous les rationnels dans un tableau à deux dimensions, infini vers la droite et vers le bas, afin de les compter ensuite « diagonalement » en commençant dans le coin en haut à gauche

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
1	2	3	4	5	6	...
0	-1	-2	-3	-4	-5	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	...
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{11}{2}$	...
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	...
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{8}{3}$	...
...	...	...	...	...	...	...

Dans la table XV.5, la première ligne contient tous les entiers naturels en ordre croissant, la deuxième ligne contient 0 et tous les entiers négatifs en ordre décroissant, la troisième ligne contient toutes les fractions irréductibles de dénominateur 2 en ordre croissant, la quatrième toutes les fractions négatives irréductibles de dénominateur 2 en ordre décroissant, etc. Il est clair que chaque nombre rationnel va apparaître une fois et une seule dans cette table. Maintenant on les compte « diagonalement » comme montré par les flèches. Alors tous les nombres rationnels vont être comptés, c'est-à-dire rangés en une suite dénombrable :

Table XV.6 : À l'aide du comptage « diagonal » dans la table XV.5, l'ensemble Q des nombres rationnels est organisé en une suite dénombrable

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
Q	1	2	0	3	-1	$\frac{1}{2}$	4	-2	$\frac{3}{2}$	...

C'est donc une correspondance biunivoque entre l'ensemble Q des nombres rationnels et l'ensemble N des entiers naturels, prouvant ainsi que les rationnels sont dénombrables.

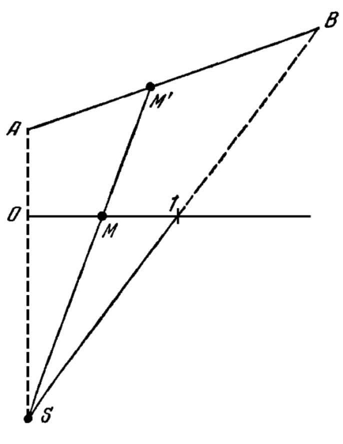


Figure XV.2 : Le segment AB a la cardinalité du continu.

Ensembles ayant la cardinalité du continu. Quand il est possible d'établir une correspondance biunivoque entre les éléments d'un ensemble M et les points du segment $0 \leq x \leq 1$, on dit que l'ensemble M a la *cardinalité du continu.* En particulier, selon cette définition, l'ensemble des points du segment $0 \leq x \leq 1$ a évidemment lui-même la cardinalité du continu.

La figure XV.2 démontre que l'ensemble des points de n'importe quel segment AB a aussi la cardinalité du continu. Ici la correspondance biunivoque est démontrée géométriquement à l'aide d'une projection centrale.

Il n'est pas difficile de montrer que l'ensemble des points de n'importe quel segment $a < x < b$ et même l'ensemble des nombres de toute la droite $-\infty < x < \infty$ ont la cardinalité du continu.

Note sur la terminologie : au lieu de l'expression « la cardinalité du continu » on rencontre aussi l'expression « *la puissance du continu* ». Les deux signifient la même chose.

Plus intéressant encore que le fait que n'importe quel segment ait la puissance du continu est celui-ci : l'ensemble des points du *carré* $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ a aussi la puissance du continu. Autrement dit, pour parler informellement, il y a « autant de points » dans un carré que dans un de ses côtés.

XV.3 Nombres réels [5]

Le développement du concept de nombre a été présenté en détail dans le chapitre I (vol. 1). Ici nous allons donner au lecteur et à la lectrice une vue succincte des théories des nombres réels qui ont vu le jour au XIX^e^ siècle en relation avec l'approfondissement des concepts de base de l'analyse.

Nombres rationnels. Nous partons du principe que les propriétés basiques des nombres rationnels sont familières au lecteur et à la lectrice. Sans rentrer dans les détails, rappelons les principales. Les nombres rationnels, c'est-à-dire les nombres de la forme $\frac{m}{n}$, où m et n sont des entiers et $n \neq 0$, forment un ensemble de nombres au sein duquel sont définies deux opérations (l'addition et la multiplication). Ces opérations satisfont un certain nombre de règles (axiomes). Dans ce qui suit a, b, c, ... dénotent des nombres rationnels.

I. AXIOMES DE L'ADDITION

1. $a + b = b + a$ (commutativité)

5. Pour la rédaction de cette section, l'auteur du chapitre a reçu de précieux conseils d'A. N. Kolmogorov. (Note de l'auteur du chapitre.)

2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (associativité)
3. l'équation

$$a + x = b$$

   a une solution et une seule (existence de l'opération inverse de l'addition)

Il découle immédiatement de ces axiomes que l'expression $a+b+c$ a un sens non ambigu, qu'il existe un élément neutre 0 (zéro) tel que $a+0 = a$, et qu'il existe une opération inverse de l'addition – la soustraction – de sorte que l'expression $b-a$ a un sens.

Ainsi, d'un point de vue algébrique, les rationnels munis de l'addition forment un *groupe commutatif.*

II. AXIOMES DE LA MULTIPLICATION

1. $ab = ba$ (commutativité)
2. $a(bc) = (ab)c$ (associativité)
3. l'équation

$$ay = b$$

   où $a \neq 0$, a une solution et une seule (existence de l'opération inverse de la multiplication)

Il découle de ces axiomes que l'expression abc a un sens non ambigu, qu'il existe un élément neutre pour la multiplication, le nombre noté 1, tel que $a \cdot 1 = a$, et qu'on peut utiliser les nombres rationnels autres que 0 pour faire l'opération inverse de la multiplication – c'est-à-dire la division. L'ensemble des nombres rationnels, dont on a exclu le zéro, munis de l'opération de multiplication forment un autre groupe commutatif.

III. AXIOME DE LA DISTRIBUTIVITÉ

1. $(a + b)c = ac + bc$

La collection des axiomes de I à III montrent que, muni des deux opérations d'addition et de multiplication, l'ensemble Q des nombres rationnels – que dans la suite nous noterons $\mathbb{Q}$ pour nous conformer à l'usage – forment ce qu'on appelle en français un *corps algébrique*. Le russe et l'anglais utilisent le terme de « champ algébrique » (« algebraic field » en anglais).

IV. AXIOMES D'ORDRE

1. pour n'importe quelle paire de nombres rationnels a et b, une et une seule des trois relations suivantes est vraie : $a < b$, ou $a > b$ ou $a = b$
2. si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$
3. si $a < b$, alors $a + c < b + c$ (monotonicité de l'addition)
4. si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$ (monotonicité de la multiplication par un nombre rationnel positif)

Tous ces axiomes, satisfaits par les rationnels, nous permettent de dire que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels forme un *corps algébrique ordonné*.

Comme on le verra plus loin dans ce chapitre, ainsi que dans le chapitre XX sur les structures algébriques, il existe beaucoup d'autres ensembles d'objets mathématiques qui, munis de deux opérations, forment un corps algébrique, certains ayant aussi un ordre.

Notons deux propriétés importantes des nombres rationnels.

1. densité : quels que soient a et b, avec $a < b$, il existe un nombre c tel que $a < c < b$
2. dénombrabilité : l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable (cf. section XV.2)

Mesure de quantités. L'insuffisance des seuls nombres rationnels pour faire des mathématiques est déjà manifeste quand on considère le problème important de la mesure de quantités. Nous allons examiner le problème avec l'exemple le plus simple qui soit : la mesure de longueurs de segments.

Imaginons une ligne droite sur laquelle une origine (un point O), une direction, et une unité ont été choisies. Il est alors clair ce qu'est le segment OA quand A est à la position $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{3}$, ou $\frac{2}{3}$, ou $-\frac{1}{3}$, etc. D'une manière générale, à chaque nombre rationnel a on peut associer un point A sur la droite – celui d'abscisse a. Dans ce cas, le nombre a est par définition aussi la longueur orientée du segment OA. Cependant, avec cette construction tous les segments n'ont pas une longueur exprimée par un certain nombre (rationnel). Par exemple, comme le savaient déjà les Grecs de l'Antiquité, la longueur de la diagonale du carré de côté 1 n'est pas mesurée par un nombre rationnel (cf. vol. 1, chap. I, pp. 40-41 pour la démonstration). Autrement dit, il y a plus de points sur la droite que de nombres rationnels. La façon naturelle de se tirer de cette situation est d'établir une correspondance biunivoque entre les nombres et les points, ce qui nécessite d'étendre le concept de nombre.

Nombres réels. Nous sommes arrivés à la conclusion que les nombres rationnels seuls ne sont pas suffisants pour mesurer des quantités et que le concept de nombre doit être étendu de telle sorte qu'il existe à nouveau une correspondance biunivoque entre les nombres et les points sur la droite. Pour ce faire, nous allons essayer de voir s'il est possible de déterminer la position d'un point arbitraire sur la droite en s'aidant seulement des points rationnels pour y parvenir. Une construction analogue dans le corps des rationnels va nous conduire au concept de nombre réel.

Soit α un point arbitraire donné sur la droite. Alors tous les points rationnels a peuvent être partagés en deux groupes : d'une part tous ceux qui sont à gauche de α, et d'autre part tous ceux qui sont à droite de α. En ce qui concerne le point α lui-même, s'il se trouve être rationnel, on peut le mettre dans le groupe qu'on veut (mais pas dans les deux). Une telle partition des nombres rationnels en deux groupes est habituellement appelée une *coupure*. Deux coupures vont être considérées comme identiques si tous les points rationnels d'un côté et tous les points rationnels de l'autre sont respectivement les mêmes (on ne s'occupe pas du point de construction de la coupure, s'il est lui-même rationnel). Maintenant il est facile de voir que deux points α et β distincts définissent des coupures distinctes. En effet, puisque les points rationnels sont denses sur la droite, il y a forcément deux points rationnels

r_1 et r_2 situés strictement entre α et β. Alors pour l'une des coupures, ils seront dans la partie droite, et pour l'autre dans la partie gauche. (On considère deux points r_1 et r_2 et non un seul pour éviter l'ambiguïté si c'était justement le point de coupure.)

Ainsi, chaque point sur la droite définit une coupure au sein des rationnels et des coupures différentes correspondent à des points différents.

Il est très important que les coupures puissent être définies légèrement différemment de ce qu'on vient de faire, de telle sorte que le nombre α ne figure pas dans la définition. Nous allons maintenant appeler une coupure au sein des rationnels une partition de $\mathbb{Q}$ en deux sous-ensembles A et B tels que $\mathbb{Q} = A + B$ (c'est-à-dire que $\mathbb{Q}$ est la réunion de A et B), $AB = \varnothing$ (c'est-à-dire, A et B n'ont pas d'intersection), et quels que soient a et b dans $\mathbb{Q}$, $\{a \in A$ et $b \in B\}$ implique $a < b$. Avec cette définition, il est possible de retrouver de manière non ambigüe le point (la frontière) qui produit la coupure. Autrement dit, à l'aide des coupures au sein des rationnels, on peut déterminer *n'importe quel* point – rationnel ou non rationnel – sur la droite. Cette construction a été proposée par le mathématicien allemand Richard Dedekind (1831-1916), et est appelée une *coupure de Dedekind*.

Les coupures ne sont pas la seule façon possible de déterminer la position de n'importe quel point sur la droite en s'aidant des nombres rationnels. La méthode suivante, due à Georg Cantor (1845-1918), est plus proche de la façon habituelle de faire des mesures. Soit, de nouveau, α un point quelconque donné sur la droite. Alors on peut trouver deux points rationnels a et b aussi proches que l'on veut l'un de l'autre, tels que α soit entre les deux. Les points a et b déterminent approximativement la position du point α. Imaginons continuer indéfiniment ce processus de détermination approximative du point α, de telle façon qu'à chaque étape la précision augmente. Nous obtenons une suite de segments $[a_n,\ b_n]$, avec des extrémités rationnelles, tels que $[a_{n+1},\ b_{n+1}] \subseteq [a_n,\ b_n]$ et $b_n - a_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Une suite de segments satisfaisant ces conditions s'appelle un *système de segments emboîtés* (dont la longueur rétrécit vers zéro). Il est clair qu'un tel système de segments définit sans ambiguïté sur la droite la position du point α.

À l'aide d'une construction analogue, dans le domaine non plus des points sur la droite, mais des nombres rationnels eux-mêmes, on peut définir les nombres réels. Les opérations sur les nombres réels sont aussi aisément définissables en adaptant le procédé, et on démontre qu'elles satisfont les mêmes axiomes que les opérations sur les nombres rationnels.

En conclusion, on a construit une correspondance bijective entre les nombres réels et les points sur la droite. C'est pourquoi l'ensemble des nombres réels est souvent appelé la *droite des réels*.

Principes de continuité. Il y a une différence essentielle entre l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels et l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Nous voulons parler d'un certain nombre de propriétés caractérisant la *continuité* de l'ensemble des nombres réels, que ne satisfait pas l'ensemble des nombres rationnels. Ces propriétés forment ce qu'on appelle généralement les principes de continuité. Nous listons ci-après les plus importantes d'entre elles.

PRINCIPE DE DEDEKIND. Si l'ensemble des nombres réels est coupé en deux parties complémentaires X et Y, chacune non vide, n'ayant pas d'intersection entre elles, telles que $\{x \in X$ et $y \in Y\}$ implique $x < y$, alors il existe un nombre ξ (la frontière de la coupure) tel que quels que soient $x \in X$ et $y \in Y$ on a $x \leq \xi \leq y$. L'ensemble des nombres réels x, satisfaisant les inégalités $a \leq x \leq b$ est appelé un segment de la droite des réels, et est dénoté $[a,\ b]$. Une suite de segments $[a_n,\ b_n]$ forme un *système de segments emboîtés*, si $[a_{n+1},\ b_{n+1}] \subseteq [a_n,\ b_n]$ et $b_n - a_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

PRINCIPE DE CANTOR. Pour n'importe quel système de segments emboîtés $[a_n,\ b_n]$, il existe un et un seul nombre réel ξ qui appartient à chacun de ces segments.

PRINCIPE DE WEIERSTRASS. N'importe quelle suite de nombres réels, non décroissante et bornée supérieurement, converge.

Pour introduire le principe suivant, nous allons dire qu'une suite de nombres réels $\{x_n\}$ est fondamentale, si quel que soit $\epsilon > 0$ il existe un nombre N tel que $\forall\ n > N$ et $\forall\ p$ on a

$$|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$$

PRINCIPE DE CAUCHY. N'importe quelle suite fondamentale de nombres réels converge.

Une suite fondamentale est aussi appelée une *suite de Cauchy*.

Nous n'avons pas construit de manière suffisamment précise l'ensemble des nombres réels pour être en mesure de démontrer que ces principes sont satisfaits par les nombres réels. Mais notre objectif immédiat est d'examiner comment ces principes sont liés les uns aux autres. Plus précisément, nous allons supposer que l'un des principes de continuité est vérifié par les nombres réels, et regarder quels autres principes en découlent.

La conclusion générale à laquelle nous arriverons est que tous ces principes de continuité sont équivalents.

Nous dirons que le nombre b est la borne supérieure de l'ensemble E

$$b = \sup E$$

si 1) $x \leq b$ pour tous les $x \in E$ et 2) il n'existe pas de nombre $b' < b$ ayant la même propriété.

Montrons que la proposition suivante découle du principe de Dedekind : n'importe quel ensemble de nombres réels E borné supérieurement (c'est-à-dire qu'il existe un nombre – nous ne parlons pas encore d'une borne supérieure comme b – tel qu'aucun élément de E ne le dépasse) a une borne supérieure. En effet, partageons l'ensemble des réels en deux parties X et Y selon le critère suivant : nous poserons $x \in X$ s'il existe un nombre $a \in E$ tel que $a \geq x$; et nous poserons $y \in Y$, si pour n'importe quel $a \in E$ on a $a < y$. Il est facile de vérifier que c'est une coupure. D'après le principe de Dedekind, elle a une frontière ξ ; cette frontière sera la borne supérieure de E.

Montrons maintenant que le principe de Weierstrass découle du principe de Dedekind. Soit $\{x_n\}$ une suite de nombres réels non décroissante et bornée supérieurement (c'est-à-dire, encore une fois, tout d'abord telle qu'il existe un nombre – pas nécessairement sa borne supérieure – que ses éléments ne dépassent pas). Par ce que nous venons de démontrer dans le paragraphe précédent, cette suite a une borne supérieure ξ. En vertu de la définition d'une borne supérieure, $x_n \leq \xi$ pour tous les index $n = 1,\ 2,\ \ldots$; en outre, pour n'importe quel ϵ positif aussi petit soit-il, on peut trouver un index n_0 tel que $x_{n_0} > \xi - \epsilon$. Et du fait que la suite $\{x_n\}$ est monotone, il découle que pour tous les $n > n_0$ on a $\xi - \epsilon < x_n \leq \xi$; autrement dit, la suite $\{x_n\}$ a pour limite ξ[6].

Pour démontrer la relation dans l'autre sens – c'est-à-dire que le principe de Weierstrass implique celui de Dedekind –, notons que le principe de Weierstrass implique ce qu'on appelle le principe d'Archimède :

PRINCIPE D'ARCHIMÈDE. Quels que soient les nombres réels $a > 0$ et b, on peut trouver un entier naturel n tel que $na > b$.

Ce principe est équivalent à dire que pour n'importe quel nombre réel b, la suite $\left\{\frac{b}{n}\right\}$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ tend vers zéro.

Supposons en effet que le principe de Weierstrass soit vrai, mais pas celui d'Archimède. Si le principe d'Archimède n'est pas vérifié, cela veut dire qu'il existe un $a > 0$ tel que la suite $x_n = na$ est bornée. Cette suite est croissante. Par le principe de Weierstrass, elle a donc une limite ξ. On en déduit que le segment $\left[\xi - \frac{a}{2},\ \xi\right]$ contient une certaine valeur $x_n = na$ de notre suite. Mais alors $x_{n+1} = (n+1)a > \xi$, ce qui contredit que ξ soit la borne supérieure de $\{x_n\}$.

Du principe de Weierstrass découle celui de Dedekind. Coupons l'ensemble des nombres réels en deux parties disjointes et complémentaires X et Y telles que $\forall\ x \in X$ et

6. Si le lecteur et la lectrice trouvent que ces raisonnements sont de l'« epsilonite » qui semble démontrer des évidences, il faut se rappeler que nous étudions les *principes de continuité des nombres réels*. Les nombres rationnels, bien que denses sur la droite des réels, ne les satisfont pas.

$\forall\, y \in Y$ on a $x < y$. Montrons que cette coupure a une frontière unique ξ. Soit m un entier quelconque (positif ou négatif), et n un entier positif. Dénotons par x_n le plus grand élément de la forme $\frac{m}{2^n} \in X$, tel que $x_n + \frac{1}{2^n} \in Y$. Puisque l'ensemble des éléments de la forme $\frac{m}{2^n}$ est contenu dans l'ensemble des éléments de la forme $\frac{m}{2^{n+1}}$, on a $x_n \leq x_{n+1}$. De plus, la suite $\{x_n\}$ est bornée (par exemple, par le nombre $x_1 + {}^1\!/{}_2$). Il s'ensuit, par le principe de Weierstrass, qu'elle a une certaine limite ξ. Montrons que cette limite ξ est la frontière de notre coupure. En effet, si $x < \xi$, alors $x \in X$. Et si $y > \xi$, alors $y \in Y$, puisque par le principe d'Archimède on sait qu'on peut trouver un nombre n tel que $\frac{1}{2^n} < y - \xi = a$. Mais $x_n < \xi$, $x_n + \frac{1}{2^n} \in Y$, alors $y = \xi + a > x_n + \frac{1}{2^n}$ et donc $y \in Y$.

On peut aussi montrer que les principes de Cantor et de Cauchy sont équivalents. Cependant, du principe par exemple de Cauchy ne découle pas le principe de Dedekind. Cette assertion doit être comprise dans le sens suivant : il existe un corps ordonné pour lequel le principe de Cauchy est vérifié, mais pas celui de Dedekind. Toutefois si nous posons au départ que le principe d'Archimède est satisfait, alors les quatre principes sont équivalents.

Indénombrabilité du continu. Montrons que l'ensemble des points du segment $0 \leq x \leq 1$ n'est pas dénombrable. Nous allons construire une preuve par l'absurde. Supposons donc que l'ensemble des points du segment $0 \leq x \leq 1$ soit dénombrable, c'est-à-dire puisse être compté. Alors on peut énumérer tous les points x de ce segment à l'aide d'une suite indexée par les entiers naturels.

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{XV.1}$$

Choisissons à l'intérieur du segment $[0,\ 1]$ un segment σ_1 de longueur plus petite que 1, et qui ne contienne pas x_1. Un tel segment peut certainement être trouvé. Ensuite, à l'intérieur du segment σ_1, choisissons un segment σ_2 de longueur plus petite que $\frac{1}{2}$, et qui ne contienne ni x_1 ni x_2. On continue ainsi le procédé : d'une manière générale, après le segment σ_{n-1} on prend le segment σ_n de longueur plus petite que $\frac{1}{n}$ et ne contenant aucun des points de $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$. Nous construisons de cette façon une suite infinie de segments

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ ...,\ \sigma_n,\ ...$$

telle que chaque segment est contenu dans le précédent, et leur longueur tend vers zéro. Ils forment ce qu'on a appelé un système de segments emboîtés. Alors, par le principe de Cantor (page 21) il existe un point unique x dans le segment $[0,\ 1]$ appartenant à tous les segments σ_n. Puisque, d'après notre hypothèse, tous les points du segment $[0,\ 1]$ ont été énumérés à l'aide de la suite (XV.1), le point x qui appartient à tous les segments σ_n est l'un des points x_m de cette suite. Mais par construction, le segment σ_m ne contient pas le point x_m donc $x \neq x_m$. Nous sommes ainsi parvenus à une contradiction. Donc notre hypothèse initiale que l'ensemble des points du segment $[0,\ 1]$ est dénombrable doit être rejetée, et l'ensemble de ces points est indénombrable, cqfd [7]

7. Une autre preuve classique, par contradiction aussi, de l'indénombrabilité des points du segment $[0,\ 1]$ est la suivante. On suppose donc qu'on peut lister tous les points du segment $[0,\ 1]$. Alors on écrit dans une table toutes les abscisses de tous les points en système à base 10, une par ligne, avec un nombre fini ou infini de décimales (les d_{ij}) :

$$x_1 = 0, d_{11}d_{12}d_{13}d_{14}, ... \quad (1)$$

$$x_2 = 0, d_{21}d_{22}d_{23}d_{34}, ... \quad (2)$$

$$x_3 = 0, d_{31}d_{32}d_{33}d_{34}, ... \quad (3)$$

$$... \quad ... ...$$

Puis on construit un nombre dont la première décimale est différente de d_{11}, la deuxième décimale est différente de d_{22}, la troisième décimale est différente de d_{33}, etc. C'est un nombre qui est dans $[0,\ 1]$ et qui n'est pas dans la liste, pourtant supposée complète. On est arrivé à une contradiction. Donc l'ensemble des points de $[0,\ 1]$ ne peut pas être énuméré, c'est-à-dire est indénombrable.

Ce théorème montre qu'il existe des ensembles infinis de cardinalités différentes, apportant ainsi une réponse à la question posée page 9. Le segment $[0,\ 1]$ a une cardinalité plus grande que les entiers naturels. On a vu plus haut qu'elle s'appelle aussi la cardinalité ou la puissance du continu. On démontre aussi que $[0,\ 1]$ et l'ensemble de tous les nombres réels, dénoté $\mathbb{R}$, ont la même cardinalité.

Une question profonde qui se pose, seulement en partie résolue au moment où ces lignes sont écrites, est la suivante : existe-t-il un ensemble de cardinalité strictement comprise entre la cardinalité de $\mathbb{N}$ et la cardinalité de $\mathbb{R}$? Cantor a émis l'hypothèse qu'un tel ensemble n'existait pas. Cette conjecture porte le nom d'*Hypothèse du continu* et est le premier des célèbres 23 problèmes présentés par David Hilbert (1862-1943) à Paris en 1900 [8].

XV.4 Ensembles de points

Dans la section précédente, nous avons déjà rencontré des ensembles dont les éléments sont des points. En particulier, nous avons considéré l'ensemble de tous les points d'un segment, l'ensemble de tous les points $(x,\ y)$ du carré $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Maintenant nous allons étudier plus en détail les propriétés de ces ensembles.

Les ensembles dont les éléments sont des points s'appellent aussi des *ensembles ponctuels.* Nous conserverons toutefois ici le vocable *ensembles de points.*

On peut parler d'ensembles de points sur la ligne droite,

8. La question a été finalement complètement résolue en deux temps : en 1938, Kurt Gödel (1906-1978) a montré que l'hypothèse du continu ne pouvait pas être réfutée dans le cadre de la théorie courante des ensembles – théorie dite de Zermelo-Fraenkel avec l'axiome du choix (abréviation ZFC) ; puis en 1963, Paul Cohen (1934-2007) a montré qu'elle ne pouvait pas non plus être démontrée dans ce cadre. La technique consiste à construire, au sein de la théorie ZFC, un modèle où l'hypothèse est vraie, et un autre où l'hypothèse est fausse. Par conséquent, dans chaque cas, si l'on parvenait à une contradiction, cela voudrait dire qu'une contradiction existe dans la théorie ZFC elle-même.

dans le plan, dans l'espace. Pour rester simples, nous allons nous restreindre à leur étude *sur la droite*.

Il y a un lien étroit entre les nombres réels et les points sur la droite : à chaque nombre réel on peut associer un point sur une droite et réciproquement, c'est-à-dire de manière bijective. C'est pourquoi, quand on parle d'ensembles de points, nous incluons aussi les ensembles formés de nombres réels – des ensembles sur la droite des réels. Inversement, afin de définir un ensemble de points sur une ligne droite, nous utiliserons habituellement l'ensemble des coordonnées de tous les points de notre ensemble.

Les ensembles de points (en particulier, les ensembles sur une ligne droite) ont un certain nombre de propriétés spéciales qui les distinguent des ensembles d'objets quelconques. Et la théorie des ensembles de points s'est développée en une discipline mathématique à part entière. Tout d'abord cela a un sens de parler de la *distance* entre deux points. Ensuite, entre deux points sur la droite, il y a un *ordre*. On peut parler du point à gauche, du point à droite. On dit que les points sur la droite forment un *ensemble ordonné*. Enfin, comme observé plus haut, le principe de Cantor (i.e. dans un système de segments emboîtés, il y a un et un seul réel qui appartient à tous les segments) est satisfait sur la ligne droite. On le formule habituellement en disant que la ligne droite est *complète*.

Introduisons quelques termes et notations pour les ensembles les plus simples sur la droite. Il s'agit des segments, appelés aussi des intervalles[9] :

1. Segment ou intervalle fermé $[a,\ b]$: ensemble des points dont la coordonnée x satisfait

$$a \leq x \leq b$$

2. Intervalle ouvert $(a,\ b)$: ensemble des points dont la coordonnée x satisfait

$$a < x < b$$

9. Nous les avons déjà décrits vol. 1, chap. II, page 199, dans la note n°10. Nous les révisons ici.

3. Intervalles semi-ouverts $[a,\ b)$ ou $(a,\ b]$: ensembles des points dont la coordonnée x satisfait respectivement

$$a \leq x < b \quad \text{ou} \quad a < x \leq b$$

Ces intervalles peuvent avoir une de leurs bornes ou les deux à l'infini. Ainsi, $(-\infty,\ \infty)$ dénote la droite toute entière ; tandis que, par exemple, $(-\infty,\ b]$ dénote les points dont l'abscisse satisfait $x \leq b$.

Nous commençons par considérer les diverses possibilités de positionnement d'un ensemble quelconque (vu dans sa globalité) sur la ligne droite.

Ensembles bornés et ensembles non bornés. Un ensemble de points E sur la droite peut soit consister en des points dont la distance à l'origine n'excède pas un certain nombre positif, soit avoir des points à une distance arbitrairement grande de l'origine. Dans le premier cas, l'ensemble E est dit *borné* ; tandis que dans le second, il est dit *non borné*. Un exemple d'ensemble borné est le segment $[0,\ 1]$, et un exemple d'ensemble non borné est l'ensemble des points de coordonnée entière.

On voit aisément que si a est un point donné sur la droite, alors l'ensemble E sera borné si et seulement si les distances de tous les points de E au point a sont bornées supérieurement par un nombre positif.

Ensembles bornés supérieurement et ensembles bornés inférieurement. Soit E un ensemble de points sur la droite. S'il existe un point A sur la droite tel que tous les points $x \in E$ sont à gauche de A, on dit que E est *borné supérieurement*. De même, s'il existe un point a sur la droite tel que tous les points $x \in E$ sont à droite de a, on dit que E est *borné inférieurement*. Par exemple, l'ensemble des points à coordonnée positive est borné inférieurement. N'importe quel nombre négatif ou nul est *une* borne inférieure. Mais quand on parle de *la* borne inférieure de cet ensemble, il s'agit seulement du zéro. Nous avons déjà vu cette distinction plus haut p. 22 quand nous avons parlé de $b = \sup E$; nous revenons sur ce point important, ci-dessous, dans le paragraphe intitulé « Borne supérieure et borne inférieure d'un ensemble ». Selon que l'on considère les points à coordonnée positive ou nulle ou bien strictement positive, la borne inférieure fait partie de l'ensemble considéré ou pas. De même, l'ensemble des points à coordonnée négative est borné supérieurement (par tous les nombres positifs ou nuls, et zéro est *la* borne supérieure).

Il est clair que la définition donnée plus haut d'un ensemble borné est équivalente à celle-ci : un ensemble E de points sur la droite est borné s'il est borné inférieurement et supérieurement. Bien que les deux définitions se ressemblent, il y a une différence importante entre elles : la première repose sur l'existence d'une distance entre toute paire de points sur la droite, tandis que la deuxième repose sur le fait que les points de la droite forment un ensemble ordonné.

Notons aussi qu'un ensemble est borné si et seulement s'il est contenu dans un segment $[a,\ b]$.

Borne supérieure et borne inférieure d'un ensemble. Soit sur la droite un ensemble de points E borné supérieurement. Alors il existe un point A à la droite duquel il n'y a aucun point de E. Il y a évidemment beaucoup de points ayant cette propriété. En utilisant le principe de Cantor, on peut montrer que parmi tous ces points bornant supérieurement E, il y en a un plus petit que les autres – c'est celui le plus à gauche possible. Ce point est appelé *la borne supérieure* de l'ensemble E. On définit de manière analogue *la borne inférieure* d'un ensemble borné inférieurement.

Si un ensemble E contient un point plus à droite que tous les autres, alors il est clair que ce sera la borne supérieure de E. Il peut cependant arriver que l'ensemble E, tout en étant borné supérieurement, n'ait pas de point plus à droite que tous les autres. Par exemple, l'ensemble des points de coordonnées

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \dots$$

est borné supérieurement, mais n'a pas de point plus à droite que tous les autres. Dans ce cas, la borne supérieure a n'appartient pas à l'ensemble E, mais il y a des points de E à une distance arbitrairement petite de a. Dans cet exemple, la borne est bien sûr $a = 1$.

Positionnement relatif d'un ensemble de points E et d'un point quelconque sur la droite. Sur la droite, soit un ensemble de points E et un point quelconque x. Considérons les diverses possibilités de positionnement de l'ensemble E dans le voisinage du point x. Les cas suivants sont possibles :

1. Ni le point x, ni aucun point dans un voisinage suffisamment petit autour de x n'appartiennent à E.
2. Le point x n'appartient pas à E, mais dans tous les voisinages, aussi petits soient-ils, de x, il y a des points de E.
3. Le point x appartient à E, mais dans un voisinage suffisamment petit de x aucun autre point n'appartient à l'ensemble E.
4. Le point x appartient à E, et il y a d'autres points de E à une distance arbitrairement petite de x.

Dans le cas 1, le point x est dit *externe* à l'ensemble E. Dans le cas 3, c'est un point *isolé* de E. Et dans les cas 2 et 4, x est un *point limite* de l'ensemble E. On dit aussi un *point d'accumulation* de E.

Ainsi, si $x \notin E$, le point x peut être soit un point externe à E soit un point limite de E. Et si $x \in E$, il peut être soit un point isolé, soit là encore un point limite.

Un point limite de E peut être ou ne pas être lui-même dans l'ensemble E. Ce qui le caractérise est que dans n'importe quel voisinage de x, aussi petit soit-il, il y a des points appartenant à E. Autrement dit, un point x est un point limite de l'ensemble E si quel que soit l'intervalle δ contenant x, δ contient aussi une infinité de points appartenant à E.

Le concept de point limite, dit encore point d'accumulation, est l'un des concepts les plus importants de la théorie des ensembles de points.

Si un point x et *tous* les points d'un voisinage suffisamment petit autour de x appartiennent à l'ensemble E, alors x est appelé un *point intérieur* de E. Un point qui n'est ni interne ni externe par rapport à un ensemble E est dit *sur la frontière* de E. On dit aussi que c'est un *point frontière* de E. Et, répétons-le, il peut lui-même appartenir à E ou pas.

Regardons quelques exemples pour éclairer ces différents concepts.

EXEMPLE 1. Soit E_1 l'ensemble formé des points ayant les coordonnées suivantes

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ ...,\frac{1}{n},\ ...$$

Alors tous les points de cet ensemble sont des points isolés. Mais le point 0 (qui n'appartient pas à l'ensemble E_1) est un point limite de E_1. Tous les autres points sur la droite des réels sont des points externes à E_1.

EXEMPLE 2. Soit E_2 l'ensemble de tous les points rationnels x dans le segment $[0,\ 1]$. Cet ensemble n'a pas de points isolés. Tous les points du segment $[0,\ 1]$ sont des points limites de E_2. Et tous les autres points de la droite sont des points externes. Il est clair que parmi les points limites de l'ensemble E_2 certains font partie de E_2 et d'autres n'en font pas partie.

EXEMPLE 3. Prenons maintenant pour E_3 tous les points du segment $[0,\ 1]$. Comme dans l'exemple précédent, l'ensemble E_3 n'a pas de points isolés, et ici encore tous les points du segment sont des points limites. Cependant, contrairement à l'exemple précédent, maintenant tous les points limites de l'ensemble E_3 appartiennent à E_3.

EXEMPLE 4. Prenons pour E_4 tous les points à coordonnées entières sur la ligne droite. Chaque point de E_4 est un point isolé ; l'ensemble E_4 n'a pas de point d'accumulation.

Observons aussi que dans l'exemple 3 tous les points de l'intervalle $(0,\ 1)$ sont des points internes de E_3, et dans l'exemple 2 tous les points de l'intervalle $[0,\ 1]$ sont des points frontières de E_2.

On voit à partir des exemples ci-dessus qu'un ensemble infini de points sur la droite peut n'avoir que des points isolés (E_1, E_4) – et ce même quand il est borné (exemple 1) –, ou peut n'en avoir aucun (E_2, E_3) ; de même, il peut n'avoir que des points intérieurs (E_3 moins ses deux bornes), ou n'en avoir aucun (E_1, E_2, E_4). En ce qui concerne les points limites, seul l'ensemble E_4, dans le dernier exemple, n'a pas de point limite. Comme va le montrer l'important théorème qui suit, cela n'est possible que parce qu'il n'est pas borné.

Théorème de Bolzano-Weierstrass[10].

N'importe quel ensemble infini et borné de points sur la droite a au moins un point d'accumulation.

Démontrons-le. Soit E un ensemble infini et borné de points sur la droite. Puisque E est borné, il est entièrement contenu dans un segment $[a,\ b]$. Divisons ce segment en deux moitiés. Puisque E est infini, au moins une des moitiés contient un nombre infini de points de E. Dénotons cette moitié par σ_1 (si les deux moitiés de $[a,\ b]$ ont un nombre infini de points, on peut prendre n'importe laquelle, par exemple celle de gauche). On recommence avec σ_1 : on le partage en deux moitiés. Puisqu'il contient un nombre infini de points de E c'est forcément aussi le cas d'une de ses moitiés. Dénotons une moitié de σ_1 contenant un nombre infini de points de E par σ_2. On continue indéfiniment le processus consistant à diviser en deux le segment auquel on est arrivé, et à prendre sa moitié contenant un nombre infini de points de E pour nouveau segment fermé. On va ainsi produire une suite infinie de segments fermés σ_1, σ_2, ..., σ_n, ... Cette suite de segments a les propriétés suivantes : chaque nouveau segment σ_{n+1} est contenu dans le précédent σ_n ; chaque segment σ_n contient une infinité de points de E ; la longueur des segments σ_n tend vers zéro. Les deux premières propriétés découlent directement de la construction ; et pour démontrer la troisième, il suffit de noter que si la longueur de $[a,\ b]$ est égale à l, la longueur de σ_n est $\frac{l}{2^n}$.

10. Bernard Bolzano (1781-1848), mathématicien tchèque. Karl Weierstrass (1815-1897), mathématicien allemand.

En vertu du principe de Cantor (p. 21), il existe un point unique x appartenant à tous les segments emboîtés σ_n. Montrons que ce point x est un point d'accumulation de E. Pour cela, il suffit d'établir que si δ est un voisinage quelconque, c'est-à-dire un intervalle ouvert quelconque, aussi petit que l'on veut, contenant x, il contient aussi une infinité de points de E[11]. Puisque la longueur des segments fermés σ_n tend vers zéro, pour n assez grand le segment σ_n sera entièrement contenu dans l'intervalle ouvert δ. Mais par hypothèse σ_n contient une infinité de points de E. Donc δ aussi contient une infinité de points de E. On en conclut que le point x est bien un point d'accumulation de l'ensemble E, cqfd.

Exercice : montrer que si l'ensemble de points E est borné supérieurement et n'a pas de point plus à droite que les autres, alors sa borne supérieure est un point d'accumulation de E (et en outre n'appartient pas à E).

Ensembles ouverts et fermés. L'une des tâches principales de la théorie des ensembles de points est l'étude des propriétés des divers types d'ensembles de points. Nous allons présenter au lecteur et à la lectrice cette théorie à travers deux exemples. Nous allons étudier les propriétés des ensembles appelés fermés et des ensembles appelés ouverts[12].

Un ensemble est appelé un *fermé* s'il contient tous ses points d'accumulation. Si un ensemble n'a aucun point d'accumulation, on dit encore que c'est un fermé. Outre ses points d'accumulation, un fermé contient aussi bien sûr (par définition) ses points isolés.

Un ensemble est appelé un *ouvert* si tous ses points sont des points internes (appelé aussi intérieurs). C'est-à-dire qu'au-

11. Rappel : sur la droite des réels, un « voisinage » de x est par définition un intervalle ouvert contenant x. Et un point x est un point d'accumulation de E si dans n'importe quel voisinage de x il y a un point de E autre que x (dans le cas où x est lui-même un point de E).

12. Note : le texte russe utilise le terme segment seulement pour l'ensemble *fermé* $a \leq x \leq b$, et le terme intervalle seulement pour l'ensemble *ouvert* $a < x < b$, alors qu'en français les deux termes sont synonymes. C'est pourquoi nous avons déjà commencé à utiliser les mots ouvert et fermé avant ce paragraphe, par exemple pp. 27-28.

tour de chaque point x d'un ouvert E, tous les points à une distance de x inférieure à un certain ϵ, éventuellement très petit, mais non nul, appartiennent aussi à l'ensemble E.

Voyons des exemples d'ensembles fermés et d'ensembles ouverts. N'importe quel segment $[a,\ b]$ est un ensemble fermé. Et n'importe quel intervalle $(a,\ b)$ est un ensemble ouvert. (Les termes ouvert et fermé sont utilisés aussi bien comme adjectifs que comme substantifs.)

Les ensembles $(-\infty,\ b]$ et $[a,\infty)$ sont fermés, et les ensembles $(-\infty,\ b)$ et (a,∞) sont ouverts. Contrairement à la porte d'Alfred de Musset, la droite entière est à la fois ouverte et fermée. Il est commode de considérer aussi l'ensemble vide à la fois comme ouvert et fermé. N'importe quel ensemble fini de points sur la droite est fermé, puisqu'il n'a pas de point limite. L'ensemble des points

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

est fermé ; cet ensemble a en effet un seul point limite $x = 0$ et celui-ci appartient à l'ensemble.

Notre problème est de comprendre en quoi consistent d'une manière générale les fermés et les ouverts, quelles sont leurs propriétés les plus importantes. Pour cela nous avons besoin d'un certain nombre de faits auxiliaires que nous allons accepter sans démonstrations.

1. L'intersection d'un nombre quelconque (fini ou infini) de fermés est un fermé.
2. La réunion d'un nombre quelconque (fini ou infini) d'ouverts est un ouvert.
3. Si un fermé est borné supérieurement, il contient sa borne supérieure. De même, si un fermé est borné inférieurement, il contient sa borne inférieure.

Soit E un ensemble quelconque de points sur la droite. On appelle *complémentaire* de E sur la droite, et on le note CE, l'ensemble des points de la droite qui n'appartiennent pas à E. Il est clair que si x est un point externe de E alors c'est un point interne de CE, et vice versa.

4. Si l'ensemble F est fermé, alors l'ensemble CF est ouvert, et vice versa.

Cette quatrième proposition montre qu'il y a un lien étroit entre les ouverts et les fermés : ils sont complémentaires les uns des autres. Pour cette raison, il suffit d'étudier seulement les ensembles fermés, ou seulement les ensembles ouverts. Quand on connaît les propriétés de l'un des types, on connaît immédiatement les propriétés de l'autre type. Ainsi, n'importe quel ensemble ouvert est obtenu en enlevant un ensemble fermé de la droite.

Étudions par exemple les ensembles fermés. Commençons par une définition. Soit F un ensemble fermé. Un intervalle ouvert $(a,\ b)$ ayant la propriété qu'aucun de ses points n'appartient à F, et que les points a et b appartiennent à F, est appelé un *intervalle ouvert adjacent* à F. Dans les intervalles ouverts adjacents à F, nous allons aussi compter les intervalles impropres – qu'on peut aussi appeler des demi-droites ouvertes – $(a,\ \infty)$ et $(-\infty,\ b)$, si a et b appartiennent à F, mais ces intervalles eux-mêmes n'ont aucune intersection avec F. Montrons que si x n'appartient pas à l'ensemble fermé F, alors il appartient à un intervalle ouvert adjacent à F.

Dénotons par F_x la partie de F se trouvant à droite de x. Puisque le point x lui-même n'appartient pas à F, on peut représenter F_x comme l'intersection suivante

$$F_x = F \cdot [x,\ \infty)$$

Chacun des deux ensembles F et $[x,\ \infty)$ est fermé. Donc, en vertu de la première des quatre propositions ci-dessus, l'ensemble F_x est fermé. Si l'ensemble F_x est vide, alors cela veut dire que l'entièreté de la demi-droite fermée $[x,\ \infty)$ est en dehors de l'ensemble F. Maintenant, supposons que F_x ne soit pas vide. Puisque cet ensemble est entièrement situé dans la demi-droite $[x,\ \infty)$, il est borné inférieurement. Dénotons sa borne inférieure par b.

D'après la troisième proposition ci-dessus, $b \in F_x$, mais cela veut dire que $b \in F$. De plus, puisque b est la borne inférieure de l'ensemble F_x, l'intervalle semi-ouvert $[x,\ b)$, qui se situe à la gauche de b, ne contient pas de points appartenant à F_x, et, par conséquent, ne contient pas de points appartenant à F. Ainsi, nous avons construit un semi-ouvert $[x,\ b)$ qui ne contient par de points de F, et ce que b soit à l'infini ou que b soit un point dans F.

On construit de même un semi-ouvert $(a,\ x]$, ne contenant pas de points de F, que a soit à moins l'infini ou que $a \in F$.

Maintenant, il est clair que l'intervalle ouvert $(a,\ b)$ contient le point x et est un intervalle adjacent à l'ensemble F. Il est facile de voir que si $(a_1,\ b_1)$ et $(a_2,\ b_2)$ sont deux intervalles adjacents à F, alors ces intervalles soit coïncident soit n'ont pas d'intersection.

De ce qu'on vient de dire il découle que n'importe quel ensemble fermé sur la ligne droite est obtenu en retirant de la droite un certain nombre d'intervalles ouverts : ceux adjacents à l'ensemble F. Puisque chaque intervalle ouvert contient au moins un point rationnel, et que les rationnels sont dénombrables, il est facile de vérifier que le nombre de ces intervalles est lui-même au plus dénombrable. Nous pouvons ainsi conclure :

Sur la droite des réels, n'importe quel ensemble fermé s'obtient en retirant de la droite un certain nombre d'intervalles ouverts disjoints. Et ce nombre d'intervalles retirés est au maximum dénombrable.

En vertu de la quatrième proposition, en haut de la page précédente, on en déduit immédiatement la proposition « miroir » suivante sur les ouverts :

Sur la droite des réels, n'importe quel ensemble ouvert est la réunion d'un certain nombre d'intervalles ouverts disjoints. Et leur nombre est au maximum dénombrable.

Il découle aussi clairement des propositions 1 et 2 que n'importe quel ensemble, construit comme on vient de le faire, est effectivement fermé (resp. ouvert).

Comme on va le voir dans l'exemple qui suit, les ensembles fermés peuvent avoir des structures très compliquées.

Ensemble parfait de Cantor. Nous allons construire un ensemble fermé spécial qui a un certain nombre de propriétés remarquables. Tout d'abord, nous retirons de la droite des réels les deux demi-droites ouvertes $(-\infty,\ 0)$ et $(1,\ \infty)$. Après cette première opération, nous restons avec le segment fermé $[0,\ 1]$. Ensuite, nous retirons l'intervalle ouvert $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, consistant en son tiers médian. Nous restons alors avec les deux segments $\left[0,\ \frac{1}{3}\right]$ et $\left[\frac{2}{3},\ 1\right]$. De nouveau nous retirons à chacun son tiers médian (ouvert). Nous avons maintenant quatre segments fermés séparés, c'est-à-dire sans intersection, chacun de longueur un neuvième.

Nous continuons indéfiniment ce processus consistant à retirer le tiers médian ouvert de chaque segment de la collection à laquelle on est arrivé à l'étape précédente. Cela ne conduit pas à l'ensemble vide, mais à un ensemble très particulier qui porte le nom d'*ensemble parfait de Cantor* ; nous allons le désigner par la lettre P.

Examinons quelques-unes des propriétés de cet ensemble. L'ensemble P est fermé, puisqu'il est construit en retirant de la ligne droite une certaine collection d'intervalles ouverts disjoints. L'ensemble P n'est pas vide ; en tous cas, il contient toutes les extrémités des intervalles qu'on a retirés.

Un ensemble fermé est dit *parfait* s'il ne contient aucun point isolé, c'est-à-dire si tous ses points sont des points d'accumulation. Montrons que l'ensemble P est parfait. En effet, si un point x était un point isolé de l'ensemble P, il serait l'extrémité de deux intervalles ouverts adjacents à P. Mais dû à la façon dont P est construit, les intervalles adjacents à P n'ont pas d'extrémités en commun.

L'ensemble P ne contient aucun intervalle ouvert. En effet, supposons qu'un certain intervalle ouvert δ soit inclus dans P. Alors il appartiendrait à l'un des segments fermés obtenus à l'étape n de construction de l'ensemble P. Mais c'est impossible, puisque quand $n \to \infty$ les longueurs de ces segments fermés tendent vers zéro.

On peut montrer que l'ensemble P a la cardinalité du continu. Cela implique en particulier que cet ensemble parfait de Cantor contient d'autres points en plus des bornes des intervalles ouverts qu'on a retirés les uns après les autres. En effet ces bornes, ou extrémités, forment un ensemble dénombrable.

On rencontre constamment toutes sortes d'ensembles de points dans les diverses branches des mathématiques ; et connaître leurs propriétés est absolument essentiel dans l'étude de nombreux problèmes mathématiques. La théorie des ensembles de points est tout particulièrement importante en analyse infinitésimale et en topologie.

Voici à quoi ressemblent quelques ensembles de points dans les branches classiques de l'analyse. Soit $f(x)$ une fonction continue définie sur le segment $[a,\ b]$. On fixe un nombre α, et on regarde l'ensemble des points x tels que $f(x) \geq \alpha$. Il n'est pas difficile de montrer que cet ensemble peut être n'importe quel ensemble fermé contenu dans le segment $[a,\ b]$. Exactement de la même façon, l'ensemble des points x défini par $f(x) > \alpha$ peut être n'importe quel ouvert $G \subset [a,\ b]$. Si $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... est une suite de fonctions continues, définies sur le segment $[a,\ b]$, alors l'ensemble des points x où cette suite converge ne peut pas être arbitraire, mais seulement d'un certain type bien défini.

La discipline mathématique consistant en l'étude de la structure des ensembles de points s'appelle la *théorie descriptive des ensembles*. Les mathématiciens soviétiques ont fait de grandes contributions au développement de la théorie descriptive des ensembles – en particulier l'École de Moscou, sous la houlette de N. N. Louzine, qui compta parmi ses élèves P. S. Alexandrov, M. Ya. Sousline, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrentiev, P. S. Novikov, L. V. Keldych, A. A. Liapounov et d'autres [13] [14].

---

13. Nikolaï Louzine (1883-1950), Pavel Alexandrov (1896-1982), Mikhaïl Sousline (1894-1919), Andreï Kolmogorov (1903-1987), Mikhaïl Lavrentiev (1900-1980), Piotr Novikov (1901-1975), Lioudmila Keldych (1904-1976), Alexeï Liapounov (1911-1973).

14. L'École française, qui comprend Émile Borel (1871-1956), René Baire (1874-1932), Henri Lebesgue (1875-1941), Pierre Fatou (1878-1929) et d'autres, fit aussi des contributions très importantes.

Les recherches de N. N. Louzine et ses disciples ont montré les profondes connexions entre la théorie descriptive des ensembles et la logique mathématique. Les difficultés auxquelles on se heurte dans l'étude d'un grand nombre de problèmes de théorie descriptive des ensembles (en particulier, la détermination de la cardinalité de certains ensembles) appartiennent à la logique mathématique. Un exemple est l'« Hypothèse du continu » présentée p. 26. À l'inverse, les méthodes de la logique mathématique éclairent certaines questions de la théorie descriptive des ensembles.

XV.5 Mesure d'un ensemble

La notion de mesure d'un ensemble est une généralisation de la notion de longueur d'un segment. Dans le cas le plus simple (qui seul va nous occuper ici), la question est de donner un sens non plus seulement à la longueur d'un segment ou d'un intervalle mais à la longueur, ou si l'on préfère la *mesure*, d'ensembles plus complexes de points sur la droite.

On va prendre pour unité la mesure du segment $[0,\ 1]$. Clairement pour la longueur d'un segment $[a,\ b]$ on voudra qu'elle soit égale à $b - a$. De même, si on a deux segments disjoints $[a_1,\ b_1]$ et $[a_2,\ b_2]$, alors par longueur de l'ensemble E consistant en la réunion de ces deux segments il est naturel d'entendre le nombre $(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2)$. Cependant c'est loin d'être clair ce qu'on veut dire par longueur d'un ensemble plus compliqué sur la droite ; par exemple, quelle est la longueur de l'ensemble de Cantor présenté section XV.4 ? D'où la conclusion : *la notion de longueur d'un ensemble de points sur la droite demande une définition mathématique rigoureuse.*

Le problème de la détermination de la longueur des ensembles, ou, comme l'on dit, le problème de la mesure des ensembles, est très important car il est essentiel pour généraliser le concept d'intégrale. Le concept de mesure d'un ensemble est aussi utilisé dans d'autres questions de la théorie des fonctions, ainsi qu'en théorie des probabilités, en topologie, en analyse fonctionnelle, etc.

Nous allons présenter la définition de la mesure d'un ensemble proposée par le mathématicien français H. Lebesgue (1875-1941) et qui sous-tend la définition de l'intégrale qu'il a proposée aussi et qui porte son nom.

Mesure d'un ensemble ouvert et d'un ensemble fermé. Nous commençons par définir la mesure d'un ouvert et d'un fermé quelconques. Comme on l'a déjà noté plus haut, section XV.4, un ouvert quelconque sur la droite est la réunion finie ou au plus dénombrable d'une collection d'intervalles ouverts tous disjoints entre eux.

La mesure d'un ensemble ouvert arbitraire est définie comme la somme des longueurs des intervalles qui le composent.

Ainsi, si

$$G = \sum (a_i,\ b_i)$$

et les intervalles $(a_i,\ b_i)$ sont tous mutuellement disjoints, alors la mesure de G est par définition égale à $\sum(b_i - a_i)$. Dénotant d'une manière générale la mesure d'un ensemble E par le symbole μE, on peut écrire

$$\mu G = \sum (b_i - a_i)$$

En particulier, la mesure d'un intervalle ouvert est égale à sa longueur

$$\mu(a,\ b) = b - a$$

N'importe quel fermé F, contenu dans un segment $[a,\ b]$ et tel que les bornes de $[a,\ b]$ appartiennent à F, s'obtient, comme on a vu, en retirant de $[a,\ b]$ un certain ensemble ouvert G. Alors on définit la *mesure de l'ensemble fermé* $F \subseteq [a,\ b]$, où $a \in F$ et $b \in F$, comme la différence entre la longueur de $[a,\ b]$ et la mesure de l'ensemble ouvert G, complément de F (par rapport à $[a,\ b]$).

Autrement dit, en notation symbolique,

$$\mu F = (b - a) - \mu G \tag{XV.2}$$

Il n'est pas difficile de voir que, d'après cette définition, la mesure d'un segment quelconque $[a,\ b]$ est égale à sa longueur comme on le voulait naturellement :

$$\mu[a,\ b] = b - a$$

Et la mesure d'un ensemble consistant en un nombre fini de points est égale à zéro. Plus loin, nous étendrons ce fait.

Maintenant que nous avons réglé la question de la mesure des ouverts et des fermés, passons à la définition de la mesure d'un ensemble quelconque, quand c'est possible.

Définition de la mesure d'un ensemble quelconque. Afin de définir la mesure d'ensembles de nature plus générale que simplement les ouverts et les fermés, nous avons besoin d'un concept auxiliaire. Soit E un ensemble quelconque contenu dans le segment $[a,\ b]$. Un ensemble ouvert, dans lequel est entièrement contenu E, est appelé un *recouvrement* de E. Considérons tous les recouvrements possibles de E, et dénotons leur collection (ou ensemble – ça veut dire la même chose) par $V(E)$. La mesure de chaque recouvrement dans $V(E)$ est déjà définie, puisqu'on vient de définir la mesure de n'importe quel ouvert. Les mesures de tous les recouvrements de E forment un certain ensemble de nombres réels positifs. Cet ensemble est borné inférieurement (ne serait-ce que par zéro), et a donc une borne inférieure positive ou nulle, que nous dénotons par $\mu_e E$. Le nombre réel $\mu_e E$ s'appelle la *mesure extérieure* de E.

Soit $\mu_e E$ la mesure extérieure de E, et $\mu_e CE$ la mesure extérieure du complément de E au sein du segment $[a,\ b]$. (On pourrait écrire $\mu_{e,ab} E$ pour être plus spécifique, mais comme ici $[a,\ b]$ est fixe, ce n'est pas nécessaire. Et la lectrice et le lecteur pourront montrer que la notion de mesure de E à laquelle on va arriver ne dépend pas de $[a,\ b]$.)

Si la relation suivante est vérifiée

$$\mu_e E + \mu_e CE = b - a \qquad \text{(XV.3)}$$

on dit que E est un *ensemble mesurable*, et le nombre $\mu_e E$ est appelé sa *mesure*. On la dénote simplement par μE, autrement dit $\mu E = \mu_e E$.

Si la relation (XV.3) n'est pas vérifiée, on dit que l'ensemble est *non mesurable*. Les ensembles non mesurables n'ont pas de mesure.

Observons que l'on a toujours

$$\mu_e E + \mu_e CE \ \geq \ b - a \tag{XV.4}$$

Clarifions tout ce qu'on vient d'exposer avec des commentaires et des illustrations. La longueur des ensembles les plus simples (par exemple les intervalles ouverts et les segments fermés) a un certain nombre de propriétés remarquables. Listons les plus importantes.

1. Si les ensembles E_1 et E sont tous deux mesurables et $E_1 \subseteq E$, alors
$$\mu E_1 \leq \mu E$$
c'est-à-dire que la mesure d'une partie de E ne peut pas excéder celle de E lui-même.

2. Si E_1 et E_2 sont deux ensembles mesurables, alors leur réunion $E = E_1 + E_2$ est mesurable est
$$\mu(E_1 + E_2) \ \leq \ \mu E_1 + \mu E_2$$
c'est-à-dire que la mesure de leur somme n'excède pas la somme de leurs mesures.

3. Si les ensembles E_i $(i = 1,\ 2,\ ...)$ sont mesurables et mutuellement disjoints, c'est-à-dire $E_i E_j = \varnothing$ $(\forall\, i \neq j)$, alors leur somme (= réunion) $E = \sum E_i$ est mesurable et
$$\mu\left(\sum E_i\right) = \sum \mu E_i$$
c'est-à-dire que la mesure de la somme d'un nombre fini ou dénombrable d'ensembles tous disjoints entre eux est égale à la somme des mesures de chaque ensemble. Cette propriété porte le nom d'*additivité complète.* On dit aussi que la mesure est *sigma additive.* Les deux termes veulent dire la même chose.

4. La mesure d'un ensemble E ne change pas si on le translate sur la droite des réels comme un corps rigide.

On aimerait que les propriétés basiques de la longueur soient préservées dans le concept plus général de mesure d'un ensemble. Mais, comme on peut le montrer rigoureusement, cela s'avère impossible si on veut assigner une mesure à n'importe quel ensemble de points sur la droite. C'est pourquoi, dans la définition ci-dessus, certains ensembles ont une mesure, c'est-à-dire sont mesurables, et d'autres n'ont pas de mesure, autrement dit sont non mesurables. Toutefois, la classe des ensembles mesurables est tellement vaste que cette limitation ne cause pas vraiment d'embarras. Ne serait-ce que la construction d'un exemple d'ensemble non mesurable présente certaines difficultés.

Voici quelques exemples d'ensembles mesurables.

EXEMPLE 1. *Mesure de l'ensemble parfait P de Cantor* (cf. p. 37). Lors de la construction de cet ensemble à partir du segment $[0,\ 1]$, la première étape a consisté à retirer en son milieu un intervalle adjacent de longueur $1/3$; il nous restait alors deux segments fermés chacun de longueur $1/3$; dans la seconde étape, nous avons retiré à chacun de ces deux segments son tiers médian ouvert de longueur $1/9$, retirant encore ainsi deux neuvièmes ; dans l'étape suivante, nous avons retiré quatre vingt-septièmes ($4/27$), etc. D'une manière générale, à l'étape n, à 2^{n-1} segments on retire leurs tiers médians qui ont chacun la longueur $1/3^n$. Quand on continue ainsi indéfiniment, on enlève une union dénombrable d'intervalles ouverts tous disjoints entre eux. Donc la somme des longueurs de tous les intervalles ouverts retirés est égale à

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ ... + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \ ...$$

On voit que c'est, avec la fraction $\frac{1}{3}$ en facteur, la somme d'une série géométrique construite avec le terme $\frac{2}{3}$. Cette série converge et sa somme S est donc égale à

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

Ainsi, la somme des longueurs de tous les intervalles ouverts adjacents qu'on a enlevés de $[0,\ 1]$ pour construire l'ensemble P de Cantor est égale à 1. Autrement dit, la mesure de l'ouvert G complémentaire de P au sein du segment fermé $[0,\ 1]$ est égale à 1. Par conséquent l'ensemble P lui-même a la mesure

$$\mu P = 1 - \mu G = 1 - 1 = 0$$

Comme le montre cet exemple, un ensemble peut avoir la cardinalité du continu et néanmoins être de mesure nulle. Nous avons en effet signalé plus haut que l'ensemble de Cantor a la cardinalité (ou « puissance ») du continu, mais nous ne l'avons pas démontré. La démonstration suit le schéma suivant : 1) on montre que l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathbb{N}$, noté $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, a la puissance du continu ; et 2) à l'aide de la représentation des nombres réels en système à base 3, on construit une bijection entre P et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

EXEMPLE 2. *Mesure de l'ensemble R des nombres rationnels dans le segment* $[0,\ 1]$. Montrons tout d'abord que sa mesure extérieure est nulle, c'est-à-dire $\mu_e R = 0$. Dans la section XV.2, on a montré que R était dénombrable. Et l'on s'appuie classiquement sur ce fait. Énumérons les éléments de R comme ceci

$$r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n,\ \ldots$$

Ensuite, donnons-nous un $\epsilon > 0$ et entourons chaque point r_n avec un intervalle ouvert δ_n de longueur $\frac{\epsilon}{2^n}$. La réunion des δ_n est l'ouvert $\delta = \sum \delta_n$. Il recouvre R. Les intervalles δ_n peuvent se chevaucher, mais peu importe, on utilise la propriété 2 page 42 (qui s'étend aussi aux réunions dénombrables) :

$$\mu(\delta) = \mu\left(\sum \delta_n\right) \ \leq\ \sum \mu(\delta_n) = \sum \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$$

Et puisqu'on peut prendre ϵ arbitrairement petit, la seule possibilité est $\mu_e R = 0$.

Ensuite, en vertu de la relation (XV.4), on a

$$\mu_e R + \mu_e CR \ \geq\ 1$$

d'où $\mu_e CR \geq 1$. Mais étant donné que CR est contenu dans le segment $[0,\ 1]$, on a aussi $\mu_e CR \leq 1$. Donc

$$\mu_e R + \mu_e CR = 1$$

Finalement, d'après la définition de la mesure d'un ensemble énoncée au bas de la page 41, on a

$$\mu R = 0, \quad \mu CR = 1 \tag{XV.5}$$

On démontre de la même façon que n'importe quel ensemble dénombrable de points sur la droite a une mesure nulle. Mais l'exemple de l'ensemble des rationnels entre 0 et 1 est particulièrement intéressant parce qu'il montre qu'un ensemble peut être de mesure nulle et néanmoins *dense* sur un segment, ou du reste en l'occurrence sur toute la droite.

Dans beaucoup de questions de la théorie des fonctions, les ensembles de mesure nulle ne jouent pas de rôle important et peuvent être négligés. Par exemple, une fonction $f(x)$ est intégrable au sens de Riemann si et seulement si elle est bornée et l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle. On pourrait citer un grand nombre d'autres exemples.

Fonctions mesurables. Passons à l'une des applications les plus brillantes de la notion de mesure d'un ensemble. Nous voulons parler de la description de la classe des fonctions avec lesquelles l'analyse mathématique et la théorie des fonctions en pratique travaillent. Introduisons d'abord une définition : si une suite de fonctions $\{f_n(x)\}$, données sur un certain domaine E sur la droite des réels, converge en chaque point de E, sauf peut-être en un ensemble N de mesure nulle, on dit que $\{f_n(x)\}$ converge *presque partout.* Alors la formulation précise de la question qui nous occupe est la suivante :

Quelles fonctions peuvent être obtenues à partir de fonctions continues en appliquant à plusieurs reprises l'opération de passage à la limite d'une suite de fonctions convergeant presque partout, et des opérations algébriques ?

Pour répondre à cette question, nous avons besoin d'introduire quelques nouveaux concepts.

Soit une fonction $f(x)$ définie sur un certain domaine E et α un nombre réel arbitraire. Nous dénotons par

$$E[f(x) > \alpha]$$

l'ensemble E des points satisfaisant $f(x) > \alpha$. Par exemple, si la fonction $f(x)$ est définie sur le segment $[0,\ 1]$ et sur ce segment $f(x) = x$, alors

- — si $\alpha < 0$, l'ensemble $E[f(x) > \alpha]$ est égal à $[0,\ 1]$;
- — si $0 \leq \alpha < 1$, il est égal à $(\alpha,\ 1]$;
- — si $\alpha \geq 1$, il est vide.

Une fonction $f(x)$ définie sur un domaine E est dite mesurable si l'ensemble E est lui-même mesurable et si pour n'importe quel réel α l'ensemble $E[f(x) > \alpha]$ est mesurable.

On peut montrer qu'une fonction continue sur un segment est toujours mesurable. Mais beaucoup de fonctions présentant des discontinuités font aussi partie des fonctions mesurables. C'est même le cas, pour prendre un exemple extrême, de la fonction de Dirichlet, considérée sur le segment $[0,\ 1]$, qui est égale à 1 en tous les points irrationnels et à 0 en tous les points rationnels.

Notons, sans les démontrer, les propriétés suivantes des fonctions mesurables :

1. Si $f(x)$ et $\phi(x)$ sont deux fonctions mesurables, définies sur un domaine E, alors les fonctions

$$f + \phi, \quad f - \phi, \quad f \cdot \phi \quad \text{et} \quad \frac{f}{\phi}$$

   sont aussi mesurables (la dernière, si $\phi \neq 0$).

   Cette propriété montre que les opérations algébriques sur les fonctions mesurables conduisent encore à des fonctions mesurables.

2. Si une suite de fonctions mesurables $\{f(x)\}$, définies sur un ensemble E, converge presque partout vers une fonction $f(x)$, cette fonction limite est elle-même mesurable.

> Ainsi, l'opération consistant à construire la limite d'une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout reste encore aussi dans la classe des fonctions mesurables.

Ces propriétés des fonctions mesurables ont été établies par Lebesgue. Une étude approfondie des fonctions mesurables a été conduite par les mathématiciens soviétiques Dimitri F. Egorov (1869-1931) et Nikolaï N. Louzine (1883-1950). En particulier, Louzine a montré que n'importe quelle fonction mesurable, définie sur un intervalle, peut être transformée en une fonction continue en modifiant ses valeurs sur un ensemble de mesure arbitrairement petite.

Ce résultat classique de Louzine et les propriétés des fonctions mesurables mentionnées ci-dessus permettent de montrer que les fonctions mesurables représentent bien la classe de fonctions dont nous parlions au début de cette partie (p. 45). Les fonctions mesurables ont aussi une grande importance en théorie de l'intégration. En effet le concept d'intégrale peut être généralisé de telle sorte que toute fonction mesurable bornée soit intégrable – ce qui est une condition moins stricte que celle imposée par l'intégrale de Riemann. Nous développons ce point dans la section suivante.

XV.6 Intégrale de Lebesgue

Nous arrivons au thème central de ce chapitre : la définition et la description des propriétés de l'intégrale de Lebesgue.

Un petit exemple monétaire va permettre de comprendre le principe de construction de cette intégrale. Supposons qu'il y ait sur la table une grande quantité de pièces de monnaie, des roubles et des kopecks de différentes dénominations, et que l'on veuille calculer la somme qu'elles font. Il y a deux façons de procéder. On peut les disposer en une longue rangée et les additionner l'une après l'autre, ajoutant la valeur de chaque nouvelle pièce au total provisoire auquel on est arrivé avec toutes les précédentes. Mais on peut aussi faire comme ceci : on commence par faire avec les pièces différentes piles, chacune du même type de pièce – la pile des 10 kopecks, la pile des 50 kopecks, la pile des 1 rouble, la pile des 2 roubles, etc. Puis on compte le nombre de pièces dans chaque pile, et on le multiplie par la valeur de la dénomination dans la pile. Enfin on additionne les sommes de chaque pile. La première méthode illustre de manière suggestive l'intégrale de Riemann, la seconde l'intégrale de Lebesgue.

Passant des pièces de monnaie aux fonctions, on peut dire que pour calculer l'intégrale de Riemann de la fonction $f(x)$ on divise le *domaine horizontal* d'intégration de la fonction (sur l'axe des abscisses, fig. XV.3a).

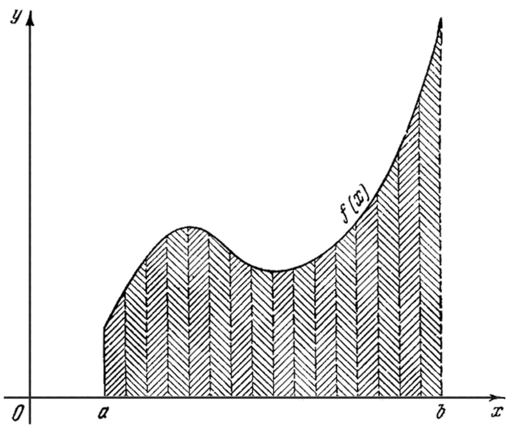


Figure XV.3a : Calcul de l'intégrale de Riemann de $f(x)$ entre a et b. On divise l'axe des abscisses en une fine partition sur laquelle on fait reposer des bandes verticales dont on approxime, comme l'on sait, la surface par des rectangles. Et on passe à la limite. (Cf. volume 1, chapitre II, section II.10, p. 228.)

Note : c'est la *définition* de l'intégrale de Riemann. Elle sert pour établir un certain nombre de théorèmes. Mais pour *calculer effectivement* l'intégrale de f entre a et b on passe par une primitive, après avoir appliqué éventuellement une des techniques d'intégration qu'on a apprises dans le vol. 1, par ex. l'intégration par partie.

Pour calculer l'intégrale de Lebesgue de $f(x)$, en revanche, on divise la *plage verticale* des valeurs (sur l'axe des ordonnées, fig. XV.3b) que prend la fonction f quand x varie dans le domaine horizontal.

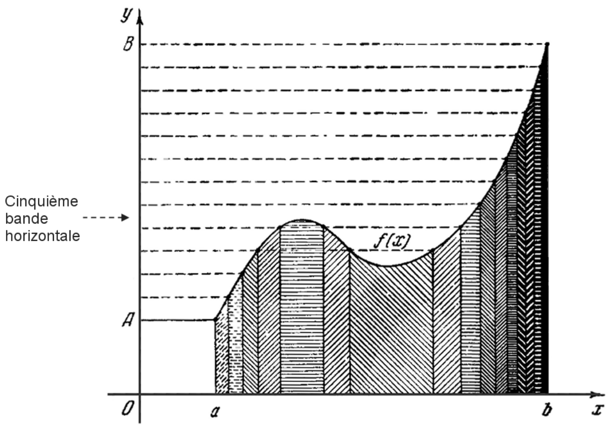


Figure XV.3b : Calcul de l'intégrale de Lebesgue de $f(x)$ entre a et b. On commence par diviser l'axe des ordonnées, entre A et B, en une fine partition. Puis l'on regarde les mesures des régions sous la courbe où la fonction est entre telle et telle valeur sur l'axe des ordonnées. Par exemple la fonction prend ses valeurs dans la cinquième bande horizontale dans deux régions verticales, la cinquième et la neuvième, hachurées horizontalement.

Ce deuxième principe était déjà appliqué, dans la pratique, longtemps avant Lebesgue pour calculer les intégrales de fonctions ayant un caractère oscillatoire, mais Lebesgue a été le premier à le développer dans toute sa généralité. Et il lui a donné une justification rigoureuse fondée sur la théorie de la mesure.

Regardons comment la mesure des ensembles et l'intégrale de Lebesgue sont liés. Soit E un ensemble mesurable quelconque contenu dans le segment $[a,\ b]$. Nous construisons la fonction $\phi(x)$ égale à 1 pour x dans E et à 0 pour x en dehors de E. Autrement dit, noté avec des symboles,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

La fonction $\phi(x)$ est habituellement appelée la fonction caractéristique de l'ensemble E. Considérons l'intégrale

$$I = \int_a^b \phi(x)\ dx$$

Nous avons déjà l'habitude de penser à cette intégrale comme à la surface de la figure D délimitée par l'axe des abscisses, les deux droites verticales $x = a$, $x = b$ et la courbe de la fonction $y = \phi(x)$ elle-même (voir vol. 1, chap. II, sect. II.10, p. 228). Étant donné, dans le cas de la fonction ϕ, que la « hauteur » de la figure D au-dessus de l'axe des abscisses est égale à 1 pour les points $x \in E$, et seulement pour ces points, et que d'une manière générale la surface d'un rectangle ou d'une somme de rectangles de même hauteur est égale à la longueur totale des rectangles multipliée par la hauteur, il s'ensuit que cette surface doit être numériquement égale à la longueur (mesure) de l'ensemble E. Ainsi I doit être égale à la mesure de l'ensemble E

$$I = \mu E \tag{XV.6}$$

C'est exactement comment Lebesgue définit l'intégrale de la fonction $\phi(x)$.

Le lecteur et la lectrice doivent bien comprendre que l'égalité (XV.6) est la *définition* de l'intégrale de Lebesgue de ϕ sur le segment $[a,\ b]$. Il peut arriver que l'intégrale I n'existe pas dans le sens qu'on lui avait donné jusqu'à présent. L'intégrale que l'on a construite dans le deuxième chapitre, consacré à l'analyse, du volume 1, s'appelle l'intégrale de Riemann. C'était la limite de sommes de la forme $\sum_{i=1}^n f(\xi)\ \Delta x_i$ quand la partition sur l'axe des abscisses, entre a et b, devient de plus en plus fine (voir vol. 1, chap. II, p. 229). Il se peut que pour une fonction aussi simple que la fonction caractéristique

ϕ ci-dessus cette limite, c'est-à-dire l'intégrale de Riemann de ϕ entre a et b, n'existe pas. Mais l'intégrale de Lebesgue de ϕ existe et est égale à μE.

À titre d'exemple, calculons l'intégrale de la fonction de Dirichlet $\Phi(x)$, égale à 0 en les points rationnels du segment $[0,\ 1]$ et à 1 en les points irrationnels de ce segment. Puisqu'en vertu de (XV.5), la mesure de l'ensemble des points irrationnels de $[0,\ 1]$ est égale à 1, l'intégrale de Lebesgue

$$\int_0^1 \Phi(x)\ dx$$

vaut 1. Il n'est pas difficile, toutefois, de vérifier que l'intégrale de Riemann de cette fonction n'existe pas.

Une proposition auxiliaire. Prenons maintenant pour $f(x)$ une fonction mesurable quelconque définie sur le segment $[a,\ b]$. Montrons qu'une telle fonction peut être représentée, avec le degré de précision qu'on veut, par une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles. Pour s'en convaincre, divisons le segment sur l'axe des ordonnées entre la limite inférieure A et la limite supérieure B des valeurs prises par la fonction f, quand la variable indépendante varie entre a et b, de la manière suivante. Nous prenons $n+1$ points $y_0 = A,\ y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n = B$ séparés de l'un de l'autre par une distance n'excédant pas ϵ, où ϵ est un nombre positif arbitrairement petit. En outre, si au point $x \in [a,\ b]$ on a

$$y_i \leq f(x) < y_{i+1} \quad (i = 0,\ 1,\ ..., n-1)$$

alors on pose pour ce point

$$\phi(x) = y_i$$

Et si au point x on a

$$f(x) = y_n = B$$

on pose

$$\phi(x) = y_n$$

La construction de la fonction $\phi(x)$ est montrée sur la figure XV.4 ci-contre.

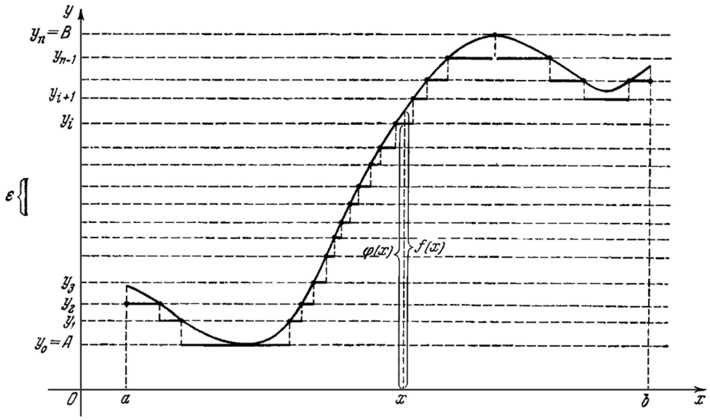


Figure XV.4 : Construction d'une approximation de l'intégrale de Lebesgue de $f(x)$ entre a et b à l'aide de fonctions caractéristiques.

Par sa construction même, en n'importe quel point du segment $[a,\ b]$, la fonction $\phi(x)$ satisfait

$$|f(x) - \phi(x)| < \epsilon$$

De plus, puisque la fonction $\phi(x)$ ne prend que les valeurs y_0, y_1, ..., y_n, qui sont en nombre fini, on peut l'écrire sous forme de la combinaison linéaire

$$\phi(x) = y_0 \cdot \phi_0(x) + y_1 \cdot \phi_1(x) + ... + y_n \cdot \phi_n(x) \qquad \text{(XV.7)}$$

où $\phi_i(x)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble défini par $\phi(x) = y_i$, c'est-à-dire $y_i \leq f(x) < y_{i+1}$ (en chaque point $x \in [a,\ b]$ seulement un terme du côté droit de (XV.7) est non nul !). Cela démontre notre proposition.

Définition de l'intégrale de Lebesgue. Nous arrivons à la définition de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable bornée quelconque. Puisque la fonction $\phi(x)$ diffère peu de la fonction $f(x)$, comme valeur approximative de l'intégrale de la fonction $f(x)$ on peut prendre celle de $\phi(x)$. Mais, notant que les fonctions $\phi_i(x)$ sont des fonctions caractéristiques d'ensembles, et utilisant les règles formelles ordinaires de calcul d'une intégrale, on obtient

$$\int_a^b \phi(x)\ dx = \int_a^b [\ y_0\phi_0(x) + y_1\phi_1(x) + ... + y_n\phi_n(x)\ ]\ dx =$$

$$= y_0 \int_a^b \phi_0(x)\ dx + y_1 \int_a^b \phi_1(x)\ dx + ... + y_n \int_a^b \phi_n(x)\ dx =$$

$$= y_0\mu e_0 + y_1\mu e_2 + ... + y_n\mu e_n$$

où μe_i est la mesure de l'ensemble e_i des x satisfaisant

$$y_i \leq f(x) < y_{i+1}$$

Ainsi, une valeur approximative de l'intégrale de Lebesgue de la fonction $f(x)$ est donnée par la « somme de Lebesgue »

$$S = y_0\mu e_0 + y_1\mu e_2 + ... + y_n\mu e_n$$

Pour être cohérent, l'intégrale de Lebesgue est naturellement définie comme la limite des sommes de Lebesgue S quand

$$\max |y_{i+1} - y_i| \ \rightarrow\ 0$$

ce qui correspond à la convergence uniforme des fonctions $\phi(x)$ vers la fonction $f(x)$.

On peut montrer que pour n'importe quelle fonction mesurable bornée les sommes de Lebesgue ont une limite. Autrement dit, n'importe quelle fonction mesurable bornée est *intégrable au sens de Lebesgue*.

L'intégrale de Lebesgue peut aussi être étendue à des fonctions mesurables non bornées, mais nous n'allons pas nous occuper de cela.

Propriétés de l'intégrale de Lebesgue. L'intégrale de Lebesgue a toutes les bonnes propriétés d'une intégrale ordinaire : l'intégrale d'une somme est égale à la somme des intégrales, un facteur multiplicatif devant l'intégrande peut être « sorti du signe somme » pour devenir un facteur devant l'intégrale, etc. Cependant l'intégrale de Lebesgue a des propriétés remarquables supplémentaires, que n'a pas l'intégrale ordinaire [15]. Citons-en une. Il s'agit d'une version simple du *théorème de convergence dominée de Lebesgue* :

Si une suite de fonctions mesurables $\{f_n(x)\}$ *sont bornées collectivement de la manière suivante :*

$$|f_n(x)| < K$$

pour n'importe index n *et n'importe quel point* x *sur le segment* $[a,\ b]$*, et si la suite* $\{f_n(x)\}$ *converge presque partout vers la fonction* $f(x)$*, alors*

$$\int_a^b f_n(x)\ dx \ \rightarrow \ \int_a^b f(x)\ dx$$

Autrement dit, l'intégrale de Lebesgue permet de passer à la limite sans encombre sous le signe somme, alors qu'une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann pouvaient converger vers une fonction qui ne l'était pas.

Insistons sur le fait que l'intégrale de Lebesgue n'est pas une « autre intégrale ». Quand l'intégrale au sens de Riemann de la fonction $f(x)$ entre a et b existe, l'intégrale au sens de Lebesgue existe aussi et a la même valeur. Mais la fonction $f(x)$ peut ne pas être intégrable au sens de Riemann et l'être

15. Par « intégrale ordinaire » on entend l'intégrale de Riemann, qui n'est elle-même que la formalisation la plus simple du concept intuitif de surface sous une courbe qu'utilisaient les mathématiciens des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles. L'intégrale de Lebesgue est aussi une formalisation du concept de surface, mais – s'appuyant sur celui de mesure d'un ensemble sur la droite des réels – elle s'avère être un outil mathématique plus flexible, puissant et général.

Le lecteur et la lectrice ne doivent pas perdre de vue que les mathématiques sont une *boîte à outils* pour représenter et agir sur la réalité. En pratique, dans la plupart des cas, les intégrales restent calculées soit comme on l'a appris dans le vol. 1 chap. II, à l'aide de primitives, soit comme on l'a appris dans le vol. 2, en particulier chap. XII et XIII, à l'aide de méthodes d'approximations aussi précises que l'on veut.

néanmoins au sens de Lebesgue. Bref, l'intégrale de Lebesgue est une généralisation à une classe plus vaste de fonctions.

C'est cette propriété de l'intégrale de Lebesgue qui en fait un outil très commode et souvent nécessaire dans de nombreux travaux. En particulier l'intégrale de Lebesgue est absolument indispensable dans la théorie des séries trigonométriques, dans la théorie des espaces fonctionnels (voir chap. XIX) et dans d'autres branches des mathématiques.

Prenons un exemple. Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π, et

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

sa série de Fourier. Si, par exemple, la fonction $f(x)$ est continue, alors, comme il est facile de le montrer, on a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\ dx \ = \ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \qquad \text{(XV.8)}$$

Cette formule porte le nom d'*identité de Parseval* [16]. Considérons la question suivante : pour quelle classe de fonctions périodiques l'identité de Parseval reste vraie ? La réponse est : l'identité de Parseval (XV.8) est valide si et seulement si la fonction $f(x)$ est mesurable sur $[0,\ 2\pi]$ et la fonction $f^2(x)$ est Lebesgue-intégrable sur ce segment.

Suggestions de lecture

Dixmier Jacques, *Cours de mathématiques du premier cycle*, Dunod, 2001.

Hausdorff Félix, *Set Theory*, Chelsea, 1957.

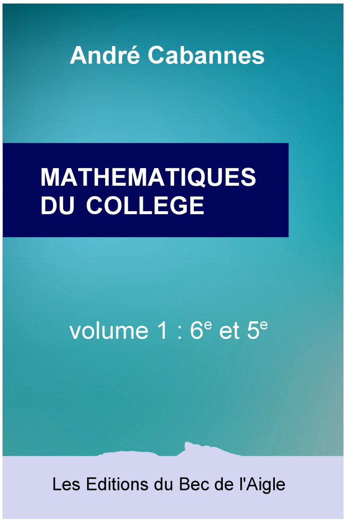
Lebesgue Henri
- *Sur la mesure des grandeurs*, Kundig, 1915.
- *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, 1904.

16. Marc-Antoine Parseval (1755-1836), mathématicien français.

TABLE DES MATIÈRES GÉNÉRALE

Catalogue des

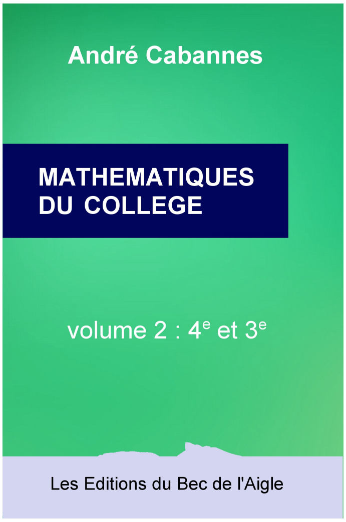
ÉDITIONS DU BEC DE L'AIGLE



www.amazon.fr/dp/2957239159
Cours de mathématiques du collège.

Volume 1 : 6e et 5e.

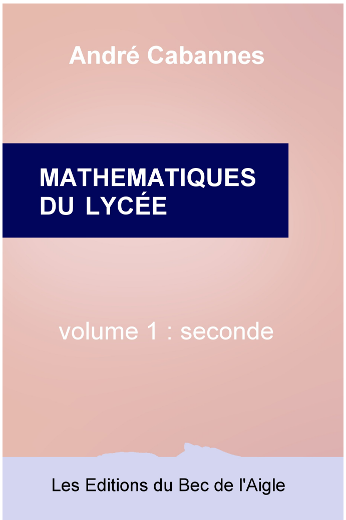
à l'intention des collégiens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2957239167
Cours de mathématiques du collège.

Volume 2 : 4e et 3e.

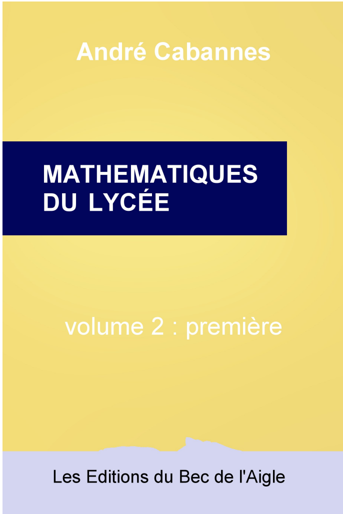
à l'intention des collégiens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2957239183

Cours de mathématiques de seconde

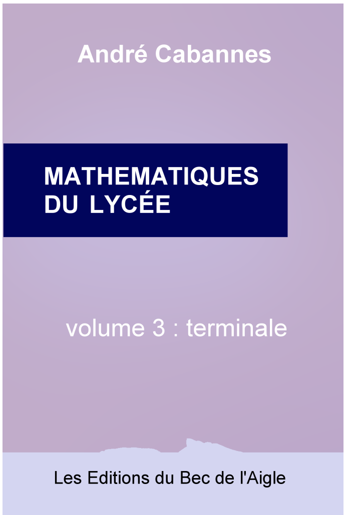
à l'intention des lycéens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2957239191

Cours de mathématiques de première

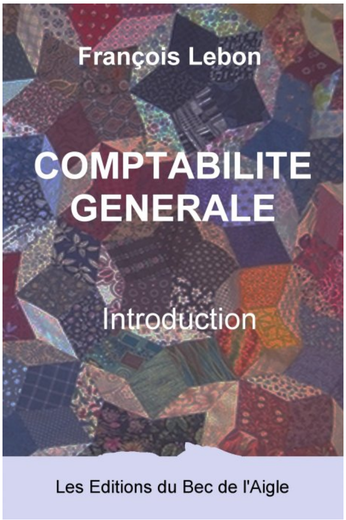
à l'intention des lycéens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2958738507

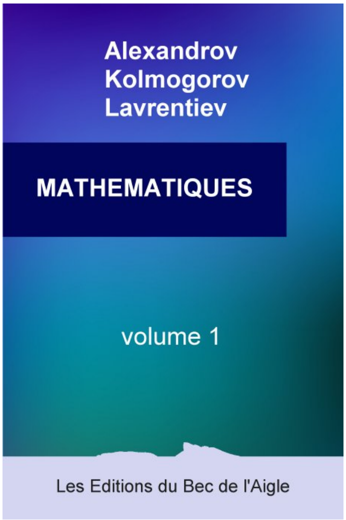
Cours de mathématiques de terminale

à l'intention des lycéens et de leurs parents



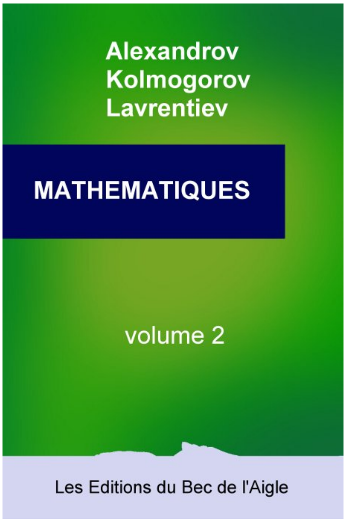
www.amazon.fr/dp/2957239140

Cours de comptabilité (niveau baccalauréat)



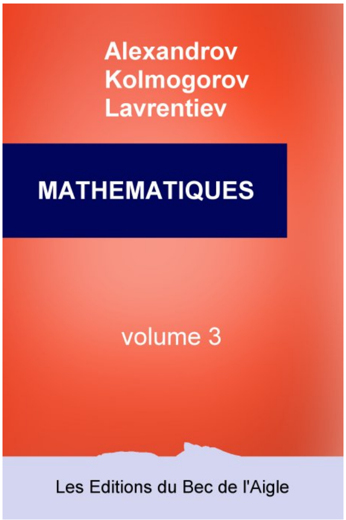
www.amazon.fr/dp/2957239124

Introduction aux mathématiques (niveau baccalauréat)

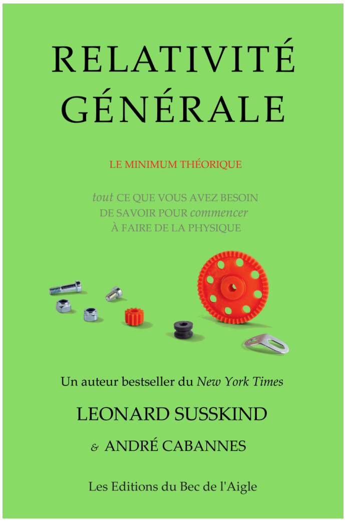


www.amazon.fr/dp/2957239116

Les mathématiques pour l'utilisateur (niveau première année d'université)

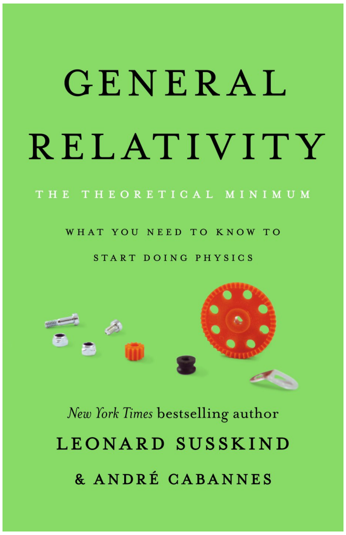


www.amazon.fr/dp/2957239132
Les mathématiques pour l'étudiant spécialisé et le chercheur (niveau licence)



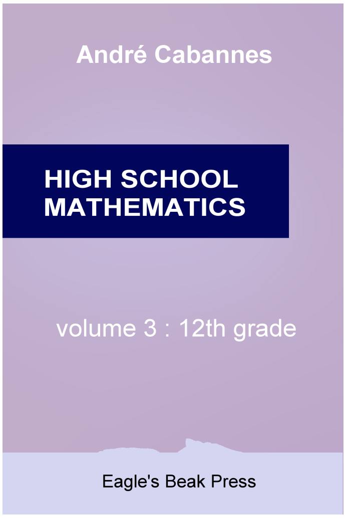
www.amazon.fr/dp/2957239175
Cours de physique
(niveau maîtrise)

English titles by André Cabannes



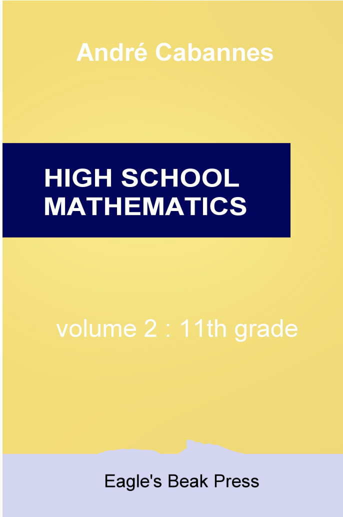
www.amazon.com/dp/B09ZB613QY
General Relativity

Graduate studies.



www.amazon.com/dp/2958738515
High school mathematics

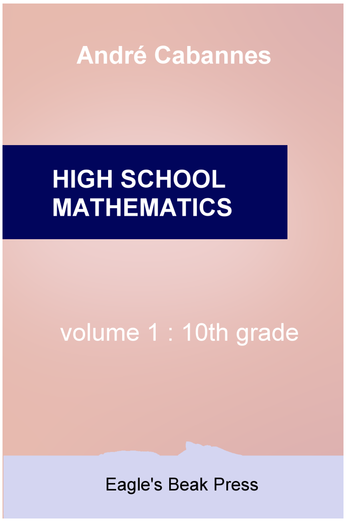
Volume 3 : 12th grade



www.amazon.com/dp/2958738523

High school mathematics

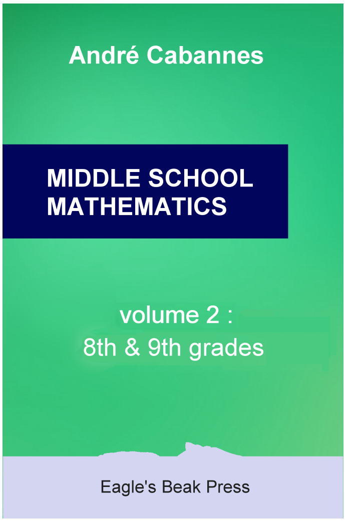
Volume 2 : 11th grade



www.amazon.com/dp/2958738531

High school mathematics

Volume 1 : 10th grade

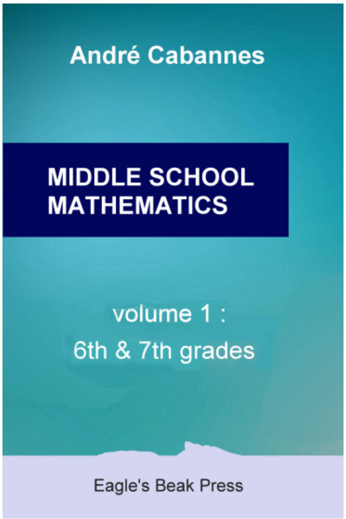


www.amazon.com/dp/295873854X

Middle school mathematics

Volume 2 : 8th & 9th grades

for middle school students and their parents

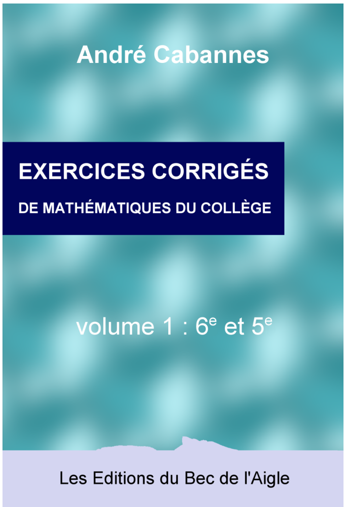


www.amazon.com/dp/2958738558

Middle school mathematics

Volume 1 : 6th & 7th grades

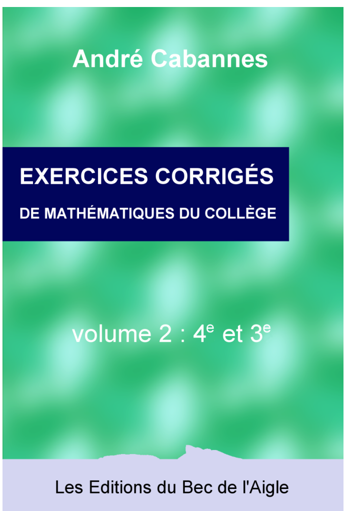
for middle school students and their parents



www.amazon.fr/dp/2958738566

Maths du collège volume 1

Le livre de CORRIGÉS
des exercices



www.amazon.fr/dp/2958738574

Maths du collège volume 2

Le livre de CORRIGÉS
des exercices