

Comment définit-on un point dans la théorie des topos

Un point géométrique dans l'approche ordinaire et dans l'approche de Grothendieck

Le point classique. Dans la géométrie ordinaire (et dans la théorie des ensembles telle qu'on l'a longtemps pratiquée), un point est une brique atomique : on part d'un ensemble de points, et tout objet géométrique — droite, courbe, surface — se définit après coup comme un sous-ensemble de points. Le point est premier ; les objets sont seconds. C'est une notion qu'on ne questionne pas, tant elle semble aller de soi.

Le renversement de Grothendieck. Il inverse cette hiérarchie. Au lieu de définir un espace comme un ensemble de points muni d'une structure, il définit un espace (un « schéma ») à partir des fonctions qu'on peut y faire vivre — un anneau. Le « point » n'est alors plus une donnée première : c'est un objet dérivé, reconstruit à partir de cette structure algébrique. Techniquement, un point d'un schéma correspond à un idéal premier de l'anneau associé — une notion beaucoup plus riche et plus abstraite qu'une simple position dans l'espace.

L'idée du « point généralisé ». Plus frappant encore : chez Grothendieck, on ne demande plus « quels sont les points de X ? » mais « de combien de façons peut-on envoyer un objet-test T vers X ? ». Chaque application (chaque morphisme) $T \rightarrow X$ devient un « point de X à valeurs dans T ». Un même espace X peut ainsi avoir des points à valeurs dans les nombres réels, d'autres à valeurs dans les nombres complexes, d'autres encore à valeurs dans des structures plus exotiques comportant des éléments « infinitésimaux » (nilpotents) — des points si l'on veut légèrement « épaissis », porteurs d'une direction ou d'une vitesse, invisibles pour un point classique.

L'analogie simple. On pourrait dire : au lieu de considérer un point comme un lieu qu'on désigne du doigt, Grothendieck le considère comme tout ce qu'on peut apprendre en l'interrogeant avec différents instruments de mesure. Change l'instrument (l'objet-test), et le point lui-même change de nature et révèle des aspects différents. Le point n'est plus une chose en soi ; il est défini par l'ensemble de ses relations possibles avec le reste des mathématiques — une idée très proche, en un sens, du principe de Yoneda en théorie des catégories : un objet est entièrement déterminé par la façon dont il communique avec tous les autres.

C'est cette bascule — du point comme donnée première et atomique au point comme notion reconstruite, relationnelle, à plusieurs niveaux — qui rend la remarque de Lafforgue si juste : il fallait un regard presque naïf, capable de s'arrêter sur une notion que tout le monde tenait pour acquise, pour voir qu'elle cachait en réalité une structure beaucoup plus riche.

Avant la théorie des topos, la théorie des catégories commence déjà à aborder ainsi les éléments d'un ensemble, cf. mon livre d'introduction à la théorie des catégories