I.18 Les pourcentages

I.18.1 Introduction

Les pourcentages sont une manière commode de noter les fractions, car ils sont très parlants.

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{8} &= \frac{5 \times 125}{8 \times 125} && (1)\\
&= \frac{625}{1000} && (2)\\
&= \frac{62 + \frac{5}{10}}{100} && (3)\\
&= \frac{62,5}{100} && (4)\\
&= 62,5\%
\end{aligned}
$$

Le signe % signifie « divisé par 100 » [1].

I.18.2 Quelques pourcentages familiers

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} = 50\% \quad \text{car} \quad \frac{1}{2} = \frac{50}{100}\\
&\frac{3}{4} = 75\%\\
&1 = 100\%\\
&\frac{1}{3} \approx \frac{33}{100} = 33\%
\end{aligned}
$$

Le signe $\approx$ signifie « approximativement égal à ».

1. Les auteurs qui écrivent « $(3/4) \times 100 = 75\%$ », comme on le rencontre parfois, par exemple dans des manuels de comptabilité, soi-disant pour plus de clarté, font en fait une erreur. Le nombre qu'ils écrivent est alors égal à 75.

I.18.2 Exemples d'utilisation

Les résultats électoraux, dès qu'on est dans un groupe de plus de quelques personnes, sont donnés en pourcentage. Lors du second tour de l'élection présidentielle de 2022 en France, il y avait 48 752 339 personnes inscrites, et 32 057 325 ont mis dans l'urne un bulletin de vote pour l'un ou l'autre des candidats. On dit qu'il y a eu 65,76% de suffrages exprimés.

C'est d'ailleurs une fraction approximative, une valeur plus précise serait 65,75546047134272% mais personne n'écrit cela, car toute l'idée des pourcentages est d'être commode. Le candidat qui l'a emporté a obtenu 18 768 639 des 32 057 325 suffrages exprimés. Il a été élu avec 58,55%.

Quand, dans une classe de 6e comptant 32 élèves, on dit que 100% des élèves passent en 5e, on veut simplement dire que les 32 élèves, sans exception, passent en 5e.

Si 70% des 1200 élèves d'un collège ont choisi anglais première langue, ça veut dire que 840 élèves ont choisi cette langue en Sixième.

Les pourcentages servent aussi à exprimer des probabilités. Si j'ai 20 billes dans une urne, 14 rouges et 6 bleues, et que j'en tire une au hasard, j'ai $14/20 = 70\%$ de chance de tirer une bille rouge.

Quand La Française des Jeux invente le slogan « 100% des gagnants avaient acheté un ticket », elle énonce une évidence qui cherche à introduire de la confusion dans l'esprit des joueurs en leur parlant d'un gros pourcentage comme si c'était le pourcentage de gagnants parmi les joueurs. En réalité, au loto la probabilité de gagner un million d'euros avec un ticket à 2,20 euros est infime.

I.18.3 Pourcentages plus grands que 1

Les pourcentages peuvent être plus grands que 1. Considérons une usine faite pour produire 1200 voitures par jour. Si pendant quelques jours, avec des heures supplémentaires, elle produit 1350 voitures par jour, on dira qu'elle fonctionne à 112,5% de sa capacité normale. En effet on a

$$\frac{1350}{1200} = 1,125 = \frac{112,5}{100} = 112,5\%$$

I.18.4 Addition des pourcentages

Les pourcentages s'additionnent exactement comme les fractions de dénominateur 100 – dont ils ne sont qu'une notation commode.

$$\frac{68}{100} + \frac{15}{100} = \frac{83}{100}$$

Donc

$$68\% + 15\% = 83\%$$

I.18.5 Multiplication des pourcentages

Là encore, c'est comme pour les fractions. Regardons

$$25\% \times 30\%$$

Cela se lit « 25% de 30% ». On peut écrire

$$25\% \times 30\% = \frac{25}{100} \times \frac{30}{100} \tag{5}$$

$$= \frac{750}{10000} \tag{6}$$

$$= \frac{7,5}{100} \tag{7}$$

$$= 7,5\%$$

On trouve bien que un quart de 30% est égal à 7,5%.

I.18.6 Un petit piège à connaître

L'intuition suggère que si je prends un nombre n et que je lui ajoute 20% j'obtiens un nombre m qui devrait avoir la propriété suivante : si j'enlève 20% à m je devrais retomber sur n.

En fait ce n'est pas vrai. L'intuition se trompe. Voyons pourquoi à l'aide d'un exemple : prenons pour n le nombre

100, comme ça ce sera particulièrement simple. Alors le nombre m est 120. Maintenant j'enlève 20% à 120 ; je tombe sur combien ? Eh bien calculons 20% de 120. Ça fait 24. Donc 120 moins 20% donne 96 et non 100. Comment l'expliquer ?

La raison est simple. Quand je parle de 20% de 120, je cherche un nombre « qui est à 120 comme 20 est à 100 ». Mais je ne cherche pas un nombre qui est comme 20 à 120. Le nombre qui est à 120 « comme 20 est à 100 » – c'est-à-dire, qui est dans la même proportion – est 24. C'est plus grand que 20, car 120 est plus grand que 100. Si je cherchais un nombre qui est à 257 « comme 20 est à 100 », je trouverais 51,4.

Bref, quand on calcule un pourcentage d'un nombre, le résultat est une proportion du nombre.

Ainsi quand j'ai calculé d'abord 100 + 20% de 100 j'ai obtenu 120. Maintenant le nombre d'où je pars n'est plus 100 mais 120, qui est plus grand. Donc 20% de 120 est plus grand que 20% de 100. Voilà pourquoi 120 moins 20% de 120 repart en arrière plus loin que 100 !

Pour terminer : l'intuition est d'autant plus fausse que le pourcentage est plus grand.

Si le pourcentage est petit alors le nombre m restera proche de n, et l'opération inverse retombera tout près de n.

$$100 + 2\% \times 100 = 102$$

et

$$102 - 2\% \times 102 = 99,96$$

Il y a quand même une petite erreur. Mais on apprendra au lycée que 2 pour 100 est « un ordre de grandeur supérieur à l'erreur » qui est de 4 pour 10 000 [2].

Autre exemple :

$$103 - 3\% \times 103 = 99,91$$

2. On verra plus précisément que l'erreur est égale au carré du pourcentage. Ce n'est pas difficile à démontrer avec un peu d'algèbre.

Exercice I.18.1 : Calculer $35\% \times 100$ (on dit aussi trente-cinq pour cent de cent).

Exercice I.18.2 : Calculer $35\% \times 170$ (on dit aussi trente-cinq pour cent de cent-soixante-dix).

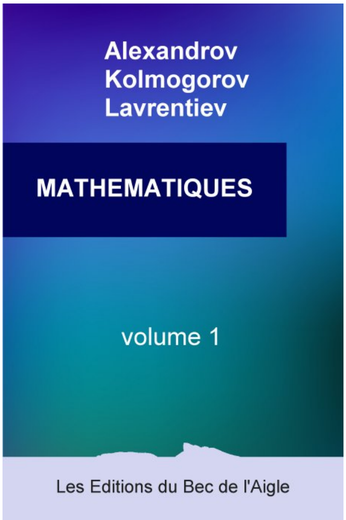
Exercice I.18.3 : Dans une assemblée de 240 personnes, il y a 75% de femmes, et 60% d'entre elles parlent anglais. Combien de femmes parlent anglais ?

Exercice I.18.4 : Vérifier le petit piège à connaître avec $n = 135$ et le pourcentage 28%. Quel est m ? Et quel est m moins 28% de m ? (On dit « m moins vingt-huit pour cent », sans préciser « de m ».)

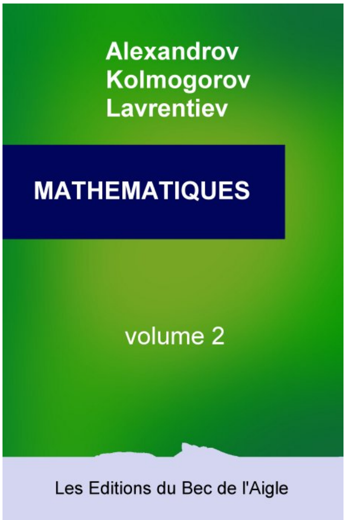
Exercice I.18.5 : Vérifier le petit piège à connaître avec $n = 135$ et le pourcentage 1%. Quel est m ? Et quel est m moins 1% de m ? (On dit « m moins un pour cent ».)

Catalogue des

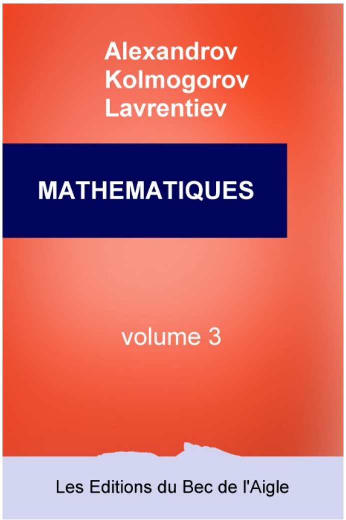
ÉDITIONS DU BEC DE L'AIGLE



www.amazon.fr/dp/2957239124
Introduction aux mathématiques (niveau baccalauréat)

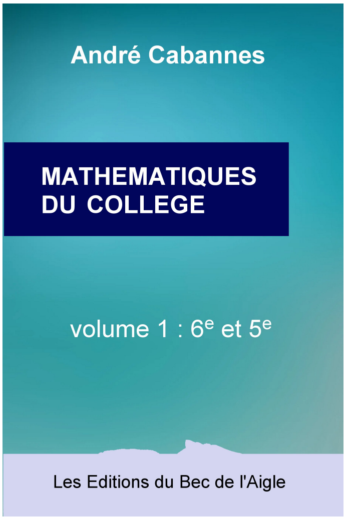


www.amazon.fr/dp/2957239116
Les mathématiques pour l'utilisateur (niveau première année d'université)



www.amazon.fr/dp/2957239132
Les mathématiques pour l'étudiant spécialisé et le chercheur (niveau licence)

www.amazon.fr/dp/2957239140
Cours de comptabilité (niveau baccalauréat)



www.amazon.fr/dp/2957239159
Mathématiques du collège.
Volume 1 : 6e et 5e.

À l'intention des collégiens et de leurs parents.