RELATIVITÉ RESTREINTE

ET

THÉORIE CLASSIQUE DES CHAMPS

LE MINIMUM THÉORIQUE

LEONARD SUSSKIND ET ART FRIEDMAN

Traduit de l'anglais par André Cabannes

Table des matières

Leçon 1 : Transformation de Lorentz

La théorie de la relativité restreinte est avant tout une théorie des repères dans l'espace – ou plus exactement dans l'espace-temps. Le nom consacré pour un repère dans l'espace-temps est *référentiel*. Et nous allons étudier différents référentiels en mouvement les uns par rapport aux autres. Si nous affirmons qu'un phénomène du monde physique est vrai dans un référentiel, l'est-il encore dans un autre ? Est-ce qu'une observation faite par une personne immobile par rapport au sol reste valide pour une autre personne passant en avion ? Existe-t-il des quantités ou des affirmations qui soient invariantes – c'est-à-dire ne dépendent pas du référentiel de l'observateur ? Les réponses aux questions de ce genre s'avèrent intéressantes et surprenantes. En fait, elles ont déclenché une révolution en physique au début du XXᵉ siècle.

1.1 Référentiels

Vous connaissez déjà les repères dans l'espace. J'en ai parlé dans le *Volume 1* sur la mécanique classique. La plupart des gens sont familiers avec les coordonnées cartésiennes dans le plan ou dans l'espace. Un repère cartésien dans l'espace à trois dimensions est un système de coordonnées consistant en un point origine et trois axes perpendiculaires permettant de noter les trois coordonnées spatiales x, y et z de n'importe quel point. Si vous voulez y penser concrètement, imaginez une grande salle parallélépipédique, mettons une cafétéria. Vous êtes à la porte qui est dans le coin à gauche, et la pièce s'ouvre devant vous. Un repère possible est le suivant : l'origine est précisément le coin en bas à gauche à vos pieds, l'axe horizontal des x part le long du mur sur votre droite, l'autre axe horizontal perpendiculaire, celui des y, part devant vous le long des baies vitrées, et l'axe des z est vertical au dessus de l'origine. Alors n'importe quel point dans la salle est repéré par ses trois coordonnées. Par exemple, l'assiette qui vous attend sur la table avec vos amis peut être à $x = 5$ mètres, $y = 16$ mètres et $z = 0,8$ mètres. Pensez que vous avez à votre disposition des bâtons gradués de 1 mètre de long pour mesurer les distances le long des trois axes. Alors avec les trois nombres caractérisant la position de votre assiette, vous savez exactement où aller. Bien sûr on pourrait construire un autre repère avec une autre origine, d'autres axes et une autre unité. Mais ça ne changerait rien ni à la salle ni aux points dans celle-ci. Votre assiette resterait au même endroit, simplement ses coordonnées changeraient. Voilà ce qu'est un repère dans l'espace. Il nous permet de spécifier *où* quelque chose se trouve.

Afin de spécifier *quand* un événement a lieu nous avons besoin aussi d'une coordonnée temporelle. Un référentiel est un système de coordonnées pour l'espace et le temps – ce qu'on appelle l'*espace-temps*. Il consiste en trois axes dans l'espace définissant les trois coordonnées spatiales x, y et z et un axe dans le temps définissant la coordonnée temporelle t. Le référentiel comporte aussi une origine dans l'espace et le temps : le point $(0,\ 0,\ 0)$ dans l'espace *considéré à une certaine date notée* 0[1]. Nous pouvons étoffer notre exemple concret de repère dans notre cafétéria en imaginant qu'en chaque point de l'espace il y a une horloge, et qu'on les a toutes synchronisées. À chaque instant elles marquent toutes exactement la même heure. Voilà ce qu'est un référentiel dans l'espace-temps : un système de coordonnées x, y, z et t permettant de spécifier où et quand un événement a lieu.

En français courant le mot événement signifie "quelque chose de notable qui se passe ou s'est passé quelque part". Mais en théorie de la relativité c'est simplement le nom donné un point dans l'espace *à une date donnée*. En d'autres termes, un point a trois coordonnées spatiales $(x,\ y,\ z)$, et un événement a quatre coordonnées $(x,\ y,\ z,\ t)$. On parle aussi parfois pour un événement de point dans l'espace-temps.

Nous avons beaucoup de liberté dans la façon de repérer les points dans l'espace et le temps, c'est-à-dire de construire un référentiel dans l'espace-temps. Nous pouvons considérer différents référentiels. À partir de notre premier référentiel, nous pouvons en fabriquer un deuxième simplement en translatant l'origine $x = y = z = t = 0$ en un autre point, ce qui produira de nouvelles coordonnées des événements dans l'espace-temps. Noter encore une fois que

1. Nous appellerons les différentes valeurs possibles de t des dates, des temps ou des instants. La différence entre deux dates sera appelée un intervalle de temps ou une période.

ça ne déplace pas les événements eux-mêmes dans l'espace-temps. Nous pouvons aussi opérer une rotation des axes. Enfin – quelque chose de moins intuitif mais qui va ouvrir beaucoup de perspectives –, nous pouvons aussi considérer des repères en mouvement les uns par rapport aux autres. Nous pouvons parler de *votre* référentiel et de *mon* référentiel. Cela nous amène à un point important : en plus de ses axes et de son origine, à un référentiel peut être associé un *observateur*. Celui-ci utilisera les bâtons de 1 mètre et les horloges de *son référentiel* pour faire des mesures.

Nous avons tendance à considérer qu'il y a bien sûr un référentiel de base qui ne bouge pas dans l'espace, et que les autres bougent. Par exemple la cafétéria "évidemment" ne bougeait pas. Mais nous allons devoir abandonner cette idée qu'il y a un référentiel plus fondamental que les autres. En fait, pour chacun d'entre nous, il y a simplement *notre référentiel* et les autres référentiels. Si au lieu de la cafétéria, nous étions dans la voiture-restaurant d'un train, celle-ci serait alors le référentiel qui ne bouge pas pour nous, tout simplement car c'est le nôtre. C'est pourquoi je parlerai désormais de mon référentiel et de votre référentiel. Ce ne seront pas nécessairement les mêmes. Et en dépit des apparences il n'y en aura pas un plus fixe que l'autre.

Imaginez que vous soyez assis dans une salle de classe, sur un siège de la première rangée face à l'estrade. La salle est remplie d'horloges et de bâtons de 1 mètre permettant de mesurer la distance entre n'importe quelle paire de points. C'est *votre référentiel.* À tous les événements qui ont lieu dans la salle sont assignées une position et une date par vos bâtons de 1 mètre et vos horloges.

Je suis aussi dans la salle, sur l'estrade, mais au lieu de rester immobile par rapport aux murs de la salle je me déplace. Je peux aller et venir de gauche à droite et de droite à gauche devant vous. Je transporte avec moi mon propre référentiel avec ses bâtons de 1 mètre et ses horloges *au repos pour moi.*

À chaque instant, je suis au centre de mon propre système de coordonnées spatiales, et vous êtes au centre du vôtre. Clairement nos deux systèmes de coordonnées ne sont pas les mêmes. À un événement dans l'espace-temps – par exemple une ampoule qui s'allume quelque part, ou moi qui me gratte le nez à un moment précis – vous assignez certaines coordonnées x, y, z et t. Et au *même événement* j'assigne d'autres coordonnées x', y', z' et t'. C'est la conséquence du fait que je bouge par rapport à vous. En particulier si je me déplace le long de votre axe des x, et qu'il est aligné avec mon propre axe des x', vos coordonnées x et mes coordonnées x' des événements ne seront pas les mêmes. Par exemple je dirai toujours que mon nez est à la coordonnée $x' = 12,5$, signifiant qu'il est à 12,5 centimètres du centre de ma tête, tandis que vous ne direz pas que sa coordonnée est $x = 12,5$; vous direz que mon nez bouge et que sa coordonnée x change avec le temps.

Je peux me gratter le nez au temps $t' = 2$, signifiant que l'horloge qui se trouve au bout de mon nez, parmi les horloges de *mon système*, indique 2 secondes après le début de la leçon au moment où je fais cela. Vous pourriez être tenté de penser que l'horloge de votre système, devant laquelle passe mon nez quand je le gratte, marque aussi $t = 2$. Mais c'est précisément là que la théorie de la relativité restreinte s'éloigne de la physique newtonienne. L'hypothèse que toutes les horloges de tous les référentiels puissent être synchronisées semble intuitivement évidente. Pourtant elle est contradictoire avec l'hypothèse d'Einstein de la relativité du mouvement et de l'universalité de la vitesse de lumière avec la valeur $c = 3 \times 10^8$ mètres par seconde.

Nous allons bientôt examiner plus en détail comment, et à quelle condition, les horloges à différents endroits dans différents référentiels peuvent être synchronisées. Pour l'instant considérons qu'à n'importe quel instant toutes les horloges de votre système marquent le même temps t. Et considérons que cela est vrai aussi dans mon système, où toutes les horloges marquent le même temps t'. Enfin faisons l'hypothèse que $t = t'$. Cela veut dire que tous les événements – qui, rappelez-vous, sont intrinsèques et n'ont rien à voir avec les référentiels – sont repérés avec la même date dans les deux référentiels. En d'autres termes, nous suivons temporairement Newton et admettons qu'il existe un temps universel qui est exactement le même pour vous et pour moi, et qu'il n'y a pas d'ambiguïté résultant de notre mouvement l'un par rapport à l'autre.

1.2 Référentiels inertiels (ou galiléens)

Les lois de la physique seraient très difficiles à énoncer sans un système de coordonnées pour *repérer* les événements qui se déroulent [2]. Nous utiliserons souvent le terme *labelliser* au lieu de repérer pour insister sur le fait qu'il s'agit d'une nomenclature plus ou moins artificielle, comme des étiquettes sur une collection de peluches sur une étagère. Les coordonnées sont simplement des labels, utiles pour nommer, repérer, savoir de quoi on parle.

Il est vrai que les coordonnées habituelles sont des labels construits à l'aide de considérations géométriques simples : par exemple dans le plan depuis n'importe quel point on

2. Ici le mot événement est utilisé non plus dans son sens strict de point $(x,\ y,\ z,\ t)$ dans l'espace-temps, mais dans son acception courante de chose qui se passe.

trace deux droites parallèles aux axes et ça nous donne les coordonnées du point. Ça restera vrai en relativité restreinte où tous les référentiels ont des structures géométriques simples linéaires. Mais ça n'est pas une nécessité. En géométrie sphérique ce n'est plus le cas, ni en relativité générale. Un système de labels doit juste être une bijection entre des points d'un espace et des noms – avec lesquels si possible on peut faire des calculs. Rappelez-vous, enfant, quand vous vous demandiez peut-être comment on connaissait le nom des étoiles.

Comme nous l'avons vu, on peut construire plusieurs systèmes de coordonnées et donc avoir plusieurs descriptions différentes des mêmes événements. Ce que le concept de relativité veut dire, pour Galilée et Newton comme pour Einstein, est que les lois gouvernant ces événements sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels. Un référentiel est dit *inertiel*, ou encore *galiléen*, si les particules sur lesquelles aucune force externe ne s'exerce se déplacent en ligne droite avec une vélocité uniforme quand on les repère avec les coordonnées spatiales et temporelle de ce référentiel. Il est évident que tous les référentiels ne sont pas inertiels. Supposez que votre référentiel soit inertiel de telle sorte qu'une particule, lancée à travers la pièce, se déplace avec une vélocité uniforme quand on la mesure avec vos bâtons de mesure et vos horloges[3]. Si je marche en faisant des allers et retours sur l'estrade, la particule m'apparaîtra en accélération lorsque je fais demi-tour. Mais quand je marche en ligne droite à vitesse constante je verrai alors moi aussi la particule se déplacer avec une vélocité uniforme. Ce que nous pouvons dire d'une manière générale est que deux référentiels, s'ils sont chacun inertiel, ne peuvent se déplacer

3. On laisse de côté la gravitation qui sera traitée dans le cours suivant sur la relativité générale.

l'un par rapport à l'autre autrement qu'avec un mouvement uniforme de translation.

Les référentiels galiléens sont indistinguables du point de vue des lois de la nature. Par exemple les lois de la mécanique newtonienne, $F = ma$ et la loi de l'attraction gravitationnelle, ont exactement la même expression dans tous les référentiels galiléens.

J'aime bien illustrer les repères galiléens de la manière suivante. Supposez que je sois un jongleur accompli. J'ai dû apprendre quelques lois pour savoir jongler, par exemple que si je lance une balle verticalement vers le haut elle retombera au même point d'où elle est partie. Imaginons que j'aie appris à jongler sur un quai de gare en attendant le train. Quand le train arrive et s'arrête en gare, je monte dans le train et commence immédiatement à jongler sans problème. Mais dès que le train se remet en route, les lois que j'ai apprises ne marchent plus. Pendant un certain temps les balles suivent des trajectoires bizarres, retombant ailleurs que là où je les attends. Cependant, dès que train atteint une vélocité uniforme, les lois du jonglage marchent de nouveau. Si je suis dans un wagon de train sans fenêtre et que mon repère est galiléen (c'est-à-dire que je peux jongler), je ne peux absolument pas dire si le train est à l'arrêt ou en marche en ligne droite à vitesse constante. Il faut naturellement que la voie soit parfaitement lisse et droite et qu'aucune vibration de roulement ne soit perceptible. Rares sont ceux d'entre nous qui se sont trouvés dans un wagon sans fenêtre, mais nous avons tous fait l'expérience assis dans un train peu avant son départ de voir soudain le train de la voie d'à côté se mettre en branle puis de réaliser qu'en fait c'était le nôtre qui venait de démarrer. Cela suppose bien sûr qu'on n'aie ressenti aucun à-coup lié à sa mise en mouvement, car en réalité nous avons forcément subi une accélération.

Le principe de la relativité énonce que *toutes les lois de la physique ont des expressions identiques dans tous les repères galiléens*, car comme on vient de le voir rien ne les distingue. Ce principe n'a pas été inventé par Einstein [4] ; il existait avant lui et est généralement attribué à Galilée [5]. Newton [6] ne l'a pas mentionné explicitement mais l'aurait certainement reconnu. Alors qu'ajouta Einstein pour que la relativité soit attachée à son nom ? Après les travaux de Lorentz [7], FitzGerald [8], Poincaré [9] et quelques autres à la fin du XIX^{e} siècle qui s'efforcèrent de réconcilier la physique newtonienne avec le fait que la vitesse de la lumière était toujours la même, il clarifia radicalement la situation en énonçant que la vitesse de la lumière était une loi de la physique et qu'en tant que telle elle devait être la même dans tous les référentiels galiléens. Cela conduisit à un bouleversement de la notion de temps et d'espace qui est l'objet de la première partie de ce livre : la théorie de la relativité restreinte. Après la relativité restreinte, il appliqua un principe comparable d'identification de deux phénomènes – l'équivalence entre la force d'inertie liée à l'accélération et un certain type de forces gravitationnelles – qui le conduisit à la théorie de la relativité générale qui n'est pas traitée dans ce livre.

Comme nous l'avons vu la vitesse de lumière a la valeur approximative $c = 3 \times 10^8$ mètres par seconde. Mesurée en mile par seconde, une unité parfois utilisée dans le monde anglo-saxon, elle est d'environ 186 000, et mesurée en année-

4. Albert Einstein (1879-1955), physicien d'origine allemande.
5. Galileo Galilei (1564-1642), physicien et astronome italien.
6. Isaac Newton (1642-1727), mathématicien et physicien anglais.
7. Hendrik Lorentz (1853-1928), physicien néerlandais.
8. George FitzGerald (1851-1901), physicien irlandais.
9. Henri Poincaré (1854-1912), mathématicien français.

lumière par an elle est exactement de 1. Mais une fois que des unités ont été choisies, la loi expliquée par Einstein énonce que la vitesse de lumière est la même pour tous les observateurs.

Quand vous combinez ces deux idées – que les lois de la physique ont la même expression dans tous les référentiels galiléens, et que c'est une loi de la physique que la lumière se déplace avec une vélocité fixe –, vous parvenez à la conclusion que la vitesse de la lumière doit être la même dans tous les référentiels galiléens ou inertiels. C'est une conclusion vraiment déconcertante. Elle conduisit certains physiciens à rejeter totalement la relativité restreinte. Dans les sections qui suivent, nous allons suivre la logique d'Einstein et découvrir les unes après les autres les conséquences de sa nouvelle loi.

1.2.1 Référentiels newtoniens

Dans cette section, je vais expliquer comment, avant la relativité d'Einstein, Newton aurait décrit la relation entre différents référentiels, et les conclusions qu'il en aurait tirées sur le mouvement des rayons lumineux. Le postulat de base de Newton était qu'il existait un temps universel, le même dans tous les référentiels. En d'autres termes le même événement, par exemple une ampoule qui s'allume quelque part à un moment donné, pouvait avoir des coordonnées spatiales différentes selon le référentiel utilisé, mais il avait la même date dans tous les référentiels.

Commençons par ignorer les dimensions spatiales y et z, qui ne rajoutent rien aux explications qui vont suivre, et focalisons-nous sur la dimension spatiale x. Nous allons prétendre que le monde n'a qu'une seule dimension spatiale et que tous les observateurs peuvent se déplacer librement le long de cette dimension, mais ne peuvent pas en sortir. Vous pouvez penser à cette dimension comme ayant une forme quelconque (sauf une boucle), mais la notion de forme d'un espace à une dimension le plonge implicitement dans un espace avec plus de dimensions [10] – ce que nous ne voulons pas faire. Le plus simple est d'y penser comme à une droite. Le monde a une seconde dimension, temporelle celle-ci, qui est le temps t. La convention habituelle est de représenter ce monde avec sa dimension spatiale horizontalement et sa dimension temporelle verticalement, figure 1.1.

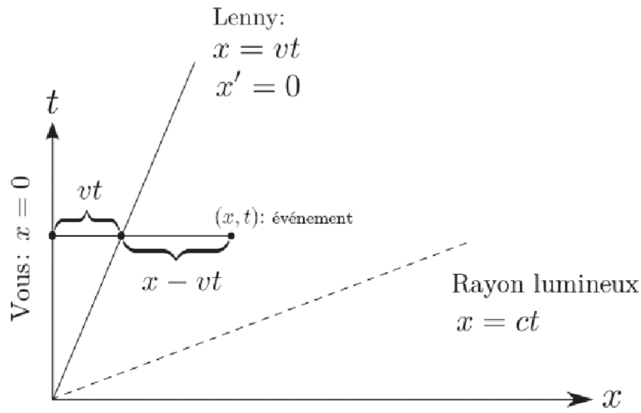

Figure 1.1 : Référentiels newtoniens.

Les axes horizontaux et verticaux sur la figure servent à repérer la position et la date de n'importe quel événement *dans votre référentiel* – le référentiel au repos par rapport

10. Ce n'est plus vrai pour un espace à deux dimensions ou plus, qui peut avoir une forme *intrinsèque* autre qu'un plan ou un espace euclidien plus vaste.

à la salle de classe. (Je vais arbitrairement appeler votre référentiel le *référentiel au repos*, et le mien le *référentiel en mouvement.*) Nous allons faire l'hypothèse que dans votre référentiel la lumière se déplace avec sa vitesse standard c. Un diagramme comme celui de la figure 1.1 est appelé un *diagramme d'espace-temps* ou encore un *diagramme de Minkowski* [11]. Vous pouvez y penser comme à une carte du monde – une carte qui représente non seulement tous les points du monde mais aussi à toutes les dates possibles. Si un rayon lumineux est émis depuis l'origine vers la droite sur l'axe spatial, sa trajectoire sur le diagramme sera donnée par l'équation

$$x = ct$$

De même un rayon émis vers la gauche aura l'équation

$$x = -ct$$

Une vélocité négative veut simplement dire un mouvement vers la gauche. Dans les différentes figures qui suivent je vais aussi représenter mon propre référentiel se déplaçant vers la droite avec une vitesse v (qui aura donc une valeur positive). Comme exercice, vous pourrez étudier les changements dans les raisonnements et calculs ci-après si v a une valeur négative.

Dans la figure 1.1, le rayon lumineux se déplaçant vers la droite est la ligne pointillée. Si les unités pour les axes étaient des mètres et des secondes, le rayon lumineux apparaîtrait presque horizontal, car il se déplace de 3×10^8

11. D'après Hermann Minkowski (1864-1909), mathématicien allemand qui contribua à la mathématisation de la théorie de la relativité restreinte. Parfois dans le diagramme de Minkowski, l'axe vertical repère non pas t mais ct. Mais cela ne change rien, tout particulièrement quand les unités sont telles que $c = 1$.

mètres vers la droite chaque fois qu'il se déplace de une seconde vers le haut sur l'axe vertical. Mais la valeur numérique de c dépend entièrement des unités choisies. C'est pourquoi, il est commode d'utiliser d'autres unités pour la vitesse de la lumière – des unités avec lesquelles on voit mieux que le rayon lumineux a une certaine pente. Par la suite nous utiliserons généralement des diagrammes où le rayon lumineux vers la droite sera la diagonale à 45° car ça donnera lieu à des propriétés géométriques simples. Mais ce sera quand le temps ne sera plus universel...

Où êtes-vous sur le diagramme ? Au temps $t = 0$ vous êtes à l'origine. Puis à mesure que le temps s'écoule vous ne vous déplacez pas spatialement, mais vous suivez néanmoins dans l'espace-temps une trajectoire : c'est la droite verticale dont l'équation est $x = 0$. De même n'importe quel point spatial fixe dans votre référentiel a pour trajectoire une droite verticale. Et n'importe quel point qui se déplace à vitesse constante dans votre référentiel a pour trajectoire une droite inclinée. Exercice : si elle était plus inclinée que la droite du rayon lumineux qu'est-ce que cela voudrait dire sur sa vitesse ?

Ceci nous amène à mon référentiel que j'ai appelé le référentiel en mouvement. Mettons qu'au temps $t = 0$ nous étions, vous et moi, au même point spatial. L'origine spatiale de mon référentiel – c'est-à-dire moi-même – a une trajectoire dans votre référentiel qui est la ligne pleine inclinée. Si mon référentiel ne bougeait pas par rapport au vôtre, la droite serait verticale. Ce serait la trajectoire de mon point origine dans l'espace-temps – ainsi que du vôtre – dans votre référentiel. Et si je me déplaçais vers la gauche, la trajectoire de mon point origine irait vers la gauche en montant à mesure que le temps s'écoule.

Nous allons à présent introduire pour les événements dans l'espace-temps des coordonnées dans *mon* référentiel. Elles seront notées x' et t'. Ainsi un événement quelconque de l'espace-temps (c'est-à-dire simplement un point quelconque du diagramme de Minkowski) aura des coordonnées $(x,\ t)$ dans le référentiel au repos, et $(x',\ t')$ dans le référentiel en mouvement.

Personnellement, comme je suis en permanence au centre spatial de mon propre référentiel, ma position satisfait toujours $x' = 0$. Et t' évolue comme le temps qui passe. Quant à vous, vous décrivez mon mouvement par

$$x = vt$$

ou encore

$$x - vt = 0$$

où v est la vitesse avec laquelle vous me voyez me déplacer.

Maintenant que nous avons vu quelques trajectoires particulières (un rayon lumineux, votre origine spatiale, mon origine spatiale), la question générale est : comment les coordonnées $(x',\ t')$ et $(x,\ t)$ de n'importe quel événement sont-elles liées entre elles ? Selon Newton, les relations sont simples. Ce sont

$$t' = t \tag{1.1}$$

$$x' = x - vt \tag{1.2}$$

La première équation est l'expression de l'hypothèse de Newton qu'il existe un temps universel, le même pour tous les observateurs. La seconde montre comment, pour un événement quelconque, on passe de sa coordonnée spatiale dans votre référentiel à sa coordonnée spatiale dans le mien. Par exemple, $x' = 0$ est équivalent à $x - vt = 0$.

Les équations 1.1 et 1.2 sont les équations de la transformation de Newton des coordonnées entre deux référentiels inertiels. Si vous savez où et quand un événement s'est produit, repéré par votre système de coordonnées, alors vous pouvez dire où et quand il a eu lieu repéré par le mien. Comme on l'a répété maintes fois, il est important de comprendre qu'il s'agit du même événement, au même point de l'espace-temps. Simplement il a des coordonnées spatiales et temporelles différentes – c'est-à-dire *des labels différents* – dans des systèmes de coordonnées différents. Pour l'instant $t = t'$, mais, vous l'avez compris, ça ne va pas durer.

Pouvons-nous inverser les relations, c'est-à-dire exprimer $(x,\ t)$ en fonction de $(x',\ t')$? Bien sûr ! Nous vous laissons le soin de le faire. Vous devez arriver à

$$t = t' \tag{1.3}$$

$$x = x' + vt' \tag{1.4}$$

ce qui est la même chose que les équations 1.1 et 1.2 où les deux repères ont été inversés et, logiquement, la vitesse v est devenue $-v$.

Maintenant intéressons-nous au rayon lumineux sur la figure 1.1. Par hypothèse, il se déplace le long de la trajectoire $x = ct$ dans votre référentiel. Comment est-ce que je le décris dans mon référentiel ? Eh bien, utilisons les équations 1.3 et 1.4 et réécrivons $x = ct$ avec leur aide. Nous obtenons

$$x' + vt' = ct'$$

ou de manière équivalente

$$x' = (c - v)t'$$

Ce n'est pas surprenant, mais c'est ennuyeux. Cela dit que vu par moi le rayon lumineux va moins vite, ce qui semble naturel puisque je me déplace moi-même dans sa direction.

Mais c'est en contradiction avec la loi d'Einstein selon laquelle la vitesse de la lumière, étant une propriété de la nature, doit être la même dans tous les référentiels galiléens. Si Einstein a raison, il y a quelque chose qui cloche sérieusement. Newton et Einstein ne peuvent pas tous les deux avoir raison. La vitesse de la lumière ne peut pas être une constante universelle s'il existe un temps universel.

Avant de résoudre cette contradiction avec une décision très hardie, que vous devinez déjà, regardons ce qui se passe avec un rayon lumineux émis depuis l'origine vers la gauche. Dans votre référentiel, sa trajectoire a l'équation

$$x = -ct$$

Et il est facile de calculer, avec la transformation de Newton, que dans mon référentiel cela devient

$$x' = -(c + v)t$$

En d'autres termes, si je bouge vers la droite, le rayon lumineux qui va dans la même direction va un peu moins vite que la vitesse de la lumière, et celui émis vers la gauche va un peu plus vite que c. C'est ce que Newton et Galilée auraient dit. C'est ce que *tout le monde* disait jusque vers la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle quand on commença à mesurer la vitesse de la lumière avec une très grande précision et on trouva qu'elle était toujours la même quel que soit le référentiel inertiel dans lequel on se trouvait.

La seule façon de surmonter cette difficulté était de reconnaître qu'il y avait quelque chose d'incorrect dans la transformation de Newton exprimée par les équations 1.1 et 1.2. Les meilleurs physiciens et mathématiciens de la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle essayèrent de les sauver sans abandonner $t = t'$ et approchèrent remarquablement de la solution. Mais, comme ils n'étaient pas prêts à renoncer au temps universel, leurs calculs et surtout leurs explications n'avaient pas la clarté limpide qu'apporta Einstein et que nous allons à présent voir.

1.2.2 Référentiels de la relativité

Avant d'établir nos nouvelles équations de transformation des coordonnées, examinons une des hypothèses clé de Newton. L'hypothèse la plus menacée, et celle qui est en réalité fausse, est que la simultanéité veut dire la même chose dans tous les référentiels – que si nous démarrons avec toutes vos horloges synchronisées avec toutes les miennes, et que je commence à me déplacer, mes horloges vont rester synchronisées avec les vôtres. Nous allons bientôt nous rendre compte que l'équation

$$t = t'$$

n'est pas la relation correcte entre mon temps et le vôtre. Toute l'idée de simultanéité est dépendante du référentiel : deux événements peuvent être simultanés dans l'un mais pas dans l'autre.

Synchronisation de nos horloges

Voici ce que je voudrais que vous imaginiez. Nous sommes dans une salle de classe. Vous êtes un étudiant assis dans la rangée de devant, où sont assis d'autres étudiants tous écoutant attentivement. Chaque étudiant a une horloge. Vous inspectez soigneusement ces horloges et vous vous assurez qu'elles marquent toutes la même heure et battent la même seconde.

Je suis sur l'estrade, pour l'instant immobile par rapport à vous. J'ai une collection d'horloges dans mon propre référentiel qui sont disposées le long de mon axe spatial de manière similaire aux vôtres. Chacune de vos horloges a exactement une homologue en face d'elle dans mon référentiel, et vice versa. Je me suis assuré que mes horloges sont synchronisées entre elles, et aussi avec les vôtres. Puis, avec toutes mes horloges m'accompagnant, je commence à me déplacer relativement à vous et vos horloges. Tandis que chacune de mes horloges passe devant chacune des vôtres, nous regardons si les vôtres et les miennes marquent toujours la même heure, et si ce n'est pas le cas, quel décalage montrent-elles. Le décalage peut dépendre de la position de chaque horloge sur sa rangée.

Bien sûr, nous pourrions nous poser des questions similaires concernant nos bâtons de 1 mètre, par exemple : "pendant que je déplace devant vous, mes bâtons ont-ils toujours 1 mètre de long quand ils sont mesurés avec vos coordonnées ?"

C'est ici qu'Einstein fit son grand saut conceptuel. Il se rendit compte que nous devions faire beaucoup plus attention aux détails dans notre façon de définir les longueurs, les temps et la simultanéité. Nous devons préciser comment *expérimentalement* procéder pour synchroniser deux horloges. Le postulat qu'il conserva est que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels inertiels. Cela le força à abandonner le postulat de Newton qu'il existe un temps universel. À la place, il découvrit que "la simultanéité est relative". Nous allons suivre sa logique.

Que voulons-nous dire exactement quand nous disons que deux horloges, A et B, sont synchronisées ? Si les deux horloges sont à un moment donné au même endroit, il est facile de voir si elles marquent la même heure ou pas. Mais si elles sont à des endroits différents, même si elles sont toutes les deux fixes dans un référentiel donné, vérifier leur synchronicité demande un peu de réflexion. Le problème est que la lumière met un certain temps – très court certes, mais non nul – pour aller de A à B.

L'astuce est d'introduire une troisième horloge C à mi-chemin entre A et B. Pour être bien clair, imaginons que les trois horloges sont celles de trois étudiants assis dans la rangée de devant. L'horloge A est avec l'étudiant à l'extrémité gauche de la rangée, l'horloge B avec l'étudiant à l'extrémité droite, et l'horloge C avec l'étudiante au centre de la rangée. On a vérifié avec soin que la distance entre A et C est exactement la même que la distance entre C et B.

Au moment précis où l'horloge A marque midi, elle envoie un flash vers C. De même quand B marque midi, elle envoie aussi un flash vers C. Bien sûr les deux rayons lumineux vont chacun mettre un peu de temps pour atteindre le centre, mais comme la vélocité de la lumière des flashes est la même, et les distances qu'ils doivent parcourir sont les mêmes, ils doivent mettre le même temps pour arriver à C. Un observateur dans le référentiel au repos dira que A et B sont synchronisées si et seulement si les deux flashes atteignent C en même temps. Et s'ils n'arrivent pas en même temps, l'étudiante-observatrice en C au milieu de la rangée conclura que A et B ne sont pas synchronisées. Elle pourra envoyer un message à A ou à B avec des instructions sur la façon de se remettre à l'heure.

Supposons que les horloges A et B *soient* synchronisées dans votre référentiel – le référentiel de la salle de classe, appelé aussi référentiel au repos. Que se passe-t-il dans mon référentiel en mouvement ? Mettons que je me déplace vers la droite, et que je passe au point C exactement à midi. C'est le moment où les deux flashes sont émis. Mais les rayons lumineux n'arrivent pas en C à midi ; ils arrivent un peu plus tard. À ce moment-là je me serai déplacé vers la droite. Donc je recevrai le rayon lumineux venant de la droite un peu avant celui venant de la gauche. J'en conclurai que vos horloges *ne sont pas* synchronisées.

Manifestement deux événements synchronisés pour vous peuvent ne pas l'être pour moi. Deux événements, en des endroits différents, qui ont la même date t dans votre référentiel, et sont ainsi synchronisés pour vous, ne le sont pas pour moi. Ou du moins c'est ce que les deux postulats d'Einstein nous forcent à conclure.

Unités et dimensions

Faisons une pause pour présenter les deux systèmes d'unités que nous allons utiliser dans ce livre. Chaque système sera adapté aux fonctions qui lui sont assignées. Et il sera facile de passer de l'un à l'autre.

Le premier système utilise les unités familières du système SI : les mètres, les secondes, etc. Nous les appellerons les unités *courantes* ou *conventionnelles*. Ces unités sont excellentes pour décrire le monde ordinaire dans lequel les vélocités sont bien plus petites que celle de la lumière. Une vélocité de 1 dans ces unités signifie un mètre par seconde, ce qui est plusieurs ordres de magnitude plus petit que c.

Le second système est basé sur la vitesse de la lumière. Dans ce système, les unités de longueur et de temps sont définies de telle sorte que cela donne à la vitesse de la lumière la valeur 1. L'unité de temps pourra être la seconde et l'unité de longueur la distance parcourue par la lumière en une seconde. Ou bien l'unité de temps pourra être l'année, et l'unité de longueur l'année-lumière, c'est-à-dire la distance – mesurée dans notre référentiel – parcourue par la lumière en une année – c'est environ un quart de la distance qui nous sépare d'Alpha du Centaure, l'étoile la plus proche dans la Voie lactée[12]. Dans les deux cas la vitesse de la lumière aura alors la valeur 1.

Nous utiliserons généralement pour l'unité de temps la seconde, et pour l'unité de longueur la seconde-lumière. Et nous les appellerons les unités *relativistes*. Elles facilitent les calculs et soulignent les symétries dans certaines équations. Nous avons déjà vu que les unités conventionnelles ne sont pas pratiques pour les diagrammes d'espace-temps. Les unités relativistes en revanche sont parfaitement adaptées à cette représentation.

Dans les diagrammes d'espace-temps, comme par exemple la figure 1.2 un peu plus loin, les axes temporel et spatial seront calibrés avec ces unités. Ainsi la trajectoire d'un rayon lumineux émis vers la droite sur l'axe des x depuis l'origine sera représentée par la diagonale à 45°. Il nous arrivera même de dire que les deux axes sont tous les deux calibrés en seconde, voulant dire par là que l'axe vertical est en seconde, et l'axe horizontal en seconde-lumière.

Savoir passer aisément d'un système à l'autre nous rendra beaucoup de services. Le principe directeur est que les expressions mathématiques doivent être cohérentes du point de vue des dimensions. Par exemple une énergie obtenue au terme d'un calcul devra avoir pour dimension des kg x m^2 / s^2 ou quelque chose d'équivalent. Une équation où les valeurs numériques n'importent pas mais qui exprime une contrainte sur des dimensions – qui doivent

12. Pour avoir une idée concrète de la distance jusqu'à Alpha du Centaure, considérez sept fois la distance Terre-Soleil et... multipliez-la par 40 000. C'est notre plus proche voisine. L'univers est *beaucoup plus* vaste ! On ne sait pas s'il est infini ou pas. Il pourrait être une 3-sphère, comme la surface de la Terre est une 2-sphère.

être les mêmes de part et d'autre du signe égal – s'appelle une *équation aux dimensions.*

Quand la vitesse de la lumière sera présente dans une équation sous la forme invisible d'un 1 en facteur, il ne faudra pas oublier que ce 1 a la dimension d'une longueur divisée par un temps. C'est la raison pour laquelle nous avons inclus cette petite section sur les unités : nous manipulerons beaucoup d'équations où c n'apparaît pas tout simplement car il est égal à 1.

Sur un plan pratique, si on a une équation en unités relativistes faisant intervenir une vitesse v, et qu'on veut la transformer en une équation en unités conventionnelles où c apparaît explicitement, il suffira de voir notre équation comme une équation aux dimensions et de les corriger à l'aide du facteur c. Souvent il suffira de remplacer v par v/c, quelque fois par v/c^2, etc.

Cela nous conduira parfois à dire qu'une vitesse v en unités relativistes est un nombre sans dimension, voulant dire par là que v/c ou $v/1$ est un nombre sans dimension.

Les deux systèmes de coordonnées

Revenons à nos deux référentiels, le vôtre dit au repos, et le mien en mouvement. Cette fois-ci nous allons être très précautionneux dans la façon d'utiliser le mot *synchrone* dans le référentiel en mouvement.

Dans le référentiel au repos, les choses sont finalement très simples : deux points, c'est-à-dire deux événements, sont synchrones s'ils sont au même niveau horizontal sur le diagramme d'espace-temps. Les deux points ont la même coordonnée temporelle t, et donc la ligne droite qui les joint est parallèle à l'axe des x. C'est ce que l'on voit dans le diagramme de Minkowski et cela n'aurait posé aucun problème à Newton.

Mais qu'en est-il dans le référentiel en mouvement ? Nous allons voir dans un instant que *dans le référentiel en mouvement*, le point

$$x = 0, \; t = 0$$

n'est pas synchrone avec les autres points de l'axe des x, mais qu'il est synchrone avec un ensemble entièrement différent de points. En fait, la surface [13] entière des points synchrones pour moi avec l'origine (qui par convention est la même dans les deux référentiels) est une autre droite. Comment pouvons-nous la dessiner dans le diagramme de Minkowski, où les axes x et t repèrent les coordonnées dans le référentiel au repos ? Nous allons utiliser la même procédure qui a servi dans la section "synchronisation de nos horloges" plus haut. Elle est maintenant illustrée par la figure 1.2.

Dessiner un diagramme de Minkowski est généralement la meilleure façon de comprendre un problème en relativité. Le dessin est toujours le même : la coordonnée spatiale x dans le repère au repos est l'axe horizontal, et la coordonnée temporelle t dans le repère au repos est l'axe vertical. Insistons sur le fait que ce sont les axes repérant les coordonnées dans le référentiel dit stationnaire ou au repos, c'est-à-dire votre référentiel puisque vous ne bougez pas par rapport à lui. Une ligne droite ou courbe qui représente la trajectoire d'un observateur en mouvement dans votre référentiel est appelée une *ligne d'univers*.

13. En mathématiques, quand dans un espace à n dimensions on considère un sous-espace à $(n-1)$ dimensions, plan ou pas, on parle de *surface* ou de *variété*. Ici l'espace-temps a 2 dimensions, x et t, donc une "surface" est en réalité une ligne, droite ou courbe. Mais les auteurs conservent le mot surface.

Avec les axes x et t en place, les choses suivantes à dessiner sont les rayons lumineux émis depuis l'origine vers la droite et vers la gauche. Comme nous le savons déjà, celui vers la droite a l'équation $x = ct$ et celui vers la gauche $x = -ct$. Et comme $c = 1$ dans nos unités, ce sont les deux diagonales à 45° et −45° passant par l'origine. Notez qu'un rayon émis du point spatial x au temps t vers la droite sera aussi la demi-droite inclinée à 45° depuis l'événement $(x,\ t)$, et le rayon émis vers la gauche sera la demi-droite inclinée à −45°. Ainsi le segment allant de l'événement b à l'événement a sur la figure 1.2 est la trajectoire d'un rayon lumineux émis vers la gauche depuis l'événement b.

Synchronicité dans le référentiel en mouvement

Sur la figure 1.2, nous allons considérer trois observateurs fixes *dans le référentiel en mouvement* : Lenny, Mary et Seymour. Nous avons déjà vu Lenny : c'est l'observateur en mouvement que nous avons déjà représenté sur la figure 1.1. Il est positionné à l'origine spatiale du référentiel en mouvement, se déplaçant vers la droite pour vous. Sa ligne d'univers, c'est-à-dire sa trajectoire, est la droite d'équation $x = vt$, ou de manière équivalente $x' = 0$. Au temps $t = 0$, il passe par l'origine du référentiel au repos qui est aussi celle du référentiel en mouvement.

À une unité spatiale, repérée avec la coordonnée x, devant Lenny se trouve Mary. Sa trajectoire a l'équation

$$x = vt + 1$$

Au temps $t = 0$, sur le diagramme Mary était simplement à la position $(x = 1,\ t = 0)$. Cela veut dire par définition qu'elle est à une unité de longueur de Lenny, mesurée dans le référentiel au repos.

Et à deux unités de longueur se trouve Seymour. Sa trajectoire a l'équation

$$x = vt + 2$$

Au temps $t = 0$, il était lui aussi sur l'axe des x, à la position $(x = 2,\ t = 0)$. Nous allons voir que pour eux, ils n'ont pas franchi ces trois points sur l'axe des x à la même date t' dans leur référentiel. Mais pour l'instant continuons à construire ce qu'est un ensemble de points (au sens d'événements) synchrones pour eux.

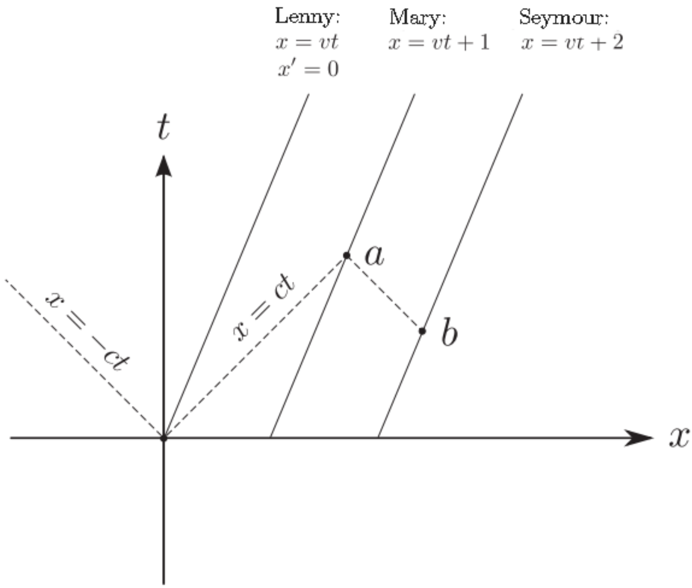

Figure 1.2 : Détermination de la synchronicité dans le référentiel en mouvement.

Nos trois observateurs dans le référentiel en mouvement ont chacun une horloge avec soi – cela va de soi. Quand l'horloge de Lenny marque midi c'est le moment où il passe par ($\mathrm{x} = 0,\ t = 0$). Nous avons par convention décidé que c'est aussi ($x' = 0,\ t' = 0$). À ce moment-là Lenny envoie un rayon lumineux vers Mary. C'est la droite $x = ct$ sur la figure. Elle croise la trajectoire de Mary au point a. C'est-à-dire que le rayon lumineux émis par Lenny atteint Mary en cet événement. (On se rappelle qu'*événement* veut dire *point* sur le diagramme de Minkowski.)

Nous voulons que Seymour envoie aussi un rayon lumineux, vers la gauche, vers Mary, de telle sorte qu'il l'atteigne en même temps que celui de Lenny. Alors nous dirons que les deux rayons ont été émis en même temps, c'est-à-dire au même temps t', *du point de vue du référentiel en mouvement.* C'est en effet ainsi que l'on a défini – avec le plus grand soin – la synchronicité. Le rayon émis par Seymour doit donc arriver en a. Il doit quitter Seymour en un point b de sa ligne d'univers, et comme c'est un rayon lumineux allant vers la gauche, sa trajectoire, qui est le segment $(a,\ b)$, est inclinée à $-45°$.

Nous avons maintenant tout ce qu'il nous faut pour calculer les coordonnées des événements a et b dans le référentiel au repos. Et nous savons que les points origine et b sont synchrones dans le référentiel en mouvement, c'est-à-dire ont la même date. Ce qui veut dire qu'on sait déjà qu'en b, on a $t' = 0$.

L'axe spatial x'

Trouver, dans le référentiel au repos, les coordonnées du point b est un exercice de géométrie analytique élémentaire. Résolvons-le en deux étapes. On va commencer par déterminer les coordonnées de a, puis on trouvera celles de b.

Le point a est à l'intersection des droites d'équations

$$x = ct$$

et

$$x = vt + 1$$

Utilisons les unités relativistes dans lesquelles $c = 1$. Alors ce sont plus simplement les droites d'équations

$$x = t \tag{1.5}$$

et $x = vt + 1$. Donc la coordonnée t du point a satisfait

$$t = vt + 1$$

Cela donne

$$t_a = \frac{1}{1 - v} \tag{1.6}$$

Par conséquent, d'après l'équation 1.5, on a aussi

$$x_a = \frac{1}{1 - v}$$

Voilà le point a réglé. Passons à b.

La droite passant par a et b a une pente de $-45°$, donc tous les points sur elle satisfont l'équation

$$x + t = \text{constante}$$

Le point a nous donne immédiatement la constante. C'est

$$\text{constante} = \frac{2}{1 - v}$$

Les coordonnées du point b satisfont donc

$$x + t = \frac{2}{1 - v} \tag{1.7}$$

et aussi, car b est sur la trajectoire de Seymour,

$$x = vt + 2$$

En remplaçant x par son expression en fonction de t, l'équation 1.7 devient

$$vt + 2 + t = \frac{2}{1 - v}$$

ou

$$\begin{aligned} t(1 + v) &= \frac{2}{1 - v} - 2 \\ &= \frac{2}{1 - v} - \frac{2(1 - v)}{1 - v} \\ &= \frac{2v}{1 - v} \end{aligned}$$

D'où, après encore un peu d'algèbre, laissée à la lectrice ou au lecteur, pour la coordonnée spatiale,

$$\begin{aligned} t_b &= \frac{2v}{1 - v^2} \\ x_b &= \frac{2}{1 - v^2} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Tout d'abord, notons le point important suivant : t_b n'est pas égal à zéro. En d'autres termes, l'événement b qui est synchrone avec l'événement origine dans le référentiel en mouvement, *ne l'est pas* avec l'événement origine dans le référentiel au repos. Les deux origines correspondent néanmoins, par convention, à un seul est même événement.

Ensuite considérons la ligne droite passant par l'origine et par b, figure 1.3. Sa pente est donnée par t_b/x_b. Les équations 1.8 montrent que sa valeur est v, soit exactement l'inverse de la pente de la trajectoire de Lenny.

Par ailleurs, cette droite passant par l'origine et par b, d'équation

$$t = vx \tag{1.9}$$

est tout simplement l'ensemble des points tels que $t' = 0$, c'est-à-dire l'axe des x'. En effet nous avons choisi Mary et Seymour respectivement avec les trajectoires $x = vt + 1$ et $x = vt + 2$, mais en prenant $x = vt + 1\lambda$ et $x = vt + 2\lambda$, et en faisant varier λ on obtiendrait n'importe quel point aligné avec b et l'origine.

Voilà la symétrie dans les diagrammes de Minkowski, qu'on obtient en prenant $c = 1$, dont nous avons parlé plus haut. Les axes $x' = 0$, appelé aussi l'axe t' (c'est-à-dire la trajectoire de l'origine spatiale du référentiel en mouvement) et $t' = 0$, appelé aussi l'axe x' (c'est-à-dire les événements synchrones avec l'événement $x' = 0,\ t' = 0$ dans le référentiel en mouvement) sont deux droites symétriques par rapport à la diagonale à 45°, qui se trouve être aussi la trajectoire d'un rayon lumineux émis vers la droite depuis l'origine.

Dans nos raisonnements et figures, nous avons choisi une vitesse v positive pour le mouvement de Lenny dans le référentiel au repos. Si vous avions pris une vélocité négative, nous aurions dû modifier légèrement les émissions de rayons lumineux et redessiner les diagrammes, ou simplement prendre leur vue dans un miroir.

La figure 1.3 montre notre diagramme d'espace-temps avec les axes x' et t' représentés. La droite $t = vx$ (ou ce qui serait une surface voire même un espace à trois dimensions si nous avions une ou deux coordonnées spatiales supplémentaires) a donc la propriété importante que toutes les horloges du référentiel en mouvement y marquent $t' = 0$. C'est l'axe x'.

Et la trajectoire de Lenny est la droite telle que x' reste égal à zéro, car Lenny est en permanence au centre du référentiel en mouvement. C'est l'axe t'.

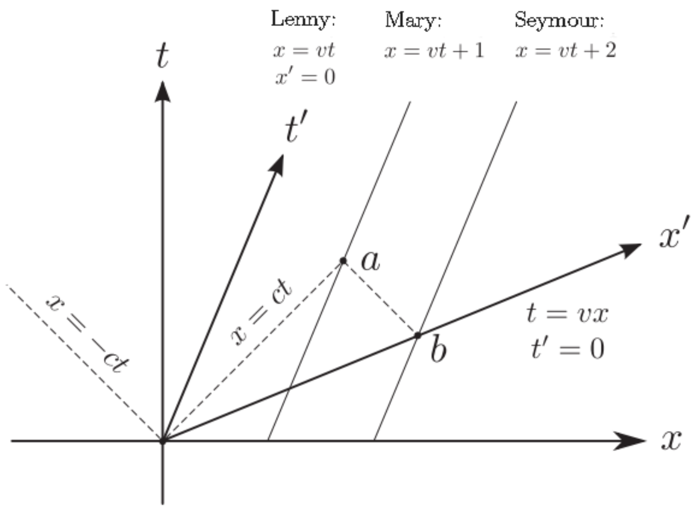

Figure 1.3 : Référentiels fixe et en mouvement de la relativité restreinte. Les axes x' (c'est-à-dire $t' = 0$) et t' (c'est-à-dire $x' = 0$) sont ceux du référentiel en mouvement.

L'axe x' est appelé une *surface de simultanéité* dans le référentiel en mouvement. Il joue le même rôle que l'axe des x dans le repère au repos. L'axe des x correspond à tous les événement dont la date est $t = 0$. Tous les événements dont la date t est une autre valeur fixe forment une ligne horizontale au dessus de l'axe des x. De même tous les événements de date $t' = 0$ forment l'axe x', et tous les événements synchrones avec une autre date t' dans le référentiel en mouvement forment une droite parallèle à l'axe x'.

Jusqu'ici nous avons travaillé avec des unités relativistes dans lesquelles la vitesse de la lumière était $c = 1$. Nous sommes à un bon endroit dans la leçon pour voir comment nos premières équations, faisant intervenir la vitesse v du référentiel en mouvement par rapport à celui au repos, se transforment quand on travaille avec les unités conventionnelles et que c devient une valeur autre que 1. Comme nous l'avons dit, le procédé consiste à regarder nos équations comme des équations aux dimensions. Ainsi l'équation 1.9, $t = vx$, n'est pas cohérente du point de vue des dimensions. En effet elle exprime une égalité entre *un temps* et *une longueur au carré divisée par un temps*. Pour restaurer la cohérence il faut multiplier par exemple le côté droit par une puissance appropriée de c. Le facteur correct est $1/c^2$:

$$t = \left(\frac{v}{c^2}\right) x \tag{1.10}$$

ou de manière équivalente

$$ct = \left(\frac{v}{c}\right) x$$

Certains auteurs dessinent les diagrammes de Minkowski avec ct en ordonnée plutôt que t. Ils utilisent cependant toujours x en abscisse.

Une fois de plus, il faut souligner qu'avec les unités conventionnelles l'axe x' d'équation 1.10 se confondrait pratiquement avec l'axe des x. Dans la représentation avec ct et x – que nous n'utilisons pas dans ce livre – x' serait aussi presque le même que x sauf pour des vitesses v non négligeables par rapport à c.

Par ailleurs, dans le repère $(x,\ t)$, l'axe x' ne serait plus le symétrique de l'axe t' par rapport au rayon lumineux, car le rayon lumineux lui-même serait presque plat.

Repassons temporairement en unités relativistes. Le fait, quand v/c est petit (c'est-à-dire v est petit puisque $c = 1$), que l'axe des x' est presque le même que l'axe des x veut simplement dire qu'à des vitesses négligeables par rapport à c, les surfaces de simultanéité dans les deux référentiels sont essentiellement les mêmes, ce qu'elles sont exactement en mécanique newtonienne.

Cela illustre le fait que la description d'Einstein de l'espace-temps se ramène à la description de Newton si la vitesse relative des référentiels l'un par rapport à l'autre est beaucoup plus petite que la vitesse de la lumière. C'est un point important : la relativité einsteinienne ne bouleverse pas la mécanique newtonienne. La correction est négligeable quand v/c est petit. Seulement à grande vitesse de l'ordre au minimum de 30 000 km/s – ce qui est extrêmement rapide ! – commence-t-on à devoir tenir compte des corrections relativistes.

Nous pouvons retourner à présent à nos bonnes vieilles unités relativistes, avec $c = 1$, qui simplifient les équations. Et simplifions aussi notre diagramme en éliminant tout ce qui nous a servi à étudier la synchronicité dans le référentiel en mouvement, et en ne conservant que ce dont nous aurons besoin dans la suite.

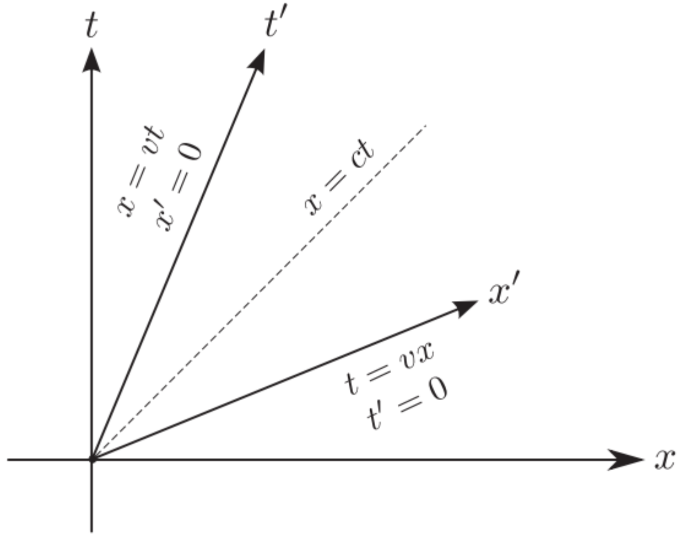

Figure 1.4 : Référentiels fixe et en mouvement de la relativité restreinte. Schéma simplifié.

La droite en pointillé d'équation $x = ct$, ou plus simplement $x = t$, représente la trajectoire d'un rayon lumineux émis depuis l'origine vers la droite. Elle fait un angle de 45° avec l'axe des x. C'est la bissectrice de l'angle formé par les axes x et t. C'est aussi la bissectrice de l'angle formé par les axes x' et t', car le premier a l'équation $t = vx$ et le second l'équation $x = vt$.

Nous avons découvert deux choses intéressantes. Premièrement, si la vitesse de la lumière est réellement la même dans tous les référentiels, et vous utilisez les rayons lumineux pour synchroniser les horloges, alors une paire d'événements qui sont synchrones dans un référentiel ne le sont pas dans l'autre, si les deux référentiels ont une vitesse relative l'un par rapport à l'autre. Deuxièmement, nous avons découvert ce que la synchronicité veut en réalité dire dans le référentiel en mouvement. Dans le diagramme de Minkowski, qui est fondamentalement attaché à *un repère* – celui que nous avons appelé "au repos" – les lignes d'événements synchrones dans le repère en mouvement ne sont pas des lignes horizontales. Ce sont les droites de pente v. Nous avons déterminé les directions des axes x' et t' dans le référentiel en mouvement de Lenny. Plus tard, nous allons déterminer comment marquer les unités sur ces axes.

Espace-temps

Faisons une pause pour voir où nous en sommes. Newton considérait l'espace et le temps comme deux concepts entièrement distincts. Pour lui, il y avait un espace, c'était notre espace repéré avec nos trois dimensions habituelles, et il y avait un temps universel, le même pour tout le monde. Mais des représentations comme les figures 1.3 et 1.4 révèlent quelque chose que Newton ne pouvait pas connaître. C'est qu'en passant d'un référentiel inertiel à un autre les coordonnées spatiales et temporelles se mêlent en quelque sorte. Par exemple, sur la figure 1.3 le point origine et le point b représentent deux événements ayant la même date $t' = 0$ dans le référentiel en mouvement. Mais dans le référentiel au repos le point b n'est non seulement pas à la même position spatiale que l'origine, mais pas à la même date non plus.

Trois ans après le premier article d'Einstein sur la relativité restreinte – un des quatre articles remarquables sur différents domaines de la physique qu'Einstein publia en 1905 – Hermann Minkowski compléta la révolution initiée par son ancien élève au Polytechnicum de Zurich. Dans une allocution lors de la 80ᵉ Assemblée des savants et médecins allemands, à Cologne en 1908, Minkowski déclara :

> Désormais l'espace en lui-même et le temps en lui-même sont destinés à s'évanouir comme des ombres, et seule pourra prétendre à une existence indépendante une espèce d'union de l'un et de l'autre.

Cette union est un espace à quatre dimensions, dénotées généralement x, y, z et t dans le référentiel qu'on a sélectionné. On l'appelle l'*espace-temps*. Certains l'appellent l'*espace de Minkowski*. Minkowski l'appelait l'*univers*.

Il choisit d'appeler les points de l'espace-temps des *événements*. Un événement, dans un référentiel, a quatre coordonnées, x, y, z et t. En appelant un point un événement Minkowski ne voulait pas dire qu'il s'y "passait" nécessairement quelque chose. En cela, la terminologie qu'il a introduite s'écarte légèrement de l'acception courante du mot événement. Il dénomma les trajectoires, qu'elles soient droites ou courbes, des objets dans la représentation qu'il construisit, des *lignes d'univers*. Par exemple la ligne $x' = 0$ est la ligne d'univers de Lenny.

Ce changement de perspective depuis l'espace et le temps séparés vers un espace-temps unique était une évolution radicale en 1908 [14], mais aujourd'hui les diagrammes d'espace-temps sont aussi familiers pour les physiciens que la paume de leur main.

---

14. Quand Minkowski a géométrisé l'espace-temps de la relativité restreinte (voir Section 1.5.1), Einstein fut d'abord sceptique sur l'utilité de mathématiser ainsi une théorie qui pour lui était essentiellement physique. Cependant, quelques années plus tard, après s'être colleté avec le calcul et la géométrie des tenseurs nécessaires pour la relativité générale, il reconnut que cette mathématisation était très utile.

Les événements de l'espace-temps sont des objets intrinsèques de la nature, sans lien avec un quelconque référentiel – de même qu'un point de l'univers n'a aucun lien avec un quelconque repère [15].

Un diagramme de Minkowski est une sorte de *carte de l'espace-temps*. Chaque événement de l'espace-temps est représenté comme un point sur cette carte, qui est une page de livre ou de document. Nous avons vu que la technique pour construire le diagramme est de choisir arbitrairement un référentiel galiléen dans l'espace-temps. Il devient le référentiel dit fixe. Il fournit les axes horizontaux et verticaux du diagramme et sert à positionner les événements sur la feuille.

Les événements (ou plus précisément les points représentant les événements) sont alors rangés dans le diagramme de telle sorte que deux événements de même position spatiale soient sur une droite verticale, et deux événements synchrones dans le référentiel, soient sur une droite horizontale. L'image dans le diagramme du référentiel fixe peut être vue comme un carrelage orthogonal.

Il se trouve que les lignes de positions fixes ou les lignes d'événements synchrones dans un autre référentiel galiléen *représentées dans ce premier référentiel* sont aussi très simples. Elles produisent un carrelage en perspective. Si nous avions pris un autre référentiel plus compliqué ce ne serait plus le cas. Nous aurions seulement, attaché à chaque point représentant un événement, deux coordonnées, une spatiale et une temporelle, et les lignes de même temps ou de même position, sur le diagramme, pourraient ne plus être

15. Nous laissons de côté ici la question philosophique de savoir si la géométrie de l'univers est intrinsèque ou bien est une conception que notre esprit construit en organisant nos perceptions.

des droites. On rencontrera cette situation dans la théorie de la relativité générale où le passage d'un référentiel à un autre sera plus compliqué qu'ici.

Il y a une différence importante, cependant, entre une carte géographique ordinaire et un diagramme de Minkowski. Une carte ordinaire reproduit à échelle réduite la *géométrie* de la région qu'elle représente (au moins tant que celle-ci est proche d'un plan). Mais nous ne sommes pas habitués à penser à la géométrie de l'espace-temps – d'autant moins que la notion de simultanéité y dépend du référentiel. Aussi la géométrie d'un diagramme de Minkowski est au premier abord déconcertante, car on n'y voit pas clairement le modèle réduit d'un espace-temps réel avec lequel nous serions familiers.

Enfin une erreur fréquente des néophytes, résultant de l'idée erronée que le diagramme de Minkowski serait l'espace-temps et ses référentiels en plus petits, est de penser que la représentation du référentiel mobile en quelque sorte bouge elle-même dans le diagramme de Minkowski – ce qui n'est absolument pas le cas.

Transformation de Lorentz

Un événement, autrement dit un point de l'espace-temps, peut être labellisé – étiqueté si vous préférez – par ses coordonnées dans le référentiel au repos, mais aussi par ses coordonnées dans le référentiel en mouvement. Il s'agit de deux descriptions du même événement. Et dire qu'un des référentiels est au repos et l'autre en mouvement est arbitraire. On pourrait les inverser, ou les considérer comme tous les deux en mouvement par rapport à un troisième, etc.

La question qui vient immédiatement à l'esprit est : comment passe-t-on d'une description à l'autre ? En d'autres termes, quelle est la *transformation de coordonnées* qui permet de passer des coordonnées t, x, y, z dans le référentiel au repos aux coordonnées t', x', y', z' dans le référentiel en mouvement ?

Une des hypothèses d'Einstein est que l'espace-temps est le même partout, comme un plan est le même en tout point. Cette identité de forme de l'espace-temps où qu'on le considère est ce qu'on appelle en mathématiques une *symétrie*. Voir le chapitre 7, Symétries et lois de conservation, du *Volume 1*, pour réviser plus précisément la notion de symétrie dans un espace.

Nous avons vu qu'on peut utiliser n'importe quel référentiel *galiléen* pour énoncer les lois de la physique et qu'elles doivent avoir des expressions identiques avec les coordonnées x, y, z et t, et avec les coordonnées x', y', z' et t', tout simplement car deux référentiels galiléens sont indistinguables du point de vue de la physique. Vous pouvez considérez cela comme une observation expérimentale (cf. le wagon sans fenêtre) ou comme un postulat.

Cela a des implications mathématiques sur les transformations permettant d'aller d'un système de coordonnées à l'autre. Par exemple, dans la section sur les référentiels newtoniens, nous avons rencontré les équations 1.1 et 1.2 reproduites ci-dessous

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \end{aligned} \tag{1.11}$$

permettant de passer des coordonnées dans un référentiel au coordonnées dans un autre. Ce sont des équations linéaires. Elles ne contiennent que des monômes à la puissance un des coordonnées. Maintenant que le temps n'est plus universel entre deux référentiels, elles ne vont pas survivre telles quelles. En particulier on ne va plus avoir simplement $t' = t$. Mais on aura toujours $x' = 0$ quand $x = vt$.

Il n'existe qu'une seule façon de modifier l'équation $x' = x - vt$ de telle sorte qu'elle reste linéaire en x et t, et qu'on ait toujours $x' = 0$ quand $x - vt = 0$. C'est de multiplier le terme de droite par un facteur dépendant seulement de la vélocité :

$$x' = (x - vt)f(v) \tag{1.12}$$

Pour l'instant la fonction $f(v)$ peut être n'importe quelle fonction. Mais Einstein avait un autre tour dans sa manche. Il argua de la symétrie entre le passage

$$(x,\ t)\ \rightarrow\ (x',\ t')$$

et le passage

$$(x',\ t')\ \rightarrow\ (x,\ t)$$

Rien en physique n'exige que le mouvement dans un sens soit représenté par $+v$ et dans l'autre sens par $-v$. Donc, dans l'équation 1.12, le coefficient correcteur $f(v)$ ne doit dépendre en réalité que de la magnitude de la vélocité c'est-à-dire seulement de la vitesse (considérée comme il est d'usage sans signe) Nous notons cette vitesse v, pour marquer qu'on parle de la valeur absolue de la vélocité. Donc l'équation 1.12 est marginalement corrigée en

$$x' = (x - vt)f(\mathrm{v}) \tag{1.13}$$

Qu'en est-il de t' ? Nous allons raisonner de la même façon que nous l'avons fait pour x'. Nous savons que $t' = 0$ chaque fois que $t = vx$. Sans plus de décorticage on voit qu'on a simplement interverti la coordonnée spatiale et la coordonnée temporelle. Donc a a aussi

$$t' = (t - vx)g(\mathrm{v}) \tag{1.14}$$

où g est une autre fonction dépendant seulement de v.

Notre tâche suivante est de montrer que f et g sont les mêmes. Pour l'instant nous avons simplement les transformations qu'on vient de calculer et qu'on peut réécrire en une seule double équation

$$\begin{aligned} x' &= (x - vt)f(\mathrm{v}) \\ t' &= (t - vx)g(\mathrm{v}) \end{aligned} \tag{1.15}$$

si l'on veut insister sur le fait qu'il s'agit d'*une* transformation des coordonnées.

Considérons un rayon lumineux émis depuis l'origine et suivi dans les deux référentiels. Appliquons le principe d'Einstein que la vitesse de la lumière est la même dans les deux référentiels. La trajectoire du rayon lumineux a l'équation $x = t$ dans le référentiel au repos. C'est une droite de pente 1, car c'est la trajectoire de quelque chose qui va à la vitesse de la lumière. Elle doit aussi avoir, pour les mêmes raisons, l'équation $x' = t'$ dans le référentiel en mouvement. Fixant $x = t$ dans les équations 1.15 et imposant que x' doit alors être égal à t', implique que

$$f(\mathrm{v}) = g(\mathrm{v})$$

Ainsi le fait que la vitesse de la lumière soit la même dans tous les référentiels galiléens – car c'est une loi de la nature et que les référentiels galiléens sont indistinguables du point de vue des lois de la nature – implique que $f = g$. Les équations 1.15 se simplifient en

$$\begin{aligned} x' &= (x - vt) f(\mathrm{v}) \\ t' &= (t - vx) f(\mathrm{v}) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Il reste à déterminer la fonction f. Pour ce faire Einstein utilisa un dernier ingrédient. En substance, il demanda : "Qui peut affirmer que son propre référentiel est bien celui au repos et l'autre celui en mouvement ?" En fait chaque observateur est au repos par rapport à son propre référentiel et voit l'autre en mouvement. Un observateur voit l'autre se mouvoir avec la vélocité v et l'autre voit le premier se mouvoir avec la vélocité $-v$. Comme le second observateur peut aussi appliquer le jeu d'équations 1.16, en utilisant la vélocité avec laquelle il voit le premier se mouvoir, il écrira quant à lui

$$\begin{aligned} x &= (x' + vt') f(\mathrm{v}) \\ t &= (t' + vx') f(\mathrm{v}) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Nous voilà arrivés à deux jeux d'équations reliant $(x,\ t)$ et $(x',\ t')$: le jeu d'équations 1.17 et le jeu d'équations 1.16. Sont-ils compatibles entre eux ? Après tout, nous aurions pu aussi obtenir les expressions pour x et t en fonction de x' et t' en résolvant pour x et t le système 1.16.

Vérifions la compatibilité. Bien sûr, cela imposera des contraintes sur f. C'est ainsi qu'on va la déterminer.

Si nous prenons les expressions de x' et t' données par les équations 1.16 et les introduisons dans les équations 1.17, qu'obtient-on ? Nous obtenons x en termes de x et t, et t

en termes de x et t. Regarder l'expression de x en termes de x et t suffit. Nous obtenons

$$\begin{aligned} x &= (x' + vt')f(\mathrm{v}) \\ &= (x - vt)f^2(\mathrm{v}) + v(t - vx)f^2(\mathrm{v}) \\ &= xf^2(\mathrm{v}) - v^2 x f^2(\mathrm{v}) \\ &= xf^2(\mathrm{v})(1 - v^2) \end{aligned}$$

Cela ne peut être vrai que si

$$f^2(\mathrm{v})(1 - v^2) = 1$$

ou encore

$$f^2(\mathrm{v}) = \frac{1}{1 - v^2}$$

soit

$$f(\mathrm{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{1.18}$$

Nous allons voir dans un instant pourquoi f ne peut pas être la racine négative. Retournant au jeu d'équations 1.16, nous pouvons à présent l'écrire

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} && (1.19) \\ t' &= \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}} && (1.20) \end{aligned}}$$

Pourquoi on ne pouvait pas prendre la racine négative de $(1 - v^2)$? Parce que quand $v = 0$ on veut retomber sur nos pieds avec $x' = x$ et non pas $x' = -x$.

Observez que les équations 1.19 et 1.20 ont la même forme sauf que les rôles de x et t sont intervertis. Le numérateur dans 1.19 est $x-vt$, tandis que dans 1.20 c'est $t-vx$. Et dans les deux cas on divise par le facteur $\sqrt{1-v^2}$.

Nous sommes parvenus aux fameuses *équations de Lorentz* permettant de passer des coordonnées $(x,\ t)$ dans le référentiel au repos aux coordonnées $(x',\ t')$ dans le référentiel en mouvement. Elles sont la conséquence du fait qu'on veuille que la vitesse de la lumière ait la même valeur 1 dans tous les référentiels inertiels. Nous verrons un peu plus loin où réintroduire le facteur c quand on travaille en unités conventionnelles.

Nous avons essentiellement suivi la démonstration d'Einstein dans son papier de 1905 pour établir les équations de Lorentz. Je ne l'ai pas relu depuis plus d'un demi-siècle, mais il m'avait fait à l'époque une très forte impression qui dure encore.

Vous vous demandez peut-être pourquoi les équations 1.19 et 1.20 portent le nom d'équations de Lorentz. La section suivante y répond.

1.2.3 Aparté historique

Einstein ne fut pas le premier à découvrir les équations 1.19 et 1.20. L'honneur en revient au physicien néerlandais Hendrik Lorentz. Lorentz et d'autres mêmes avant lui – notamment George FitzGerald – avaient spéculé sur le fait que la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell pour rester cohérente exigeait que les objets en mouvement se contractent dans la direction de leur déplacement, un phénomène que nous appelons aujourd'hui *contraction de Lorentz.* Dès 1900 Lorentz avait écrit les équations de la transformation qui porte son nom et qui étaient motivées par cette contraction des objets en mouvement. Mais les vues des prédécesseurs d'Einstein étaient différentes des siennes. D'une certaine manière elles restaient agrippées au passé plutôt que tournées vers l'avenir. Lorentz et FitzGerald imaginaient que l'interaction entre l'éther stationnaire et les atomes en mouvement de toute la matière ordinaire causaient une compression de cette matière dans la direction du mouvement. En première approximation la pression contractait toute matière avec un coefficient uniforme si bien que l'effet était équivalent à une transformation des coordonnées.

Quelques jours avant la publication de l'article d'Einstein, le grand mathématicien français Henri Poincaré publia dans les Comptes Rendus de l'Académie des sciences un article dans lequel il parvenait aux équations de Lorentz à partir de l'exigence initiale que les équations de Maxwell conservent la même forme dans tous les référentiels inertiels [16].

Mais aucun de ces travaux n'avait la clarté, la simplicité et la généralité du raisonnement d'Einstein.

1.2.4 Retour aux équations

Si nous connaissons les coordonnées d'un événement dans le référentiel au repos, les équations 1.19 et 1.20 nous donnent les coordonnées du même événement dans le référentiel en mouvement. Peut-on aller dans l'autre sens ? C'est-à-dire, peut-on calculer les coordonnées dans le référentiel au repos à partir des coordonnées dans le référentiel en mouvement ?

16. On trouvera un récapitulatif historique et une présentation détaillée des travaux de Poincaré en relativité dans la conférence donnée en 2012 par Thibault Damour dont le texte est ici : `http://www.ihes.fr/~vanhove/Slides/damour-IHES-novembre2012.pdf`

La réponse est oui. Et pour cela, il y a deux façons possibles de faire. Nous pouvons résoudre les équations 1.19 et 1.20 pour exprimer $(x,\ t)$ en fonction de $(x',\ t')$. Mais il y a une méthode plus simple. Et si la théorie est cohérente, les deux méthodes doivent bien sûr produire le même résultat.

Il suffit que nous réalisions qu'il y a une symétrie entre le référentiel au repos et celui en mouvement. C'est un argument déjà utilisé par Einstein : aucun observateur ne peut dire "mon référentiel est bien celui au repos dans l'absolu, et c'est l'autre qui bouge". Donc pour calculer $(x,\ t)$ en fonction de $(x',\ t')$ il suffit d'intervertir les deux jeux de coordonnées dans les équations 1.19 et 1.20, sans oublier de changer v et $-v$. Nous obtenons

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{1.21}$$

$$t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{1.22}$$

En unités conventionnelles

Que deviennent les équations si nous travaillons avec des unités conventionnelles dans lesquelles c n'est pas égal à 1 ? Nous pourrions naturellement refaire tous nos calculs en prenant bien soin de toujours inclure c là où il faut. Il n'y a en effet rien de magique à la disparition de c en unités relativistes ; c'est simplement que c'est un facteur égal à 1 à différents endroits des équations. Mais là aussi il y a plus simple. Nous l'avons déjà dit : il suffit de nous assurer que nos équations soient cohérentes du point de vue des dimensions, c'est-à-dire des unités physiques.

Ainsi l'expression $x - vt$ ne nécessite pas de correction, car elle est cohérente en dimension. En effet x et vt sont toutes les deux des longueurs, en mètres ou en années-lumière selon les unités avec lesquelles on travaille. En revanche l'expression $t-vx$ n'est pas cohérente en dimension, car t est un temps, et vx est une longueur au carré divisée par un temps. Il n'y a qu'une seule façon de corriger l'expression afin qu'elle soit cohérente en dimension ; c'est de remplacer $t - vx$ par

$$t - \frac{v}{c^2}x$$

Maintenant les deux termes de l'expression sont des temps. Et si nous travaillons dans des unités où $c = 1$ elle se ramène naturellement à $t - vx$.

De même le facteur $\sqrt{1-v^2}$ qui apparaît aux dénominateurs n'est pas cohérent en dimension. Il faut remplacer v par v/c, qui devient alors une grandeur sans dimension qu'on peut sans problème soustraire à 1. Avec ces modifications la transformation de Lorentz prend sa forme traditionnelle

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{1.23}$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{1.24}$$

Notez que quand v est petite comparée à la vitesse de la lumière, $(v/c)^2$ est encore beaucoup plus petit. Par exemple, si $v/c = 10\%$ alors $(v/c)^2 = 1\%$. Si $v/c = 10^{-5}$ (ce qui fait quand même 3 kilomètres par seconde), alors $(v/c)^2$ est vraiment un nombre très petit, et l'expression $\sqrt{1-(v/c)^2}$ au dénominateur est très proche de 1. Dans ce cas, avec une très bonne approximation, on peut écrire

$$x' = x - vt$$

C'est la bonne vieille transformation de Newton de la coordonnée spatiale. On l'a apprise à l'école primaire et révisée au collège : supposez que vous et une autre voiture partiez ensemble d'un point origine. L'autre voiture roule à 130 km/h, tandis que vous la suivez à seulement 90 km/h. Au bout d'une heure, la voiture devant vous aura parcouru 130 km, mais elle sera seulement alors 40 km devant vous.

Tournons-nous vers la transformation de la coordonnée temporelle. Et prenons pour v une vitesse déjà très rapide de 10 km/s. Alors

$$\frac{v}{c^2} = \frac{10 \times 10^3}{9 \times 10^{16}} = 1,1 \times 10^{-13}$$

Là encore avec une très bonne approximation, sauf à des distances de milliards de kilomètres, la seconde équation de la transformation de Lorentz redevient l'équation newtonienne

$$t' = t$$

Et si la vitesse v est moindre, c'est encore plus vrai.

En résumé, pour des référentiels en déplacement l'un par rapport à l'autre à une vitesse faible comparée à la vitesse de la lumière, la transformation de Lorentz se ramène à la transformation de Newton par laquelle nous avions commencé ce chapitre, section 1.2.1. Seulement quand le ratio v/c dépasse 10% ou 20%, la correction relativiste devient importante, voire énorme pour des vitesses approchant celles de la lumière.

Un peu de terminologie :

- le ratio v/c s'appelle parfois la vitesse réduite et est dénoté β
- le facteur $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ s'appelle le *facteur de Lorentz* et est dénoté γ
- l'inverse du facteur Lorentz, c'est-à-dire $\sqrt{1-(v/c)^2}$, est dénoté α et s'appelle aussi le *facteur de contraction*, pour des raisons que nous allons bientôt voir.

Les autres axes spatiaux

Les équations 1,19 et 1.20, ou de manière équivalente en unités conventionnelles les équations 1.23 et 1.24, sont les équations de la transformation de Lorentz. Qu'arrive-t-il aux autres dimensions spatiales que nous avons ignorées jusqu'ici ? Rappelez-vous que, si l'on reste dans des considérations seulement spatiales, l'origine du référentiel en mouvement se déplace le long de l'axe des x de votre repère. S'il n'y a qu'une seule dimension spatiale les deux axes spatiaux sont l'un sur l'autre, dans le sens que quand je marche le long de la rangée du premier rang ma direction de déplacement est la même que la direction de la rangée.

Mais attention, la manipulation du diagramme de Minkowski est plus subtile qu'il n'y paraît. Dans cette représentation, les référentiels n'ont effectivement qu'une seule dimension spatiale, mais il y a aussi l'axe du temps t du référentiel au repos. Alors on a vu que ce qu'on a appelé l'axe x', c'est-à-dire l'ensemble des points synchrones avec $(0,\ 0)$ *dans le référentiel en mouvement*, ne se confond pas avec l'axe des x sur le diagramme. De même l'axe du temps t', c'est-à-dire la ligne d'univers de Lenny, ne se confond pas avec l'axe du temps t.

Prenons à présent aussi en compte les axes y et z de votre référentiel. Le mien a maintenant aussi trois dimensions spatiales. Je me déplace toujours le long de votre axe des x, et mon repère spatial est simplement en translation – je ne fais pas de rotation ou de cabriole. Comment les coordonnées y et z se transforment-elles dans mon référentiel ? Est-ce qu'elles restent les mêmes ou bien, comme x, changent-elles ?

Réfléchissons comme un physicien. Cela permet souvent de trouver la réponse à une question sans avoir besoin de faire des calculs compliqués. L'article d'Einstein de 1905 mentionné plus haut est un modèle du genre, c'est-à-dire un modèle de raisonnement physique court-circuitant beaucoup de mathématiques [17]. Qu'est-ce que signifie y ? Supposez que je me déplace le long de l'axe des x et que vous soyez assis immobile sur l'axe des x. Vous allongez votre bras dans la direction y, et moi aussi. Supposez encore que quand nous sommes tous les deux immobiles nos bras aient la même longueur. Maintenant que je me déplace, quand je passe devant vous mon bras va-t-il être plus long ou plus court que le vôtre ?

Par la symétrie de la situation, il est clair que nos bras vont encore avoir la même longueur, car il n'y pas de raison que l'un devienne plus court que l'autre. Par conséquent, le reste de la transformation de Lorentz doit être $y' = y$ et $z' = z$. En d'autres termes, les choses intéressantes se passent seulement dans le plan $(x,\ t)$, où le mouvement relatif est le long de l'axe de x. Les coordonnées x et t se mêlent selon les équations qu'on a vues pour donner x' et t'. Les autres coordonnées y et z restent passives.

17. Un autre exemple est le calcul de la forme d'une bulle de savon partiellement gonflée au bout d'un tube de section circulaire dans lequel on souffle de l'air. Montrer que la bulle est une partie de sphère.

Pour mémoire, écrivons les quatre équations de la transformation de Lorentz complète, avec les unités conventionnelles (donc c apparaît). Les coordonnées sans le signe prime sont celles dans le référentiel au repos. Les coordonnées avec le signe prime sont celles dans le référentiel en mouvement :

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{1.25}$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{1.26}$$

$$y' = y \tag{1.27}$$

$$z' = z \tag{1.28}$$

1.2.5 Rien ne va plus vite que la lumière

Un coup d'œil aux équations 1.25 et 1.26 montre que quelque chose de bizarre se passe si la vitesse relative v des deux référentiels est supérieure à c. Dans ce cas $1 - (v/c)^2$ devient négatif, et sa racine carrée devient imaginaire. Cela n'a clairement pas de sens. Les bâtons de 1 mètre et les horloges peuvent seulement mesurer des coordonnées à valeurs réelles.

La solution d'Einstein à ce paradoxe est d'introduire un nouveau postulat : aucun système matériel ne peut aller plus vite que la vitesse de la lumière. Plus précisément, aucun système matériel ne peut se déplacer plus rapidement que la lumière relativement à un autre système matériel par lequel il peut être observé.

Ainsi nous n'avons pas besoin de considérer une vitesse v d'un référentiel par rapport à un autre plus grande que c. Ce principe est l'une des pierres angulaires de la physique moderne. Il est formulé en général comme ceci : *aucun signal ne peut aller plus vite que la lumière*. Mais comme les signaux sont composés d'éléments matériels – ne serait-ce qu'un photon – signal ou système matériel ici sont la même chose.

Un caveat s'impose cependant : nous verrons dans le *Volume 5* à venir sur la cosmologie [18] que l'univers est en expansion. Deux points quelconques de l'univers, même quand rien d'autre ne se passe, ont leur distance $D(t)$ qui s'accroît selon l'équation

$$\frac{\dot{D}(t)}{D(t)} = H(t)$$

où $H(t)$ est la constante de Hubble (elle est constante dans l'espace, mais pas nécessairement dans le temps). Alors des points éloignés de l'univers peuvent s'éloigner l'un de l'autre à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière. Mais ils ne peuvent pas être considérés comme transportant avec eux deux référentiels pouvant faire mutuellement des observations l'un sur l'autre.

1.3 Transformation de Lorentz générale

Les quatre équations 1.25 à 1.28 nous rappellent que nous n'avons considéré que la variante la plus simple de transformation de Lorentz : celle correspondant à un référentiel en mouvement de translation le long de l'axe x du repère au repos, et où l'axe x' du repère en mouvement (mais pas tel

18. Les notes de cours en anglais sur la cosmologie sont disponibles à `https://www.lapasserelle.com/cosmology`.

que représenté dans le diagramme de Minkowski) se superpose avec l'axe x, comme quand Lenny se déplace le long de la première rangée dans la salle de classe, qui est l'axe des x et des x', et les autres autres axes, de Lenny et de la salle, restent parallèles respectivement.

Un tel mouvement de translation le long de l'un des axes à la fois du repère au repos et du repère en mouvement est simple. Mais nous ne nous trouvons pas toujours dans une situation aussi simple. Même quand les axes sont parallèles deux à deux, la translation peut se dérouler dans une direction différente d'un axe. Les deux référentiels peuvent aussi avoir subi une rotation l'un par rapport à l'autre. Que deviennent alors les équations de la transformation de Lorentz ? Un peu de géométrie des déplacements dans l'espace vient à la rescousse pour déterminer comment passer de $(t,\ x,\ y,\ z)$ à $(t',\ x',\ y',\ z')$.

Tout d'abord dans le cas de deux repère avec des axes parallèles respectivement, mais en translation le long d'une direction autre que l'un de leurs axes, il est aisé de faire un changement de repère, sur chacun d'eux, pour être ramené au cas où x et x' coïncident spatialement.

Dans le cas où les axes des deux repères ne sont pas parallèles deux à deux, la transformation de Lorentz générale est toujours équivalente à :

1. Une première rotation dans l'espace du repère en mouvement pour l'aligner avec le repère fixe.
2. Une transformation de Lorentz avec des formules similaires aux équations 1.25 à 1.28.
3. Une deuxième rotation dans l'espace pour restaurer l'orientation initiale du repère mobile.

Tant que vous vous assurez que votre théorie est invariante par rapport à la transformation de Lorentz *simple* (équations 1.25 à 1.28) *et* par rapport aux rotations, elle sera invariante par rapport à n'importe quelle transformation de Lorentz.

Un point de terminologie : les transformations de Lorentz correspondant à des déplacements d'un repère par rapport à un autre s'appellent parfois en anglais des *boosts* (poussées). Par exemple, la transformation de Lorentz des équations 1.25 à 1.28 est un *boost* le long de l'axe des x.

1.4 Contraction des longueurs et dilatation du temps

Nous avons fait le plus difficile. À partir des idées de base de la relativité restreinte, avec lesquelles nous nous sommes familiarisés, nous sommes finalement parvenus aux équations fondamentales qui en découlent : la transformation de Lorentz.

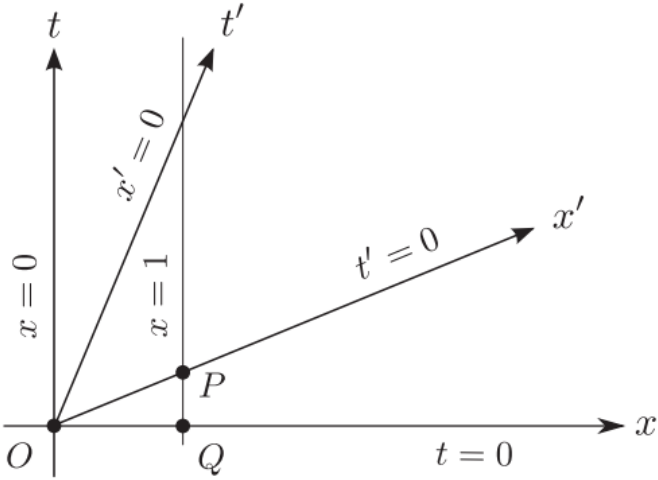

Figure 1.5 : Contraction des longueurs.

Nous avons à présent tous les outils nécessaires pour étudier les deux résultats contre-intuitifs les plus célèbres de la relativité restreinte : la contraction des longueurs et le dilatation du temps. Comme à l'habitude, si nous progressons pas à pas, ils sont faciles à comprendre.

Quand vous arrivez à un résultat qui vous laisse perplexe, le mieux est de dessiner un diagramme d'espace-temps. Ne dérangez pas un de vos amis physiciens, ne m'envoyez pas un courriel – dessiner un diagramme.

Contraction des longueurs

Voici l'expérience de pensée que nous allons faire. Vous êtes assis dans le référentiel au repos – la rangée de devant de la salle de classe, ou bien le long de la voie de chemin de fer si vous préférez les illustrations ferroviaires. Vous avez un bâton de 1 mètre avec vous et je passe devant vous, me déplaçant vers la droite. Tandis que j'avance, je me demande : quelle est la longueur de votre bâton ?

Bien sûr ma question est *relativement à mes bâtons de 1 mètre*. Mais je dois faire très attention à ce que je veux dire par là. En particulier, si je ne suis pas soigneux je risque de mesurer les extrémités de votre bâton à des dates différentes. Souvenez-vous que des événements synchrones dans votre référentiel ne le sont pas dans le mien.

Je veux mesurer la distance entre les deux extrémités de votre bâton à deux dates synchrones pour moi. Pourquoi je veux faire ça ? Parce que c'est ce que je veux dire par longueur de votre bâton dans mon référentiel. C'est la *définition* de la longueur de votre bâton dans mon référentiel.

La figure 1.5 est un diagramme d'espace-temps permettant de mesurer votre bâton dans votre référentiel ainsi que dans le mien. Dans votre référentiel, votre bâton est le segment OQ le long de l'axe des x, qui est la surface [19] de simultanéité avec $t = 0$ dans votre référentiel. Le bâton de 1 mètre est au repos, et les lignes d'univers de ses extrémités sont les deux droites verticales $x = 0$ et $x = 1$.

Dans mon référentiel en mouvement, les deux extrémités du bâton *au même temps* $t' = 0$ sont les événements O et P. Vous pouvez dire si vous voulez que le bâton est représenté par le segment OP, mais rappelez-vous que le bâton bouge pour moi. Repérer ses deux extrémités aux mêmes dates pour moi, cependant, est parfaitement bien défini.

Je veux connaître les coordonnées spatiales de O et de P dans mon référentiel. La coordonnées spatiale de O est très simple, c'est la même dans les deux référentiels, c'est $x' = x = 0$. Pour calculer la coordonnées spatiale x' de P, nous allons utiliser notre nouvel outil très puissant : la transformation de Lorentz.

Notons que P est à l'intersection des droites $x = 1$ et $t' = 0$. Nous travaillons pour simplifier en unités relativistes. L'équation 1.20 de la transformation de Lorentz indique que $t' = 0$ est équivalent à $t = vx$. En remplaçant donc t par vx dans l'équation 1.20 on obtient

$$x' = \frac{x - v^2 x}{\sqrt{1 - v^2}}$$

soit

$$x' = x\sqrt{1 - v^2}$$

19. Rappelez-vous qu'on parle de "surface" bien qu'ici ce soit une ligne unidimensionnelle car si on tenait compte des coordonnées spatiales y et z serait un espace avec plus de dimensions.

C'est la relation entre x et x' sur la droite de temps synchrones à 0 dans mon référentiel. C'est-à-dire sur ce qu'on a appelé mon axe des x'. Pour x par 1, cela donne

$$x' = \sqrt{1 - v^2}$$

Voilà notre premier résultat sur les paradoxes de la relativité restreinte ! L'observateur en mouvement découvre qu'à un instant donné – ce qui veut dire le long d'une surface de simultanéité pour lui, par exemple $t' = 0$ – les deux extrémités de votre bâton de 1 mètre sont, pour lui, séparées seulement par la distance $\sqrt{1 - v^2}$. Le bâton de 1 mètre pour vous, au repos dans votre référentiel, lui apparaît *plus court.*

Cela peut sembler une contradiction que le même bâton ait deux longueurs différentes dans votre référentiel et dans le mien. Notez, cependant, que les deux observateurs que nous sommes *ne parlons pas de la même chose.* Dans le référentiel au repos, nous parlons de la distance entre les événements O et Q, mesurée à l'aide d'un bâton de 1 mètre du référentiel au repos. On trouve naturellement 1. Dans le référentiel en mouvement, nous parlons de la distance entre les événements O et P, mesurée à l'aide d'un de *mes* bâtons de 1 mètre. Les événements P et Q ne sont pas les mêmes événements dans l'espace-temps, il n'y a donc pas de contradiction à trouver que OP est plus court dans mes coordonnées spatiales que OQ dans les vôtres.

Notez aussi qu'il semble qu'il soit plus facile de concevoir deux événements au temps $t = 0$ dans le référentiel au repos, que deux événements au temps $t' = 0$ dans le référentiel en mouvement. Mais c'est une illusion d'optique. Pour moi c'est le temps $t' = 0$ qui est plus facile à concevoir. Et si vous avez l'impression que je dois faire des manipulations compliquées pour mesurer la distance entre deux événements de même temps t', la même chose est en réalité vraie pour vous avec deux événements de même temps t : vous devez aussi faire des manips de synchronicité.

Ce qui est vrai en revanche est que le bâton que nous avons considéré était au repos dans votre référentiel, mais pas dans le mien. La situation n'était pas symétrique. Cela nous conduit naturellement à l'idée du calcul opposé. Il est laissé comme exercice au lecteur ou à la lectrice.

Exercice 1.1 : On considère un bâton fixe dans le référentiel en mouvement, de longueur 1 entre ses deux extrémités. Mesurez la distance qui les séparent dans le référentiel au repos.

Conseil : N'oubliez pas de commencer par dessiner un diagramme.

Pour vous aider, si nécessaire, voici le début de la solution. Pensez au bâton en mouvement, c'est-à-dire fixe dans mon référentiel. Il est observé par quelqu'un dans le référentiel au repos. La figure 1.6 illustre la situation. Si le bâton a la longueur 1 dans *son* référentiel au repos – c'est-à-dire le mien, qui est en mouvement –, et que son extrémité de droite passe à un moment donné par l'événement Q, que savons-nous de sa ligne d'univers ? Est-ce $x = 1$? Non ! Le bâton fait 1 mètre dans le référentiel en mouvement, ce qui veut dire que son extrémité au temps $t' = 0$ est à la position $x' = 1$. L'observateur au repos voit bien le bâton comme ayant la longueur OQ car ce sont les événements par lesquels passent ses deux extrémités au même temps

$t = 0$. Mais la coordonnée x de Q n'est pas 1. C'est une certaine valeur qu'on peut calculer avec la transformation de Lorentz.

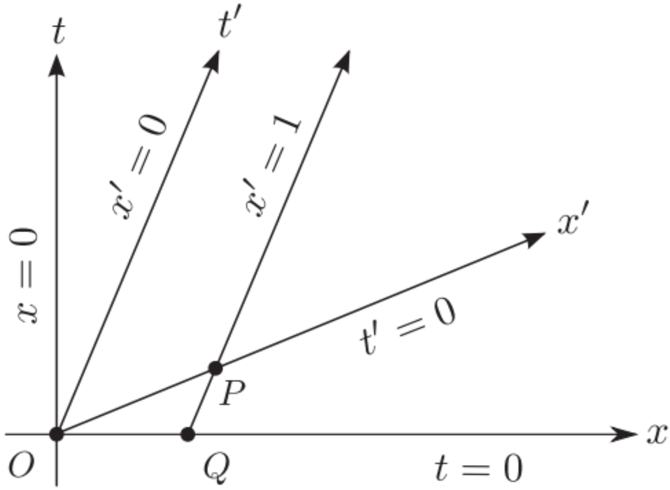

Figure 1.6 : Exercice sur la contraction des longueurs.

Quand vous faites le calcul, vous devez tomber sur $x = \sqrt{1 - v^2}$. C'est-à-dire que le bâton est encore une fois raccourci par le facteur $\alpha = \sqrt{1 - v^2}$ qui s'appelle, comme on l'a dit, le facteur de contraction.

En résumé les bâtons en mouvement apparaissent raccourcis aux yeux d'un observateur dans le référentiel fixe, et les bâtons au repos apparaissent raccourcis aux yeux d'un observateur dans le référentiel mobile. Il n'y a pas de contradiction. Encore une fois, les deux observateurs parlent de choses différentes. L'observateur au repos parle de distances mesurées en des temps synchrones pour lui. De même fait l'observateur en mouvement. Mais les événements synchrones dans un référentiel ne le sont pas dans l'autre, donc les observateurs ne font pas des mesures sur les mêmes événements. Notez enfin que "faire des mesures spatiales sur des événements" veut a priori dire "au même moment" dans son référentiel.

Dilatation du temps

La dilatation du temps est un autre paradoxe qui s'analyse de la même manière. Supposons que j'aie une montre bracelet – c'est donc une horloge en mouvement par rapport au référentiel au repos. Sa ligne d'univers est simplement ma ligne d'univers $x' = 0$, figure 1.7.

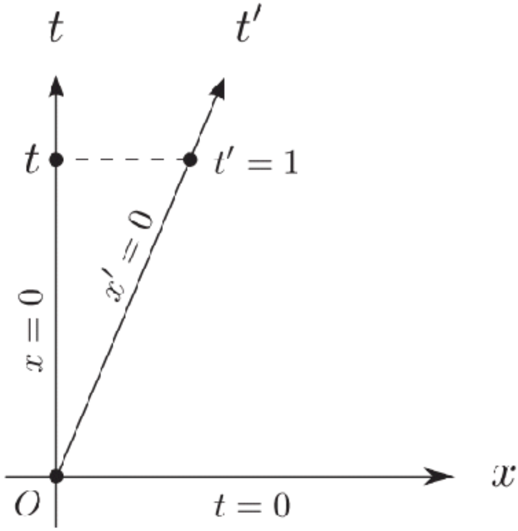

Figure 1.7 : Dilatation du temps.

Voici la question que nous nous posons : quand ma montre marque $t' = 1$ dans mon référentiel et que je suis à un certain événement, quel est le temps de cet événement dans votre référentiel ? Soit dit en passant, ma montre est excellente, très précise, d'une célèbre marque suisse. Si vous ne me croyez pas, je l'ai achetée à un horloger qui les vendait en plein vent au marché 15 euros pièce. Je veux savoir si la montre de bazar que j'aperçois à votre poignet marque la même heure quand nous passons par le même événement – c'est-à-dire le même point sur le diagramme de Minkowski.

La ligne horizontale en pointillé sur la figure est une surface que *vous* appelez synchrone. Nous avons besoin de deux choses pour calculer la valeur t dans votre référentiel. Tout d'abord, ma montre se déplace sur la droite $x' = 0$, c'est-à-dire mon axe t'. Et nous savons aussi que $t' = 1$ à l'événement qui nous intéresse. Utilisons une fois de plus la transformation de Lorentz, l'équation 1.22 cette fois-ci :

$$t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1 - v^2}}$$

On remplace x' par 0, et t' par 1, et on obtient

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Comme le dénominateur est plus petit que 1, le temps t est plus grand que 1. En d'autres termes, l'intervalle de temps entre l'origine et l'événement où nous regardons tous les deux nos montres est plus grand dans votre référentiel que dans le mien. Soyons précis : quand je dis que "vous regardez votre montre" je veux dire que vous regardez l'horloge de votre référentiel qui se trouve au même point spatial que moi quand ma montre bracelet marque 1. Souvenez-vous que votre référentiel est rempli d'horloges au repos, toutes synchronisées afin que vous sachiez l'heure n'importe où – comme on a de nos jours des pendulettes un peu partout chez soi, et que c'est un pensum de changer d'heure deux fois par an. Mon référentiel aussi a des horloges partout, mais là je ne faisais que regarder l'heure à mon poignet [20].

En somme le temps s'écoule plus rapidement pour l'observateur au repos que pour celui en mouvement. Pour ce dernier les secondes sont en quelque sorte dilatées.

Le paradoxe des jumeaux

La dilatation temporelle est à l'origine du célèbre paradoxe des jumeaux. On considère deux jumeaux, l'un au repos, appelons-le Castor, et l'autre en mouvement, appelons-le Pollux. Ils étaient tous les deux au même événement $(0,\ 0)$ lors de leur naissance. Castor reste à l'origine de son référentiel au repos. Sa ligne d'univers est la droite verticale $x = 0$. Pollux quant à lui se déplace avec la vélocité v, comme on l'a vu à maintes reprises. La chose nouvelle est que quand Pollux atteint le temps $t' = 1$, il fait demi-tour et revient avec la vélocité $-v$ vers Castor, figure 1.8.

20. Voici une façon simple de concevoir la dilatation du temps, qui est certainement paradoxale mais néanmoins un phénomène très réel : considérez une particule qui arrive sur Terre émise par le Soleil et qui a voyagé à une vitesse proche de celle de la lumière. Vue par nous elle a mis environ 8 mn pour venir. Cependant de nombreuses particules émises par le Soleil ont des durées de vie extrêmement brèves mesurées en microsecondes. Alors la particule qui se désintègre au bout de mettons deux microsecondes a pu voyager pendant 8 mn ? Oui, à sa montre bracelet la particule n'a vu passer qu'un très bref instant et ne s'est pas encore désintégrée. Tandis que *dans notre référentiel* elle est partie il y a environ 8 mn.

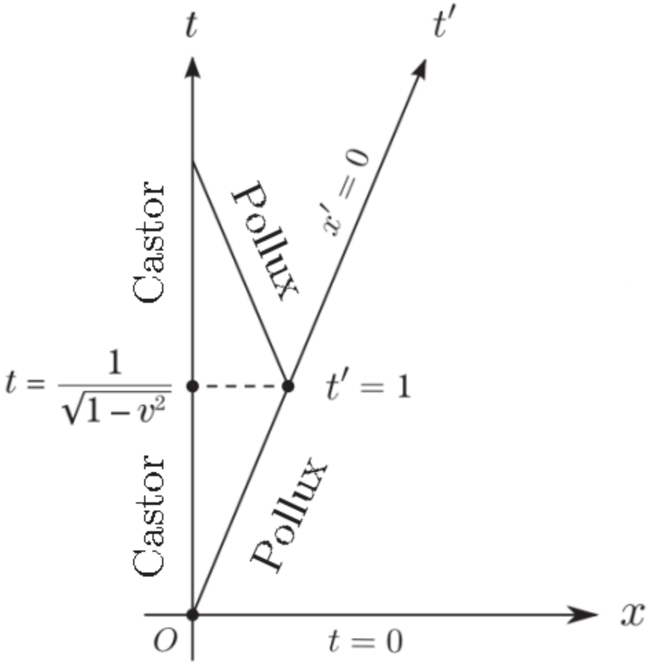

Figure 1.8 : Paradoxe des jumeaux.

Au moment où Pollux fait demi-tour, son temps est $t' = 1$, mais mesuré dans le référentiel de Castor c'est $t = 1/\sqrt{1 - v^2}$. Quand il rejoint de nouveau Castor, comme les deux parties de son voyage sont en sens inverse l'une de l'autre mais que ça ne change rien au terme v^2, à sa montre Pollux a le temps $t' = 2$. Mais Castor le voit revenir au temps

$$t = \frac{2}{\sqrt{1 - v^2}}$$

En d'autres termes, étant donné que les horloges biologiques sont des horloges comme les autres, quand ils se retrouvent les jumeaux n'ont plus le même âge ! Celui qui a voyagé est revenu un peu plus jeune que celui qui est resté au repos.

Ce phénomène laisse souvent les gens perplexes. Pollux revient plus jeune que Castor dans le référentiel de Castor. Est-ce à dire que Castor, quand les deux frères se retrouvent, est vu comme plus jeune que Pollux dans le référentiel de Pollux ? La réponse est non. Observez en efjet qu'on ne peut pas renverser le raisonnement. Du point de vue du jumeaux voyageur, son frère n'est pas plus jeune quand ils se retrouvent. Pourquoi ne peut-on pas renverser le raisonnement ? Parce que le référentiel de Pollux n'est pas un référentiel inertiel, en tout cas pas au moment où il fait demi-tour. Il subit alors une forte accélération.

Voici un exercice pour approfondir notre compréhension du paradoxe.

Exercice 1.2 : Dans la figure 1.8, Pollux non seulement change de direction, mais ce faisant passe d'un référentiel inertiel de vélocité v à un référentiel inertiel de vélocité $-v$.

a) **Utiliser la transformation de Lorentz pour montrer que tant que Pollux n'a pas fait demi-tour, la relation entre les jumeaux est symétrique. Chaque jumeau voit son frère vieillir moins vite que lui-même.**

b) **Utiliser les diagrammes d'espace-temps pour montrer que le changement abrupt de référentiel inertiel par le jumeau voyageur bouleverse aussi sa notion de simultanéité. Dans le nouveau référentiel de Pollux, après le demi-tour, Castor prend un soudain coup de vieux.**

Une autre source de confusion vient tout simplement de la géométrie. Sur la figure 1.7, rappelez-vous que la durée, dans le référentiel en mouvement, de l'événement O à l'événement $(x' = 0,\ t' = 1)$ est plus courte que celle, dans le référentiel au repos, de l'événement O à l'événement $(x = 0,\ t)$, où t est relié à t' par la ligne pointillée. On a $t = t'/\sqrt{1 - v^2}$.

Si on se fiait naïvement aux longueurs des segments sur le dessin, il semblerait que la première durée soit plus longue que la seconde. Mais c'est parce que les longueurs ou les durées en théorie de la relativité ne correspondent pas simplement aux longueurs des segments sur le diagramme de Minkowski. Le diagramme peut nous induire en erreur si nous l'utilisons sans précaution.

En fait, ces différents puzzles vont nous conduire à l'une des notions centrales de la théorie de la relativité, le concept d'*invariant*[21]. Nous discuterons en détail de ce concept dans la section 1.5.

La Coccinelle et la Limousine

Tournons-nous vers un autre paradoxe appelé parfois aux États-Unis Le Polonais dans la grange (les Belges l'appelleraient Le Français dans la grange), mais que les Polonais préfèrent appeler La Coccinelle et la Limousine.

21. Einstein a dit plus tard qu'il aurait préféré le nom de *théorie de l'invariance* à celui de *théorie de la relativité*. Ce dernier nom s'est néanmoins imposé peu à peu à la suite du postulat qu'Einstein a appelé le principe de relativité qui dit que les lois de la nature doivent avoir la même expression dans tous les référentiels galiléens, car le mouvement d'un référentiel est seulement relatif. Près de trois siècles plus tôt Galilée l'exprimait à sa manière en disant : "tal movimento è come se non fosse", un tel mouvement est comme s'il n'était pas.

La voiture de Art est une Volskwagen coccinelle. Elle fait 4,3 mètres de long. Les dimensions du garage de Art permettent juste de l'y garer.

Lenny possède une limousine allongée de 8,6 mètres de long. Art s'apprête à partir en vacances, et à louer sa maison à Lenny, mais avant de partir les deux amis veulent vérifier que la voiture de Lenny rentrera bien dans le garage. Lenny est sceptique, mais Art a un plan. Il dit à Lenny de reculer suffisamment puis d'enfoncer le champignon pour accélérer comme un dingue. Si Lenny parvient à ce que la limo atteigne 87% de la vitesse de la lumière avant d'entrer dans le garage, ça ira. Ils essaient.

Art regarde depuis le trottoir tandis que Lenny recule, puis passe en marche avant et appuie sur l'accélérateur. Le compteur monte à 90% de la vitesse de la lumière, et Lenny en a encore sous le pied. Soudain il lève les yeux vers le garage : « Bon Dieu ! Le garage fonce vers moi à toute vitesse, et il est deux fois plus petit que sa taille originale ! Je ne vais jamais rentrer ! »

Art : « Mais si, mais si, Lenny, ça va rentrer, lui crie Art. D'après mes calculs, dans le référentiel du garage ta voiture fait un peu moins de 4 mètres. Pas de souci. »

Lenny : « Oh, Art, j'espère que tu ne t'es pas trompé. »

La figure 1.9 est un diagramme d'espace-temps sur lequel on a représenté le garage de Art (région claire verticale car on s'est placé pour le dessin dans le référentiel du garage) et la limousine de Lenny (région foncée inclinée car la limo se déplace à vitesse constante).

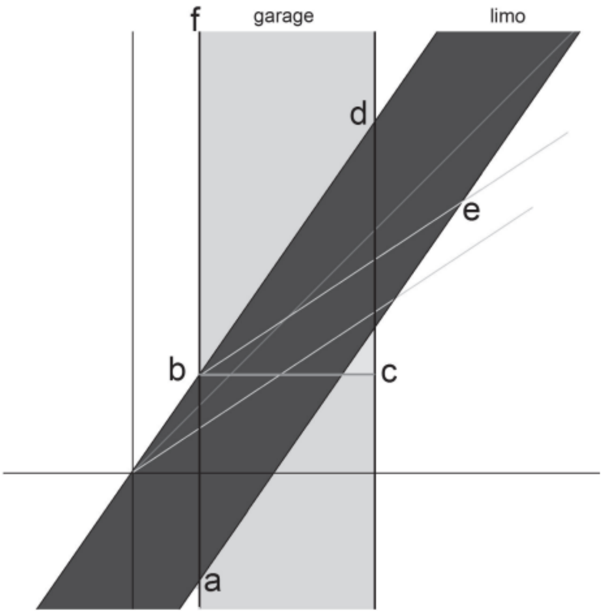

Figure 1.9 : Diagramme d'espace-temps de la rentrée d'une limousine dans un garage étriqué.

L'avant de la limo entre dans le garage à l'événement a et en sort (en supposant que Art a laissé la porte du fond ouverte) un peu au dessus de l'événement c. L'arrière de la limo entre à b et sort à d. Examinons le segment bc. Il fait partie d'une surface de simultanéité du référentiel au repos du garage, et comme on peut le constater toute la limo est contenue dans le garage à ce moment-là. C'est bien ce qu'affirme Art : dans son référentiel la limousine peut tenir dans le garage.

Mais regardons maintenant la situation du point de vue de Lenny. Le segment *be* est une surface de simultanéité de Lenny. (Il a une pente symétrique de celles des lignes d'univers de la limo de Lenny par rapport à la diagonale à 45°.) On constate que la limo déborde largement des limites du garage. Lenny a raison de se faire du souci : dans son référentiel sa voiture ne tient pas dans le garage.

La figure montre bien quel est le problème. Dire que la limousine tient dans le garage veut dire qu'on peut faire rentrer simultanément l'avant et l'arrière de la voiture dans le garage. C'est le mot *simultanément* qui est important. Simultanément pour qui ? Pour Art, ou pour Lenny ? Dire que la voiture est entrée dans le garage a simplement un sens différent selon le référentiel. Il n'y a pas de contradiction à dire qu'à une certaine date t du point de vue de Art la limo était totalement dans le garage – et qu'à aucune date t' du point de vue de Lenny la limo était totalement dans le garage.

Presque tous les paradoxes de la relativité restreinte se résolvent de manière évidente quand on énonce avec soin ce qu'ils disent [22]. Prêtez attention à l'usage implicite du mot *simultanément*. C'est généralement là que ce trouve la faille dans le raisonnement – simultanément pour qui ?

22. Cela est vrai dans beaucoup de domaines. Par exemple en théorie des probabilités, les paradoxes proviennent souvent du fait qu'on a implicitement changé en cours de route l'expérience aléatoire dont on parle. Par exemple le paradoxe de Monty Hall, qui mystifiait tant le mathématicien Paul Erdös (1913 - 1996), s'explique ainsi en quelques lignes.

1.5 L'univers de Minkowski

L'un des outils les plus puissants dans la boîte à outil du physicien – comme dans celle du mathématicien – est le concept d'invariant. Comme son nom l'indique un invariant est une quantité qui ne change pas quand beaucoup de choses changent autour d'elle. Par exemple, quand un même espace peut être décrit de deux manières différentes, avec des repères qui collent des étiquettes différentes aux mêmes points, c'est une quantité qui a la même valeur calculée dans les deux repères [23]. Ce n'est pas le cas des coordonnées des points d'un espace vectoriel, ou des composantes des vecteurs ou des tenseurs. Ici on va regarder certains aspects de l'espace-temps qui prennent la même valeur dans tous les référentiels galiléens.

Pour bien comprendre l'idée, commençons par un exemple issu de la géométrie euclidienne. On considère un plan muni d'un premier repère cartésien attribuant des coordonnées $(x,\ y)$ aux points, et d'un deuxième repère cartésien attribuant les coordonnées $(x',\ y')$ aux mêmes points. Les deux repères ont la même origine, et les axes du deuxième ont simplement été obtenus par une rotation d'un angle θ dans le sens positif des axes du premier. Il n'y a pas d'axe du temps dans cet exemple, et pas d'observateur en mouvement. C'est juste de la géométrie euclidienne ordinaire telle qu'on l'a apprise au collège et au lycée. Le figure 1.10 représente le plan avec ses deux repères cartésiens.

23. Plus généralement, en mathématiques, une quantité calculée à partir des éléments d'un espace est dite invariante par une transformation de l'espace quand sa valeur calculée à partir des *transformés des éléments* ne change pas. Par exemple on a appris au lycée en géométrie que les birapports sont invariants par projection centrale. La théorie des invariants a été développée par David Hilbert (1862-1943).

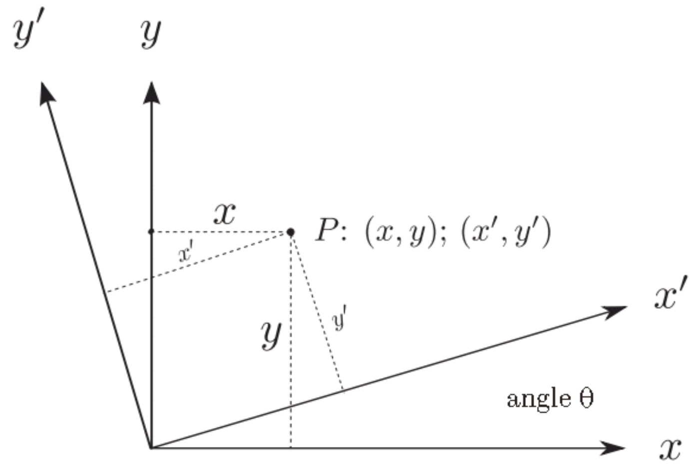

Figure 1.10 : Plan euclidien muni de deux repères cartésiens.

Considérons un point P arbitrairement choisi dans le plan. Les deux systèmes n'assignent pas les mêmes coordonnées au point P. La transformation qui permet de passer de $(x,\ y)$ à $(x',\ y')$, si l'on se rappelle la trigonométrie de lycée, est

$$\begin{aligned} x' &= \quad x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{1.29}$$

Les coordonnées d'un point ne sont donc pas invariantes par changement de repère.

Il y a cependant une quantité qui reste la même que nous la calculions à l'aide du premier repère ou du second : c'est *la distance de P à l'origine.*

Notez qu'on peut aussi voir le changement de repère comme une transformation du plan vers lui-même et constater que c'est une isométrie, en ce sens qu'elle préserve les distances définies à l'aide du théorème de Pythagore. Mais restons avec l'idée plus naturelle en physique que les points ne bougent pas, seulement leurs coordonnées.

La distance OP est définie comme $\sqrt{x^2 + y^2}$. On sait qu'elle est la même que $\sqrt{x'^2 + y'^2}$. Le lecteur ou la lectrice sont invités à le vérifier pour s'exercer à travailler avec une transformation de coordonnées.

C'est vrai aussi du carré de la distance. On a donc toujours

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

Nous disons que $x^2 + y^2$ est une quantité invariante par la transformation 1.29.

La question qui vient à l'esprit est : y a-t-il une quantité analogue dans l'espace-temps qui soit invariante par la transformation de Lorentz ?

On considère maintenant un point P dans le diagramme de Minkowski – ce qu'on a appelé un *événement* – de coordonnées $(x,\ t)$ dans le référentiel au repos, et de coordonnées $(x',\ t')$ dans le référentiel en mouvement. Quelle est la relation entre $(x',\ t')$ et $(x,\ t)$? C'est la transformation de Lorentz donnée par exemple par les équations 1.19 et 1.20, reproduites ci-dessous

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Pensez-y comme au pendant, dans le diagramme de Minkowski de la relativité restreinte, du jeu d'équations 1.29 dans le plan euclidien ordinaire.

Qu'est-ce qui pourrait être invariant ? Voyons si $t'^2 + x'^2 = t^2 + x^2$. Un peu d'algèbre donne pour le côté gauche

$$\frac{t^2 + v^2x^2 - 2vtx}{1 - v^2} + \frac{x^2 + v^2t^2 - 2vtx}{1 - v^2}$$

Est-ce égal à $t^2 + x^2$? Non, c'est impossible. Une chose saute immédiatement aux yeux : si les termes en tx ont le même signe, ils ne peuvent pas s'annuler. Et $t'^2 + x'^2$ ne peut pas être égal à $t^2 + x^2$ puisque ce dernier ne contient pas de terme croisé.

Mais si au lieu d'additionner nous soustrayons x'^2 à t'^2 les termes en tx vont disparaître. Voyons ce qu'on trouve. En poussant les équations on obtient

$$\begin{aligned} t'^2 - x'^2 &= \frac{t^2 + v^2x^2 - 2vtx}{1 - v^2} - \frac{x^2 + v^2t^2 - 2vtx}{1 - v^2} \\ &= \frac{t^2 - x^2 + v^2x^2 - v^2t^2}{1 - v^2} \\ &= \frac{(t^2 - x^2)(1 - v^2)}{1 - v^2} \\ &= t^2 - x^2 \end{aligned}$$

Super ! Nous avons découvert quelque chose d'important : il y a une quantité invariante. Dans la transformation de Lorentz, la combinaison t'^2 *moins* x'^2 reste la même que $t^2 - x^2$.

C'est presque comme le théorème de Pythagore, c'est-à-dire une sorte de distance à l'origine dans le diagramme de Minkowski. Cette quantité est dénotée

$$\tau^2 = t^2 - x^2 \tag{1.30}$$

et elle est invariante par la transformée de Lorentz. C'est-à-dire qu'on a aussi

$$\tau^2 = t'^2 - x'^2$$

La racine carrée de τ^2 porte un nom en théorie de la relativité : c'est le *temps propre* de l'événement P. D'autres auteurs utilisent la racine carrée de $x^2 - t^2$, et l'appellent parfois la distance propre. Mais dans ce livre nous utiliserons le temps propre.

Le point important à retenir est la notion d'invariant. Les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{OP}$ ou d'un déplacement $\overrightarrow{PQ}$ dans l'espace-temps ne sont pas des invariants. Elles dépendent du référentiel utilisé. Ce qui est invariant – c'est-à-dire sur la valeur de quoi tout le monde s'accorde – est τ^2 (ou de manière équivalente τ).

La raison pour ce nom de "temps propre" deviendra claire dans la section 1.6. Mais regardons d'abord ce que devient l'invariance quand on considère aussi les dimensions spatiales y et z.

Généralisation à 3 dimensions spatiales

Dans le diagramme de Minkowski on ne considère qu'une seule dimension spatiale, l'axe des x. Mais la transformation de Lorentz la plus générale tient compte aussi des dimensions y et z. Rappelez-vous que la forme générale est donnée par les équations 1.25 à 1.28 que nous reproduisons ci-dessous quand on utilise des unités relativistes (c'est-à-dire avec $c = 1$)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Ce sont les équations quand les axes spatiaux sont parallèles deux à deux et que le référentiel en mouvement glisse le long de l'axe des x – ce qu'on appelé un boost le long de l'axe des x.

Comme je l'ai expliqué dans la section 1.3 quand le référentiel en mouvement a été tourné et se déplace le long d'une direction quelconque, on peut voir la transformation de Lorentz la plus générale comme une première rotation purement spatiale, suivie d'une transformation de Lorentz avec les équations d'un boost, puis une seconde rotation purement spatiale. Comme les rotations purement spatiales ne changent pas $x^2 + y^2 + z^2$ et n'affectent pas le temps, une quantité invariante par les équations de Lorentz d'un boost sera invariante par n'importe quelle transformation de Lorentz générale.

Quand on considère l'espace avec trois dimensions spatiales plus une quatrième dimension du temps, le temps propre n'est plus défini par l'équation 1.30 mais par l'équation plus générale suivante

$$\tau^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{1.31}$$

Il est laissé au lecteur ou à la lectrice le soin de vérifier que le temps propre ne change pas dans un boost le long de l'axe des x, et donc dans aucune transformation de Lorentz.

1.5.1 Cône de lumière de Minkowski

L'invariance du temps propre τ est un fait important. Je ne sais pas si Einstein en était conscient quand il écrivit son article fondateur, mais pour préparer cette section j'ai rouvert mon vieil exemplaire ayant beaucoup servi, dans l'édition Dover, du livre qu'Einstein publia en 1916 sur la théorie de relativité restreinte et générale et dans lequel se trouve reproduit son article de 1905 (le prix sur la couverture de mon exemplaire était \$1.50). Je n'ai trouvé dans l'article de 1905 aucune mention de l'équation 1.31 ou de l'idée d'espace-temps[24].

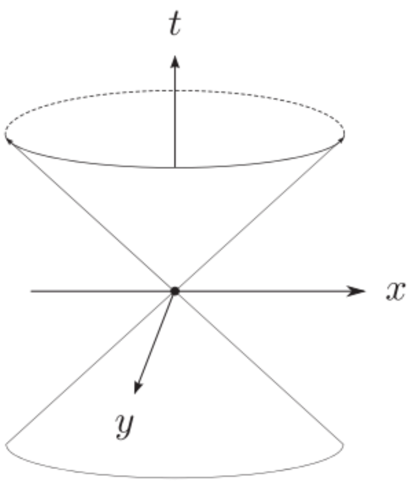

Figure 1.11 : Cône de lumière de Minkowski.

24. Le livre est disponible en français : Albert Einstein, *La théorie de la relativité restreinte et générale*, Dunod, Paris, 1999. L'article de 1905 ne mentionnait pas l'espace-temps ni la notion de temps propre, mais le livre de 1916 les mentionne et les utilise tous les deux.

C'est Minkowski qui a le premier compris que l'invariance du temps propre, avec son étrange signe moins entre t^2 et x^2, formerait la base d'une géométrie entièrement nouvelle : la géométrie de l'espace-temps – ou encore espace de Minkowski. Le crédit pour avoir complété en 1908 la révolution de la relativité restreinte, initiée par Einstein trois ans plus tôt, revient à Minkowski. C'est à lui que nous devons le concept de *temps comme quatrième dimension* d'un espace-temps à quatre dimensions [25].

Suivant Minkowski, considérons la trajectoire d'un rayon lumineux émis depuis l'origine. Imaginons un flash lumineux – un événement consistant en une lampe qui s'allume très brièvement et s'éteint à nouveau – envoyé depuis l'origine et se propageant dans toutes les directions. Après une période de temps t il aura voyagé sur une distance ct. Nous pouvons décrire ce rayon par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \qquad (1."é)$$

C'est l'équation d'un cône dans l'espace-temps. On peut le visualiser en trois dimensions (représenté sur la page en deux dimensions) si nous nous limitons à deux coordonnées spatiales x et y, plus la dimension temporelle t, figure 1.11. Minkowski n'a pas lui-même dessiné le cône, mais il l'a décrit en détail.

En géométrie un cône complet a deux parties comme un diabolo. La partie supérieure du cône de la figure 1.11 s'appelle le *cône de lumière futur*. Et la partie inférieure, le *cône de lumière passé*.

Dans la suite du texte nous retournons à l'espace-temps

25. L'article fondamental de Minkowski sur la relativité restreinte est disponible sur le site : `http://www.minkowskiinstitute.org/mip/MinkowskiFreemiumMIP2012.pdf` chapitre 2.

avec seulement deux dimensions, une spatiale et une temporelle, mais suivant l'usage nous parlerons parfois quand même de cône pour le lieu d'équation $x^2 = c^2t^2$.

1.5.2 Signification physique du temps propre

Pour chaque événement de l'espace-temps, la quantité invariante τ^2 – c'est-à-dire qui ne dépend pas du référentiel inertiel, pourvu qu'ils aient la même origine $(0,\ 0)$ – n'est pas seulement une abstraction mathématique ; elle a une signification physique et expérimentale.

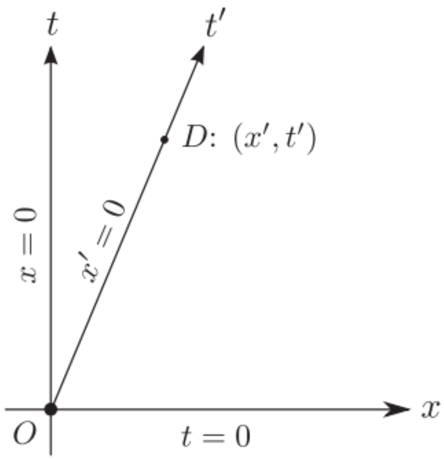

Figure 1.12 : Temps propre.

Considérons les deux référentiels habituels fixe et mobile, et aussi dans le diagramme de Minkowski l'événement D situé sur la ligne d'univers de l'origine du référentiel en mouvement, figure 1.12. C'est-à-dire, plus simplement, que Lenny en se déplaçant à vélocité constante passera par l'événement D.

La ligne d'univers de Lenny est aussi son axe t'. C'est l'axe du temps qui passe dans son référentiel. Dans celui-ci, Lenny reste à la coordonnée spatiale $x' = 0$, et le temps t' est *par définition* le temps qu'il lit à sa montre-bracelet. On se rappelle qu'il repère le temps d'un événement quelconque avec *sa collection* d'horloges synchrones.

La quantité τ^2, calculable en chaque événement de l'espace-temps, a la même valeur dans les deux référentiels. Pour n'importe quel événement de coordonnées $(x,\ t)$ et $(x',\ t')$ dans l'espace-temps on a

$$t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2 = \tau^2$$

(Il n'est pas nécessaire d'introduire une variable τ'.) Donc en particulier au point D, où $x' = 0$, on a

$$t^2 - x^2 = t'^2 = \tau^2$$

et donc

$$t' = \tau$$

En d'autres termes, pour n'importe quel événement par lequel passe Lenny à un moment donné, le temps propre de cet événement est tout simplement le temps que Lenny lit à sa montre. Cela mérite que l'on insiste :

Une personne partie de l'origine au temps 0 *et se déplaçant dans l'espace à vélocité constante perçoit toujours comme temps, à sa montre, le temps propre des événements par lesquels elle passe.*

Pour terminer cette section sur le temps propre, donnons son équation en unités conventionnelles : $\tau^2 = t^2 - \frac{x^2}{c^2}$.

1.5.3 Intervalles d'espace-temps

Nous venons de voir que le terme *temps propre* a un sens physique et quantitatif. J'ai aussi mentionné plus haut, pour $x^2 - t^2$, le terme de *distance propre* (au carré) à l'origine. Ce n'est rien d'autre que l'opposé de τ^2. C'est donc aussi un invariant, et n'introduit pas d'idée nouvelle.

Dorénavant nous allons utiliser le terme plus précis d'*intervalle d'espace-temps* pour la quantité Δs, définie ci-après, entre deux événements. Elle sera en général considérée dans sa version au carré $(\Delta s)^2$, et pour alléger les notations nous la noterons sans parenthèses.

On considère deux événements P et Q de coordonnées respectives $(t_1,\ x_1,\ y_1,\ z_1)$ et $(t_2,\ x_2,\ y_2,\ z_2)$. On définit Δt comme $t_2 - t_1$, Δx comme $x_2 - x_1$, etc.. Alors l'intervalle d'espace-temps Δs entre P et Q est défini par

$$\Delta s^2 = -\Delta t^2 + (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

Ainsi l'intervalle d'espace-temps, noté simplement s, entre l'origine et l'événement $(t,\ x,\ y,\ z)$ a pour carré

$$s^2 = -t^2 + (x^2 + y^2 + z^2)$$

En d'autres termes, s^2 n'est rien d'autre que $-\tau^2$. Les notations dans la littérature scientifique de la relativité ne sont malheureusement pas totalement fixées, et certains auteurs dénotent s^2 ce que nous dénotons τ^2. Mais nos notations (s pour une distance et τ pour un temps – sans oublier que la vitesse de la lumière, égale à 1 en unités relativistes, est présente implicitement selon les formules en multiplicateur de t, ou en diviseur des coordonnées spatiales), qui sont les plus courantes, sont aussi les plus naturelles.

Jusqu'à présent la différence entre les concepts τ^2 et s^2 a été mince (un simple changement de signe), mais elle va bientôt devenir importante.

1.5.4 Intervalles de type temps, de type espace, et de type lumière

Parmi les nombreuses idées géométriques introduites par Minkowski en théorie de la relativité il y a, entre les paires d'événements, les concepts de séparation de type temps, de type espace et de type lumière. La classification repose sur le signe de l'invariant

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

ou de son alter ego

$$\Delta s^2 = -\Delta t^2 + (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

Nous allons utiliser ce dernier. Et pour commencer regardons simplement l'intervalle (au carré) entre l'origine O et un événement P quelconque de coordonnées $(t,\ x,\ y, z)$. Nous regardons

$$s^2 = -t^2 + (x^2 + y^2 + z^2)$$

Cette valeur s^2 peut être négative, positive ou nulle. Alors nous dirons que l'intervalle d'espace-temps entre O et P est respectivement

a) de type temps si $s^2 < 0$,

b) de type espace si $s^2 > 0$,

c) de type lumière si $s^2 = 0$.

Pour nourrir notre intuition sur ces catégories, pensons à un signal lumineux partant d'Alpha du Centaure au temps 0 dans le référentiel galiléen fixe par rapport à nous [26]. Il met à peu près 4 ans pour nous atteindre. Dans cet exemple, le référentiel est fixe par rapport à nous (ou nous par rapport à lui, si l'on préfère), mais l'origine est placée à l'étoile, et nous considérons le cône de lumière futur du flash émis depuis l'étoile. Reportez-vous à la figure 1.11 : Alpha du Centaure est à l'origine et nous regardons le cône supérieur. Quand le rayon lumineux nous atteint c'est un événement positionné quelque part dans le diagramme d'espace temps. En fait il est *sur* le cône puisque c'est un rayon lumineux. Et il est à la hauteur $t = 4$ *ans* puisque c'est le temps qu'il a mis, de notre point de vue, pour venir.

Pour les lectrices ou lecteurs qui aiment bien anticiper ce qui va venir, voici un petit exercice.

Exercice 1.3 : Quel est le temps propre du rayon lumineux quand il nous atteint ? En d'autres termes, imaginez un être à califourchon sur le photon émis par Alpha du Centaure, qui regarde sa montre bracelet au départ $t' = 0$, et à l'arrivée. Quel temps t' voit-il alors à sa montre ?

Conseil : Utilisez l'invariance de τ.

26. La Terre n'offre pas tout à fait un référentiel galiléen – c'est pourquoi on lance les fusées Ariane depuis Kourou près de l'équateur – mais c'est une bonne approximation.

On trouve encore $t' = 0$! Le temps en quelque sorte ne s'écoule pas quand on voyage sur un rayon lumineux. On avait déjà commencé à le comprendre avec les particules de durée de vie très courte, mesurées en microsecondes, émises par le Soleil et qui mettent néanmoins 8 *mn* pour nous atteindre.

Passons maintenant à la classification des intervalles d'espace-temps.

Intervalle de type temps

Considérons tout d'abord un événement P à l'intérieur du cône de la figure 1.11, peu importe si on regarde la partie supérieure ou inférieure. C'est un événement tel que sa coordonnée spatiale est en valeur absolue plus grande que sa distance géométrique (racine carrée de $x^2 + y^2 + z^2$) à l'origine. En d'autres termes

$$-t^2 + (x^2 + y^2 + z^2) < 0$$

L'intervalle entre O et P est dit de *type temps*. On dit aussi parfois que l'événement P lui-même est de type temps relativement à l'origine. Tous les événements de l'axe t, c'est-à-dire la ligne d'univers de l'origine, sont bien sûr, et c'est heureux, de type temps.

Si un événement sur Terre se passe à une date t supérieure à 4 *ans* par rapport à l'émission du rayon lumineux depuis Alpha du Centaure, il est de type temps relativement au flash. Les événements de ce type ont lieu trop tard pour être éclairés par le rayon ; il sera déjà passé.

Plus généralement deux événements ont une séparation ou forment un intervalle de type temps si dans le diagramme de Minkowski la pente du segment qui les joint a plus de 45°.

Il faut noter la propriété importante suivante : être de type temps (ou de type espace ou de type lumière – nous allons le voir dans un instant) est une caractéristique invariante dans un changement de référentiel inertiel, c'est-à-dire dans une transformation de Lorentz. En effet le segment joignant les deux événements reste plus pentu que la bissectrice indépendamment du référentiel.

Intervalle de type espace

Les événements de type espace (relativement à l'origine) sont ceux à l'extérieur du cône. Leurs coordonnées satisfont l'équation

$$-t^2 + (x^2 + y^2 + z^2) > 0$$

Pour ces événements la distance géométrique à l'origine est plus grande que la distance temporelle.

Les événements de type espace sont trop loin, à leur date t, pour que le rayon lumineux puisse les atteindre. Et un quelconque événement se déroulant sur Terre plus tôt que 4 *ans* après le départ du rayon lumineux de l'étoile ne pas être affecté par l'événement qui créa le flash.

Plus généralement deux événements ont une séparation ou forment un intervalle de type espace si dans le diagramme de Minkowski la pente du segment qui les joint a moins de 45°.

À nouveau, c'est une caractéristique qui ne dépend pas du référentiel.

Intervalle de type lumière

Finalement il y a les événement sur le cône. Leurs coordonnées satisfont

$$-t^2 + (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Ce sont ceux que le rayon lumineux émis depuis l'étoile peuvent atteindre. Ils sont dits de type lumière. Une personne située à un événement de type lumière relativement à l'origine verra le flash de lumière.

1.6 Perspective historique

Einstein

Les gens se demandent souvent si l'affirmation d'Einstein selon laquelle "la vitesse c de la lumière est une loi de la physique" était basée sur des considérations théoriques ou bien sur des résultats expérimentaux – en particulier l'expérience de Michelson-Morley. Bien sûr on ne peut pas être certain de la réponse. Personne ne sait réellement ce qu'il y a dans l'esprit de quelqu'un d'autre. Einstein lui-même a toujours dit qu'il n'avait pas entendu parler du résultat de Michelson et Morley quand il écrivit son article de 1905. Je pense qu'il y a toutes les raisons de le croire.

Einstein démarra ses réflexions en considérant que les équations de Maxwell étaient des lois de la physique. Il savait qu'elles produisaient des solutions ondulatoires dans l'espace et le temps se déplaçant à la vitesse de la lumière – au sens qu'un pic de sinusoïde se déplace avec la vitesse c. À l'âge de seize ans, en 1895, il se demandait déjà ce que verrait quelqu'un qui se déplacerait le long d'un rayon lumineux avec la même vitesse. La réponse "évidente" est qu'il verrait un champ électrique et un champ magnétique tous les deux statiques avec une forme ondulatoire immobile. Il sentait que cela ne pouvait pas être vrai – car *ce n'était pas* une solution des équations de Maxwell. Ces équations disent que la lumière se déplace avec la vitesse c.

En langage moderne nous expliquerions le raisonnement d'Einstein un peu différemment. Nous dirions que les équations de Maxwell présentent une *symétrie* – une collection de transformations des coordonnées telle que les équations ont la même forme dans tous les référentiels. Si vous preniez les équations de Maxwell, qui contiennent les coordonnées spatiale et temporelle, x et t, et appliquiez les bonnes vieilles lois de changement galiléennes,

$$x' = x - vt$$

$$t' = t$$

vous trouveriez que les équations de Maxwell revêtent une nouvelle forme dans les coordonnées avec des primes.

Cependant, si vous appliquez une transformation de Lorentz aux coordonnées dans les équations de Maxwell, ces équations avec les nouvelles coordonnées ont exactement la même forme qu'avec les anciennes. En langage moderne, l'accomplissement remarquable d'Einstein fut de reconnaître que la symétrie des équations de Maxwell n'était pas les transformations de Galilée (qu'on appelle aussi les transformations de Newton) mais les transformations de Lorentz. Il ramassa tout cela en un seul principe. Dans un sens, il n'avait même pas besoin de connaître les équations de Maxwell (bien que, bien sûr, il les connût). Tout ce qu'il avait besoin de savoir était que les équations de Maxwell sont des lois de la physique, et que ces lois imposent que la lumière ait une certaine vélocité. À partir de là, il pouvait travailler avec seulement des rayons lumineux.

Lorentz

Lorentz connaissait l'expérience de Michelson-Morley. Il parvint quelques années avant Einstein au jeu d'équations qui portent le nom de transformation de Lorentz, mais il les interpréta différemment [27]. Il considérait qu'elles représentaient un effet sur les objets en mouvement causé par l'ether. À cause d'une sorte de pression exercée par l'ether sur les objets en mouvement, comme l'eau sur la proue d'un navire qui avance, les objets se contractaient et donc raccourcissaient.

Était-il dans l'erreur ? J'imagine qu'on peut dire qu'en un certain sens il ne l'était pas. Mais il n'avait certainement pas la vision d'Einstein d'une *symétrie* – la symétrie que l'espace et le temps doivent avoir afin qu'ils s'accordent avec le principe de relativité et celui que la vélocité de la lumière est la même dans tous les référentiels galiléens. Personne ne prétendrait que Lorentz avait fait ce qu'a fait Einstein – Lorentz lui-même ne l'a jamais prétendu. En outre Lorentz pensait que ses équations n'étaient pas exactes mais seulement une première approximation. Un objet se déplaçant à travers un fluide est effectivement raccourci et en première approximation la contraction de Lorentz mesure correctement cette contraction. Lorentz était convaincu que

27. Poincaré parvint aussi aux équations de Lorentz et montra lui-même, peu avant l'article d'Einstein, qu'elles étaient une symétrie pour les équations de Maxwell. Mais il refusa d'en déduire qu'il fallait abandonner le temps universel et s'en tint à une interprétation compliquée.

le résultat de l'expérience de Michelson et Morley n'était pas parfaitement exact. Il pensait qu'il devait y avoir des termes en v/c à des puissances supérieures dans sa transformation, et que les techniques expérimentales deviendraient suffisamment précises pour détecter des différences dans la vitesse de la lumière selon le référentiel. C'est Einstein qui déclara que la vitesse de la lumière était en réalité une loi de la physique et donc la même dans tous les référentiels galiléens car ils sont par nature indistinguables.

Minkowski

La contribution essentielle de Minkowski n'est pas tant d'avoir proposé son diagramme, que d'avoir insisté sur le fait que l'invariant $t^2 - x^2$ était comparable dans l'espace-temps à la distance ordinaire au carré dans l'espace euclidien. Il engendre une géométrie qui n'est pas euclidienne, ni même riemannienne[28], mais qui n'est pas incohérente et qui est très puissante pour se représenter les phénomènes relativistes et l'électrodynamique.

Dans cette géométrie, la "distance" entre deux événements peut être nulle ($\Delta t^2 - \Delta x^2 = 0$) sans qu'ils ne coïncident. Tous les événements sur la trajectoire d'un rayon lumineux émis depuis l'origine, dans toutes les directions, ont le même temps propre (égal à zéro). C'est le cône de lumière de Minkowski.

Cette géométrie, appelée *géométrie de Minkowski*, est fondamentale aussi en théorie de la relativité générale, qui à de nombreux égards est une théorie de la géométrie min-

28. En simplifiant, la géométrie riemannienne est la géométrie sur une surface en caoutchouc non plane. Elle reste localement euclidienne.

kowskienne de l'univers, affectée en chaque point cependant par la répartition des énergies et impulsions.

Minkowski étant mort d'une crise d'appendicite en 1909, en pleine possession de ses moyens intellectuels à l'âge de 44 ans, il n'a pas pu participer à l'élaboration de la théorie de la relativité générale [29]. Il émit sur son lit de mort l'espoir que ses contributions qui avaient été beaucoup critiquées pour leur mathématisation et abstraction à outrance selon certains, dont Einstein, s'avéreraient utiles. Son vœu fut exaucé. Elles jouèrent effectivement un rôle déterminant. Car autant on pouvait développer la relativité restreinte sans connaître la géométrie minkowskienne ni le calcul tensoriel, autant c'est impossible pour la relativité générale. Et nous les utiliserons nous-même beaucoup dans le présent volume sur la relativité restreinte et l'électromagnétisme.

Par la suite les équations fondatrices de la théorie de la relativité générale, reliant courbure de l'univers et répartition des énergies et impulsions, ont été trouvées indépendamment par Einstein et par Hilbert à la fin de 1915.

Nous en avons fini avec les idées et concepts de base de la relativité restreinte. Si vous consacrez le temps nécessaire pour bien assimiler tout ce qui a été présenté dans ce premier chapitre copieux, le reste du livre sera facile – relativement bien sûr.

---

29. Hermann Minkowski était le plus proche ami de David Hilbert. La biographie de ce dernier par Constance Reid, *Hilbert*, Springer-Verlag, New York, 1996, contient de nombreux aperçus aussi sur la vie de Minkowski.