

Lesson 7 : Principes fondamentaux et invariance de jauge

Art : « Pourquoi les physiciens sont-ils si attachés à des principes fondamentaux comme le principe de moindre action, la localité, l'invariance de Lorentz, et – c'est quoi le suivant ? »

Lenny : « L'invariance de jauge. Ces principes nous aident à évaluer les nouvelles théories. Une théorie qui les viole se révélera sans doute défailante dans sa capacité de prédiction. Mais parfois nous sommes forcés de redéfinir ce que nous entendons par fondamental. »

Art : « Ah oui, je vois. La voiture de chemin de fer qui file à vive allure : elle est Lorentz-invariante. Elle va très vite donc y a d'action, mais pas plus que nécessaire. Elle s'arrête à toutes les gares donc elle assure quand même un service local. »

Lenny : « Euh... »

Art : « Et on a l'invariance de jauge – pas comme quand on passait en Espagne, que les voies changeaient d'écartement à la frontière pyrénéenne et qu'il fallait adapter les bogies des voitures. Maintenant les voies TGV ont toujours la même jauge. »

Lenny : « Je crois que c'est toi qui fait des châteaux en Espagne. On va aller un peu moins vite si tu veux bien. »

Supposons qu'un physicien théoricien veuille construire une théorie pour expliquer un phénomène nouvellement découvert. On s'attend à ce que sa théorie se conforme à un certain nombre de principes fondamentaux. Il y a quatre principes qui semblent gouverner les lois de la physique. Ce sont :

1. le principe de moindre action
2. la localité
3. l'invariance de Lorentz
4. l'invariance de jauge

Ces principes sont universels dans l'ensemble de la physique. Toutes les théories connues, que ce soit la théorie de la relativité générale, l'électrodynamique quantique, le modèle standard des particules élémentaires, ou la théorie de Yang-Mills, sont conformes à ces principes. Les trois premiers principes nous sont familiers, mais l'invariance de jauge l'est moins. J'en ai un peu parlé dans le chapitre 11 du *Volume 1*. Maintenant nous allons l'approfondir. C'est l'objectif de cette leçon.

7.1 Résumé des principes

Principe d'action

La première règle est que les phénomènes physiques sont décrits par un principe d'action. Nous ne connaissons pas d'exception à ce fait. Le concept de conservation d'énergie, pour ne citer que lui, découle entièrement du principe d'action. La même chose est vraie de la conservation de l'impulsion, et plus généralement des relations entre les lois de

conservation et les symétries (cf. théorème de Noether, *Volume 1*, chapitre 7). Vous pouvez écrire des équations tout à fait sensées, mais si elles ne peuvent pas être déduites d'un principe d'action, nous n'avons pas la garantie que l'énergie et l'impulsion soient conservées. La conservation de l'énergie en particulier est, comme on vient de le dire, la conséquence du principe d'action, combiné avec l'hypothèse que les phénomènes restent les mêmes si on se déplace dans le temps d'une durée fixe – une transformation qu'on appelle une *translation dans le temps*.

C'est donc notre premier principe. Nous devons chercher une action telle que les équations du mouvement qui résultent de sa minimisation (ou plus précisément de la contrainte qu'elle soit stationnaire) décrivent le phénomène découvert au laboratoire ou dans la nature. Nous avons rencontré deux types d'action. L'action pour une particule en mouvement est

$$A_{particule} = \int dt \mathcal{L}(X, \dot{X}) \quad (7.1)$$

où \mathcal{L} est le lagrangien. Et l'action dans les théories de champ est

$$A_{champ} = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \phi_\mu) \quad (7.2)$$

Dans les théories de champ, \mathcal{L} est la densité lagrangienne.

Dans les deux cas nous avons vu comment trouver l'action stationnaire à l'aide des équations d'Euler-Lagrange et comment elles conduisent aux équations de la dynamique (ou même de la statique, voir la sous-section sur la mécanique des milieux continus dans la section 4.3.3).

Localité

Par localité nous voulons dire que les phénomènes qui se déroulent à un endroit de l'espace-temps n'affectent directement que leur environnement immédiat dans l'espace et dans le temps. Si nous agissons sur un système à un point donné (t, x) de l'espace-temps, le seul effet *direct* sera sur son voisinage infiniment proche. Par exemple si nous donnons un coup d'archet sur une corde de violon à l'une de ses extrémités, seuls les points proches, sur la corde de violon et dans l'air environnant, ressentiront un effet immédiat. Bien sûr les mouvements des points voisins affecteront à leur tour leurs propres voisins, et ainsi de suite. Rapidement toute la corde entrera en mouvement, et la vibration qu'elle imprimera à l'air formera un son que nous pourrions entendre. Mais l'effet immédiat est seulement local¹.

Comment nous assurons-nous qu'une théorie respecte la localité? Encore une fois, c'est par le biais de l'action. Par exemple supposons que nous parlions d'une particule. Dans ce cas, l'action est une intégrale par rapport au temps le long de la trajectoire de la particule. C'est-à-dire que si la trajectoire de la particule est $X(t)$, on commencera par considérer une somme d'éléments de la forme

$$\sum_{t_i} \mathcal{L} \left(t, X(t), \dot{X}(t) \right) \Delta t \quad (7.3)$$

pour une collection de temps t_i entre le début t_1 de la trajectoire jusqu'à sa fin t_2 . Puis on considérera la *somme in-*

1. En formalisant avec un peu de mathématiques, cela veut dire, dans un référentiel donné, que l'effet à une distance x se fera sentir seulement après un temps t , et que dx/dt a une limite finie $v(t, x)$, qui peut être très grande mais qui, comme on sait, doit être inférieure ou égale à la vitesse de la lumière.

tégrale, c'est-à-dire la limite quand la collection de temps t_i est de plus en plus dense entre t_1 et t_2 , ce qui est la définition de l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \left(t, X(t), \dot{X}(t) \right) dt \quad (7.4)$$

Bien sûr ça c'est le raisonnement imagé. *C'est la définition de l'intégrale*. Mais ce n'est pas comme cela qu'on l'évalue, en se lançant dans le calcul de cette limite. On applique le théorème fondamental du calcul intégral et différentiel (voir *Volume 1*, interlude 2, p 56). Les intégrales les plus simples sont calculées à l'aide de primitives élémentaires. Par exemple la fonction $F(x) = x^3/3$ est une primitive de la fonction $f(x) = x^2$. Alors $\int_a^b x^2 dx = F(b) - F(a)$. Ainsi la surface sous la parabole canonique $f(x) = x^2$ entre 0 et 1 est égale à un tiers.

Pour garantir la localité, l'intégrande de l'intégrale 7.4 ci-dessus, c'est-à-dire le lagrangien \mathcal{L} , doit dépendre seulement des coordonnées du système. Pour une particule, cela veut dire sa position $X(t)$ et sa dérivée première par rapport au temps, $\dot{X}(t)$. Les points voisins n'interviennent qu'à travers la dérivée temporelle, c'est-à-dire la limite quand Δt tend vers zéro de $(X(t + \Delta t) - X(t)) / \Delta t$.

Les dérivées, après tout, sont les concepts qui capturent les relations entre points infiniment proches. Cependant, les dérivées d'ordre supérieures sont interdites par la physique classique car elles sont "moins locales" que les dérivées premières. Cette règle provient avant tout de l'observation même si elle a aussi des justifications théoriques.

Les théories de champ décrivent le comportement d'un champ sur une région – une surface ou un volume – d'espace-temps (voir les figures 4.1, 4.4 et 5.1). L'action est alors

une intégrale non seulement par rapport au temps, mais aussi par rapport aux coordonnées spatiales dans l'espace sous-jacent du champ, c'est-à-dire que c'est une intégrale multiple sur toute une région d'espace-temps².

Dans ce cas, la localité veut dire que la densité lagrangienne dépend du champ $\phi(t, X^i)$ et de ses dérivées partielles d'ordre un par rapport à la coordonnée temporelle t et aux coordonnées spatiales X^i , c'est-à-dire en notation condensée par rapport à X^μ . Nous notons ces dérivées ϕ_μ . Et la densité lagrangienne a la forme

$$\mathcal{L}(\phi, \phi_\mu) \tag{7.5}$$

que nous avons vue plus haut dans l'intégrale d'action donnée par l'équation 7.2. Le champ ϕ est bien sûr une fonction de chaque événement de l'espace-temps sous-jacent. C'est-à-dire qu'on pourrait le noter $\phi(X^\nu)$ et ses dérivées $\phi_\mu(X^\nu)$ dans la densité lagrangienne 7.5 ci-dessus. Mais cela alourdirait les expressions.

La dépendance de la densité lagrangienne seulement à ϕ et à ϕ_μ est suffisante pour garantir que les phénomènes n'affectent que leur voisinage immédiat dans le temps et dans l'espace.

On pourrait imaginer un monde dans lequel, dans un référentiel donné, agir sur un système en un point X^i à une date t pourrait avoir un effet immédiat en un autre point à la même date. Dans ce cas, la densité lagrangienne ϕ en X^ν ne dépendrait pas seulement des voisins les plus proches de X^ν à travers les dérivées ϕ_μ , mais dépendrait de quantités

2. On a vu dans le chapitre 4 qu'une particule peut être vue comme un champ sur un espace sous-jacent n'ayant qu'une dimension temporelle et pas de dimensions spatiales.

plus compliquées qui permettraient d'"agir à distance". Le principe de localité l'interdit.

Même si ce n'est pas le sujet de ce livre, disons un mot sur la mécanique quantique – car je sens bien que le lecteur ou la lectrice attendent un commentaire de ma part sur le principe de localité en mécanique quantique. Tout d'abord dissipons toute ambiguïté :

Le principe de localité s'applique aussi en mécanique quantique.

On pense souvent que l'intrication quantique viole le principe de localité. Mais cela résulte d'une interprétation erronée. L'intrication n'est pas la même chose que la non-localité. Je l'ai abordé en détail dans le cours de mécanique quantique (cf. *Volume 2*, chapitre 7, section 7.9, pp 215-218). L'intrication ne veut pas dire qu'on puisse envoyer un signal instantanément d'un endroit à un autre³. La localité est un fait fondamental de toute la physique.

Invariance de Lorentz

Les théories physiques doivent être invariantes par transformation de Lorentz. Autrement dit, les équations du mouvement doivent être les mêmes dans tous les référentiels inertiels. Nous avons déjà vu comment cela marche. Si nous

3. Ce qu'Einstein appelait l'*action fantomatique à distance* entre deux particules intriquées – qui le conduisit dans les années 30 du XX^e siècle à considérer que la mécanique quantique n'était pas une théorie satisfaisante – d'une part a été amplement vérifiée par l'expérience, et d'autre part *n'est pas* la même chose que la non-localité, laquelle serait l'*envoi d'une information* d'un point à un autre plus vite que la lumière.

nous assurons que le lagrangien soit un scalaire, au sens de la théorie de la relativité, alors nous sommes sûrs que la théorie sera Lorentz-invariante. L'invariance de Lorentz inclut l'invariance dans les rotations des axes spatiaux.

Noter que la relativité générale (qui n'est pas traitée dans ce livre) exige l'invariance dans une transformation arbitraire des coordonnées. Les transformations de Lorentz sont un cas particulier. Néanmoins, le principe d'invariance est similaire ; au lieu d'exiger que \mathcal{L} soit un scalaire, la relativité générale exige que ce soit une densité scalaire.

Invariance de jauge

La dernière règle est quelque peu mystérieuse et demande plus de temps pour être bien comprise. En résumé, l'invariance de jauge concerne les changements que l'on peut faire sur le potentiel vecteur sans affecter la physique. Nous allons consacrer le reste du chapitre à explorer cette idée.

7.2 Invariance de jauge

Une invariance, appelée aussi une *symétrie*, est un changement sur un système qui n'affecte pas l'action ou les équations du mouvement. Regardons quelques exemples familiers.

7.2.1 Exemples de symétrie

L'équation $\vec{F} = m\vec{a}$ est peut-être la plus connue des équations de mouvement. Elle conserve exactement la même

forme si nous translatons l'origine des coordonnées d'un point à un autre. La même chose est vraie si nous opérons une rotation des coordonnées. Cette loi est donc invariante par translation et par rotation. Vous rappelez-vous quelles quantités par conséquent, en application du théorème de Noether, restent conservées? La question a été traitée dans le *Volume 1* chapitre 7.

Un autre exemple est fourni par la leçon 4 du présent ouvrage, sur la théorie élémentaire des champs. Le lagrangien pour cette théorie est donné par l'équation 4.7 reproduite ci-dessous

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] - V(\phi)$$

qui peut aussi se réécrire

$$-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)$$

Pour le moment, nous allons considérer une version simplifiée, avec $V(\phi)$ égal à zéro et les coordonnées spatiales ramenées à une seule variable x :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right]$$

L'équation 4.10 du mouvement que nous avons dérivée de ce lagrangien était (légèrement simplifiée ici en unités relativistes)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \tag{7.6}$$

Cette équation satisfait plusieurs invariances, dont celle de Lorentz. Pour découvrir une nouvelle invariance, nous essayons de trouver des aspects de cette équation que nous pouvons changer sans changer son contenu ou sa signification. Supposons que nous ajoutons une constante au champ ϕ :

$$\phi \longrightarrow \psi = \phi + \lambda$$

En d'autres termes, supposons que nous prenions un champ ϕ qui est déjà une solution de l'équation du mouvement 7.6 et que nous ajoutons la constante λ à cette solution. Est-ce que le nouveau champ ψ satisfait toujours l'équation 7.6 ? La réponse est oui. En effet, les dérivées d'une constante sont nulles, donc on a encore

$$\frac{\partial^2(\phi + \lambda)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2(\phi + \lambda)}{\partial x^2} = 0$$

Et cela est équivalent à écrire que

$$\partial_\mu \psi \partial^\mu$$

est nul.

En d'autres termes, si nous avons une action particulière et un champ $\phi(t, x)$ qui minimise cette action, ajouter une constante au champ ϕ ne change rien ; le nouveau champ minimisera aussi l'action. Ajouter une constante est une symétrie, ou, pour parler informellement, une invariance. C'est une invariance un peu différente de celles qu'on a vues jusqu'ici mais c'est une invariance quand même.

Maintenant, revenons à la version un peu plus compliquée de la théorie, où le terme $V(\phi)$ n'est pas égal à zéro. Dans le chapitre 4, nous avons considéré le cas

$$V(\phi) = \frac{\mu^2}{2}\phi^2$$

dont la dérivée par rapport à ϕ est

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = \mu^2 \phi$$

Le lagrangien est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{\mu^2}{2} \phi^2 \quad (7.7)$$

Et, par les équations d'Euler-Lagrange, l'équation du mouvement est

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \mu^2 \phi = 0 \quad (7.8)$$

Qu'arrive-t-il à l'équation 7.8 si nous ajoutons une constante à ϕ ? Si ϕ est une solution, $\psi = \phi + \lambda$ en est-elle encore une? Eh bien non. Les deux premiers termes ne changent pas, mais le troisième si. Et que dire du lagrangien de l'équation 7.7? Ajouter une constante n'a pas d'effet sur les termes entre crochets. Mais cela modifie le troisième terme : ϕ^2 n'est pas égal à $(\phi + \lambda)^2$. En résumé, quand il y a le terme

$$-\frac{\mu^2}{2}\phi^2$$

dans le lagrangien, ajouter une constante à ϕ n'est pas une symétrie.

7.2.2 Nouvelle sorte d'invariance

Retournons à l'intégrale d'action

$$e \int_a^b A_\mu dX^\mu$$

que nous avons introduite dans le chapitre 6, section 6.3.1.

Supposons que nous modifions A_μ en lui ajoutant le gradient quadridimensionnel d'un champ scalaire S :

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \frac{\partial S}{\partial X^\mu}$$

Cette somme sur la droite a un sens car les deux termes sont des quadrivecteurs covariants. On peut parfaitement les additionner. Ce changement modifie-t-il les équations du mouvement ? Change-t-il l'orbite que suivra la particule ? Quel changement cela apporte-t-il à la dynamique de la particule ?

L'action est modifiée de manière évidente. L'action originelle

$$Action_{ori} = e \int_a^b A_\mu dX^\mu \quad (7.9)$$

devient l'action nouvelle

$$Action_{nouv} = e \int_a^b A_\mu dX^\mu + e \int_a^b \frac{\partial S}{\partial X^\mu} dX^\mu \quad (7.10)$$

Qu'est-ce que représente l'intégrale la plus à droite ? Pour le voir, examinons la figure 7.1, où comme d'habitude la trajectoire de la particule est divisée en petits segments dX^μ .

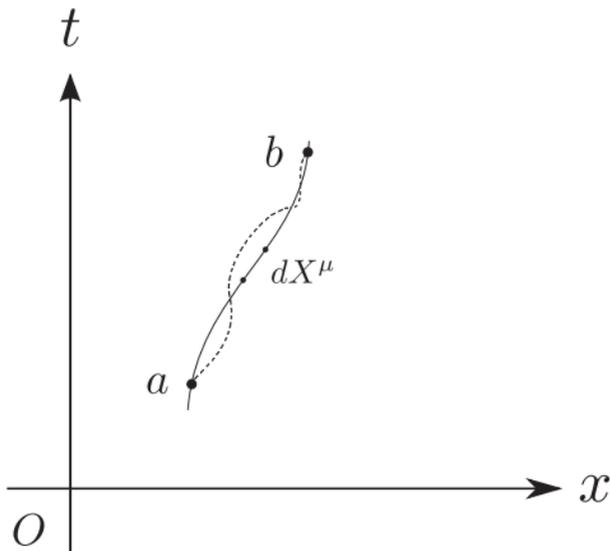


Figure 1 : Trajectoire de la particule dans l'espace-temps. La particule suit la ligne pleine, qui minimise l'action originelle. La ligne en pointillé est un autre chemin qui ne minimise pas l'action originelle.

Le terme $\frac{\partial S}{\partial X^\mu} dX^\mu$ sous le signe intégrale est simplement la variation de S entre les deux bornes du segment infinitésimal. Donc l'intégrale est la variation de S entre les deux extrémités de la trajectoire. Étant donné que les points a et b sont fixes dans le problème, l'intégrale la plus à droite dans l'équation 7.10 ajoute seulement une constante à l'action originelle. Le problème de sa minimisation ne change pas. Et la solution optimale est toujours la même⁴.

4. La lectrice ou le lecteur qui ont lu et se souviennent bien du premier volume se rappellent que nous avons suivi le même raisonnement dans le *Volume 1* chapitre 11 pp 221-222 quand nous examinons deux potentiels vecteurs définissant le même champ magnétique.

En résumé, ajouter au potentiel vecteur A_μ un quadri-vecteur qui est le gradient d'un champ scalaire est sans effet sur le calcul du mouvement de la particule car minimiser $f(x)$ ou minimiser $f(x) + 2$ conduit à la même solution. En fait ajouter une dérivée quelconque à l'action typiquement ne change rien. Nous ne nous soucions même pas de ce qu'est le champ scalaire S ; notre raisonnement s'applique à n'importe quel champ scalaire.

C'est le concept d'*invariance de jauge*. Le potentiel vecteur peut être modifié, de certaines façons, sans aucun effet sur le comportement de la particule. Ajouter $\frac{\partial S}{\partial X^\mu}$ au potentiel vecteur s'appelle une *transformation de jauge*.

Le mot jauge a une origine historique quand on ne comprenait pas encore très bien le potentiel vecteur et on pensait que deux d'entre eux se distinguaient par la modification d'une sorte de jauge, c'est-à-dire une aune ou une échelle. En fait, ça n'a rien à voir, mais le terme est resté.

7.2.3 Équations du mouvement

L'invariance de jauge affirme ceci :

Prenez le champ scalaire de votre choix, ajoutez son gradient au potentiel vecteur définissant les champs électrique et magnétique, et les équations du mouvement de la particule chargée resteront exactement les mêmes.

Comment en être bien sûr ? Pour le vérifier, retournons aux équations 6.33 du mouvement :

$$m \frac{d^2 X_\mu}{d\tau^2} = e \frac{dX^\nu}{d\tau} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} \right)$$

Nous pouvons les réécrire comme ceci

$$m \frac{d^2 X_\mu}{d\tau^2} = e F_{\mu\nu} U^\nu$$

où

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} \quad (7.11)$$

et la quadrivitesse U^ν est

$$U^\nu = \frac{dX^\nu}{d\tau}$$

Les équations du mouvement ne font pas intervenir directement le potentiel vecteur. Elles font intervenir le *tenseur de champ électromagnétique* $F_{\mu\nu}$, dont les composantes donnent celles du champ électrique et du champ magnétique, équations 6.41 à 6.44. Un changement qui ne modifie pas $F_{\mu\nu}$, ne modifiera pas le mouvement de la particule. Notre tâche est de vérifier que le tenseur $F_{\mu\nu}$ est invariant par transformation de jauge. Voyons ce qui se passe quand nous ajoutons le gradient d'un champ scalaire au potentiel vecteur dans l'équation 7.11 :

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial (A_\nu + \frac{\partial S}{\partial X^\nu})}{\partial X^\mu} - \frac{\partial (A_\mu + \frac{\partial S}{\partial X^\mu})}{\partial X^\nu} \quad (7.12)$$

Ça a l'air compliqué, mais ça se simplifie très bien. La dérivée d'une somme est la somme des dérivées, donc on peut réécrire cette équation sous la forme

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} + \frac{\partial^2 S}{\partial X^\mu \partial X^\nu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} - \frac{\partial^2 S}{\partial X^\nu \partial X^\mu} \quad (7.13)$$

Mais nous savons que l'ordre des différentiations pour obtenir une dérivée seconde n'a pas d'importance pour la plupart des fonctions utilisées en physique⁵ (voir *Volume 1* interlude 3 sur la différentiation partielle). Donc les dérivées d'ordre deux s'annulent, et l'équation 7.13 se simplifie :

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} \quad (7.14)$$

qui est exactement l'équation 7.11. CQFD

7.2.4 Bilan et perspective

Notre objectif était d'écrire les équations du mouvement d'une particule dans un champ électromagnétique. Pourquoi nous sommes-nous encombrés d'un potentiel vecteur ? Surtout s'il n'est pas défini de manière unique !

La réponse est qu'il n'y a pas moyen d'écrire un principe d'action pour le mouvement de la particule chargée qui ne fasse pas intervenir le potentiel vecteur. Cependant la valeur du potentiel vecteur en un point donné de l'espace-temps n'a pas de signification physique et ne peut pas être mesurée ; si nous le changeons en lui ajoutant le gradient d'un champ scalaire, la physique ne change pas.

Ce n'est pas vraiment une situation nouvelle pour nous. Rappelons-nous que c'est le cas par exemple, en mécanique newtonienne, de l'énergie potentielle d'une particule dans un champ gravitationnel. Son lagrangien est

5. Sauf exception – comme par exemple les pointes de Dirac en mécanique quantique – les fonctions que nous utilisons en physique sont généralement infiniment différentiables partout. Elles correspondent à des variétés bien lisses. En d'autres termes, la nature est généralement modélisée par des fonctions continues et même lisses.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - V(z)$$

où z est sa hauteur et $V(z)$ son énergie potentielle. On peut rajouter une constante λ à l'énergie potentielle sans changer l'équation du mouvement de la particule. Cette énergie potentielle ne peut pas être mesurée à l'aide d'un appareil de mesure. Cependant l'énergie potentielle d'une caisse posée en équilibre précaire en haut d'une armoire a un sens très concret pour quelqu'un qui passe dessous. Et du reste même sa hauteur dépend aussi du repère choisi.

Toutes les invariances n'ont pas le même caractère. Certaines invariances ont un sens physique évident. Il n'est pas difficile d'imaginer deux référentiels pour le même problème et la translation entre les deux, comme z et z' dans l'exemple ci-dessus. L'invariance de jauge est différente. Elle ne concerne pas une transformation des coordonnées. C'est une *redondance dans la description du système*.

L'invariance de jauge signifie qu'il y a plusieurs descriptions, toutes équivalentes entre elles. Ce qui est nouveau est qu'elle fait intervenir une fonction de la position. Par exemple, quand nous opérons une rotation des coordonnées, elle n'est pas différente en différents points de l'espace. Une rotation qui serait différente en différents points ne définirait pas une invariance en physique ordinaire. Nous faisons une rotation une fois pour toute, de deux angles sphériques donnés, d'une façon qui ne fait pas intervenir une fonction de la position. En revanche, une transformation de jauge fait intervenir toute une fonction – un champ scalaire dont la valeur est différente en chaque point de l'espace-temps. L'invariance de jauge est une propriété fondamentale de toutes les théories connues en physique. L'électrodynamique, le modèle standard, la théorie de Yang-Mills, la

gravitation, sont toutes invariantes par transformation de jauge.

Vous pourriez en concevoir l'idée que l'invariance de jauge est une propriété mathématique intéressante sans utilité pratique. Ce serait une erreur. L'invariance de jauge nous permet d'élaborer des descriptions différentes mais mathématiquement équivalentes du même problème physique⁶. Parfois nous pouvons simplifier un problème en ajoutant quelque chose au potentiel vecteur. Par exemple nous pouvons choisir le champ scalaire arbitraire S de telle sorte qu'une des composantes du tenseur électromagnétique A_μ soit égale à zéro. Typiquement, nous choisirons une fonction spécifique S afin d'illustrer ou clarifier un aspect particulier d'une théorie. Cela peut être au prix de l'obscurcissement d'une autre propriété de la théorie. En regardant une théorie de différents points de vue, offerts par différents potentiels vecteurs, nous pouvons mieux voir l'ensemble de ses propriétés.

6. L'idée d'une *classe* pour représenter un concept est familière en mathématiques. Par exemple $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \dots\}$ forment une classe qu'on appelle un tiers. Mais c'est moins moins naturel en physique, où le *réalisme* est encore dominant. Vers le XVI^e siècle les mathématiciens ont tourné leur attention des grandeurs fixes, éventuellement inconnues, vers les *grandeurs variables*, c'est-à-dire les *fonctions*. Pour un mathématicien, une fonction est un objet comme un autre. Les premières fonctions ont servi à représenter des trajectoires d'astres et autres objets dans le temps. Elles ont conduit au calcul intégral et différentiel de Leibniz et Newton. L'ouvrage "Mathematics : Its content, methods and meaning", par Alexandrov, Kolmogorov et Lavrentiev, est une excellente référence mathématique – de niveau fin de lycée début d'université –, sans le pseudo formalisme dont souffrent de manière regrettable tant de manuels français. Le chapitre 1 par Alexandrov donne une vue d'ensemble des mathématiques depuis la Grèce antique jusqu'à l'époque moderne. Il présente en particulier l'émergence des grandeurs variables et comment elles ont bouleversé les mathématiques et la physique.