Leçon 7 : Symétries et lois de conservation

Lenny avait du mal à lire une carte. Quelle que soit la façon dont il la tenait, il lui semblait qu'il faisait toujours face au nord. Pourquoi, se demandait-il, avait-il plus de difficulté avec NSEO qu'avec haut et bas ? Il pouvait presque toujours distinguer le haut et le bas correctement.

Préliminaires

Le lien entre les symétries et les lois de conservation est l'un des grands thèmes de la physique moderne. Nous allons commencer en donnant quelques exemples de lois de conservation pour des systèmes simples. À première vue, le fait que certaines quantités soient conservées semblera fortuit – et non la conséquence de quelque chose de fondamental. Notre objectif, cependant, n'est pas d'identifier des quantités conservées pour des raisons apparemment circonstancielles, mais de découvrir un ensemble de principes profonds sous-jacents.

Commençons par le système que nous avons étudié à la fin de la leçon 6 dans l'équation (16), mais déconnectons-le de l'interprétation avec deux particules se déplaçant sur une droite. Cela peut être n'importe quel système avec deux degrés de liberté : des particules, des champs, des corps solides en rotation, etc. Pour insister sur le cadre plus général, nous notons les coordonnées q_i au lieu de x_i, et écrivons le lagrangien sous la forme similaire – mais pas identique – suivante :

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2\right) - V(q_1 - q_2) \tag{1}$$

Le potentiel y est une fonction d'une combinaison des variables, ici $(q_1 - q_2)$. Utilisons la notation $V^{'}$ pour la dérivée de V. Les équations du mouvement sont

$$\begin{aligned} \dot{p_1} &= -V^{'}(q_1 - q_2) \\ \dot{p_2} &= +V^{'}(q_1 - q_2) \end{aligned} \tag{2}$$

Exercice 1 : Démontrer les équations (2) et expliquer la différence de signe.

Maintenant additionnez les deux équations pour en déduire que la somme $p_1 + p_2$ est conservée.

Passons à présent à quelque chose d'un peu plus compliqué. Au lieu d'un potentiel fonction de $(q_1 - q_2)$, prenons-en un fonction d'une combinaison linéaire générale des q_i. Notons-la $(aq_1 + bq_2)$. Le potentiel prend la forme

$$V(q_1, q_2) = V(aq_1 + bq_2) \tag{3}$$

Dans ce cas, les équations du mouvement, obtenues à partir des équations d'Euler-Lagrange, s'écrivent

$$\dot{p_1} = -aV^{'}(aq_1 + bq_2)$$

$$\dot{p_2} = -bV^{'}(aq_1 + bq_2)$$

Il semblerait que nous ayons perdu la loi de conservation ; additionner les deux équations ne donne plus la conservation de $p_1 + p_2$.

En fait la loi de conservation n'est pas perdue, elle a juste un peu changé. Si on multiplie par exemple la première équation par $-b$ et la seconde par a et qu'on les ajoute, on constate que la quantité $(-bp_1 + ap_2)$ est conservée.

Exercice 2 : Expliquer cette conservation.

Mais si le potentiel dépend d'une combinaison plus générale des q_i, par exemple $q_1 + q_2^2$. Il n'y a plus de combinaison des p_i qui soit conservée. Alors quel est le principe ? Qu'est-ce qui détermine s'il y a des lois de conservation, et dans ce cas quelles sont-elles ? On connaît la réponse depuis une centaine d'années à la suite des travaux de la mathématicienne allemande Emmy Noether (1882-1935).

Exemples de symétries

Considérons un changement de coordonnées faisant passer des q_i vers les nouvelles coordonnées q'_j. Chaque q'_j est une fonction de tous les q_i :

$$q'_j = q'_j(q_i)$$

Il y a deux façons de penser à un changement de coordonnées. La première est dit *passive*. Vous ne faites rien sur le système – simplement vous renommez les points de l'espace de configuration (c'est-à-dire l'espace des coordonnées généralisées q_i).

Par exemple, supposez que l'axe des x soit répéré avec des marques, $x = ..., -1, 0, 1, 2, ...$ et qu'il y ait une particule à la marque $x = 1$. Imaginons qu'on change de coordonnées de la manière suivante

$$x' = x + 1 \tag{4}$$

Du point de vue passif, la transformation consiste à effacer toutes les marques initiales et à les remplacer par de nouvelles. Le point qui portait la marque $x = 0$, porte maintenant la marque $x' = 1$. Le point $x = 1$ devient le point $x' = 2$, et ainsi de suite. Mais la particule reste là où elle était (si elle était au point $x = 1$, elle est encore au même point, mais il est maintenant repéré par $x' = 2$) ; seuls les labels des positions ont changé.

Dans la seconde façon, dite *active*, de penser à un changement de coordonnées vous ne touchez pas aux labels des positions sur la droite. La transformation $x' = x + 1$ est interprétée comme une instruction de translation : quelle que soit la position où se trouvait la particule, déplacez-la d'une unité vers la droite. Il s'agit d'un déplacement de tout le système vers un nouveau point de l'espace de configuration.

Dans ce qui suit, les transformations que nous effectuerons seront actives. Chaque fois que nous ferons un changement de coordonnées, cela voudra dire que nous déplaçons le système vers une nouvelle position dans son espace de configuration. En général, à la suite d'une telle transformation, le système ou l'expérience change. Si, par exemple, nous déplaçons un objet, l'énergie potentielle – et donc le lagrangien – peut changer.

À présent nous sommes en mesure d'expliquer ce qu'on entend par symétrie :

Une symétrie est une transformation active des coordonnées qui ne change pas la valeur du lagrangien.

C'est un déplacement du système, au sein de son espace de configuration, dans lequel le lagrangien est préservé.

Prenons l'exemple le plus simple : un seul degré de liberté, et le lagrangien suivant

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$$

Supposons que nous opérions un changement actif de la coordonnée q en la déplaçant d'une quantité δ. En d'autres termes, tout le système est déplacé dans son espace de configuration (qui peut être concret comme une particule sur une droite, ou plus abstrait) : q est translatée jusqu'à $q + \delta$ comme ci-dessous :

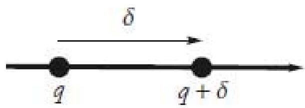

Figure 1 : Translation de la coordonnée q d'une quantité δ.

Considérons le cas où la translation δ que nous effectuons ne dépend pas du temps. Alors la vélocité $\dot{q}$ ne change pas, et – c'est le point important – le lagrangien non plus. Autrement dit, dans la translation

$$q \to q + \delta \tag{5}$$

la variation du lagrangien est $\delta L = 0$.

Dans l'équation (5) la quantité δ peut être n'importe quel nombre. Plus tard, quand nous regarderons des transformations avec des pas infinitésimaux, le symbole δ sera utilisé pour noter une quantité infinitésimale, mais pour l'instant cela n'a pas d'importance.

Nous pourrions considérer un lagrangien plus compliqué avec une énergie potentielle $V(q)$. Alors, sauf si le potentiel est une constante indépendante de q, le lagrangien changera quand q est déplacé. Dans ce cas il n'y a pas de symétrie.

Quand la translation d'un système, en ajoutant une collection de constantes aux coordonnées, est une symétrie (c'est-à-dire si elle ne change pas L) on dit que le système présente une *symétrie de translation*, pour cette translation-là. Nous passerons beaucoup de temps à étudier les symétries de translation.

Par exemple, regardons à nouveau l'équation (2). Supposons que nous modifiions q_1 mais pas q_2. Le lagrangien changerait à cause du changement d'énergie potentielle. Mais si on translate les deux coordonnées d'une même quantité alors $q_1 - q_2$ ne change pas, et la valeur du lagrangien reste la même. On exprime ceci en disant que le lagrangien est *invariant* par rapport à la transformation

$$\begin{aligned} q_1 &\to q_1 + \delta \\ q_2 &\to q_2 + \delta \end{aligned} \tag{6}$$

On dit aussi que le lagrangien est symétrique par rapport à la transformation des équations (6). C'est encore un cas de symétrie de translation, mais dans ce cas pour avoir une symétrie nous devons translater les deux particules avec le même déplacement afin que leur distance ne varie pas.

Dans le cas plus compliqué de l'équation (3), où le potentiel dépend de $aq_1 + bq_2$, la symétrie est moins évidente.

Voici la transformation :

$$\begin{aligned} q_1 &\to q_1 + b\delta \\ q_2 &\to q_2 - a\delta \end{aligned} \tag{7}$$

Exercice 3 : Montrer que la combinaison aq_1+bq_2 est invariante par rapport à la transformation (7), et donc le lagrangien aussi.

Si le potentiel est fonction d'une combinaison plus compliquée, ce n'est pas toujours clair s'il y aura une symétrie. Pour illustrer une symétrie plus compliquée, regardons le système formé par une particule se déplaçant dans un plan, et repérée par ses coordonnées cartésiennes $(x,\ y)$. Supposons que, dans ce plan, la particule soit sous l'influence d'une énergie potentielle qui ne dépende que de la distance à l'origine :

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - V(x^2 + y^2) \tag{8}$$

Il saute aux yeux que l'équation (8) a une symétrie. Imaginons en effet que nous effectuions une rotation de la configuration par rapport à l'origine d'un angle θ comme montré dans la figure ci-dessous :

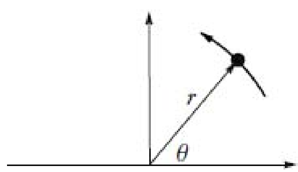

Figure 2 : Rotation d'un angle θ.

Étant donné que le potentiel est fonction seulement de la distance à l'origine, il ne change pas dans la rotation. Par ailleurs, l'énergie cinétique ne change pas non plus. La question qui se pose est : comment représenter un tel changement ? La réponse est évidente : faites simplement tourner les coordonnées

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \quad x\cos\theta + y\sin\theta \\ y &\rightarrow -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{9}$$

où θ est un angle quelconque.

Nous arrivons maintenant à un point essentiel des translations et rotations. Vous pouvez les faire par petits pas – par pas infinitésimaux. Par exemple, au lieu de déplacer une particule de x à $x+1$, vous pouvez la déplacer de x à $x+\delta$. Maintenant j'utilise δ pour noter un infinitésimal. On peut d'ailleurs construire le déplacement $x \rightarrow x+1$ comme la somme d'un grand nombre de petits déplacements de taille δ. La même chose est vraie des rotations : vous pouvez opérer une rotation d'un angle infinitésimal δ et, en répétant le procédé, construire une rotation de taille quelconque. Les transformations de ce type sont dites *continues*. Elles dépendent d'un paramètre continu (par exemple l'angle de rotation). En outre, ce paramètre peut prendre une valeur infinitésimale. Cela va s'avérer utile car nous allons explorer toutes les conséquences des symétries continues en concentrant notre attention sur le cas infinitésimal.

Étant donné que les transformations finies peuvent être construites comme la somme de transformations infinitésimales, quand on étudie les symétries nous pouvons nous cantonner à l'étude des transformations résultant d'un très petit changement des coordonnées, ce qu'on appelle les *transformations infinitésimales*. Regardons ce qui se passe dans les équations (9) quand l'angle θ est remplacé par un angle infinitésimal δ. Avec une approximation du premier ordre en δ on peut écrire

$$\cos\delta = 1$$
$$\sin\delta = \delta$$

(Rappelez-vous que $\sin\delta = \delta$ plus des termes en δ^3 ou plus, et $\cos\delta = 1 - \frac{1}{2}\delta^2$ plus des termes en δ^4 ou plus. Donc le déplacement du premier ordre dans $\cos\delta$ est nul, et le déplacement du premier ordre dans le sinus est δ lui-même.)

Alors la rotation réprésentée par les équations (9) se simplifie en

$$\begin{aligned} x &\to x + y\delta \\ y &\to y - x\delta \end{aligned} \tag{10}$$

Vous pouvez aussi voir que les composantes de la vélocité changent. Il suffit de différentier les équations (10) par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \dot{x} &\to \dot{x} + \dot{y}\delta \\ \dot{y} &\to \dot{y} - \dot{x}\delta \end{aligned} \tag{11}$$

Une autre façon d'étudier l'effet d'une transformation infinitésimale est de se concentrer sur le changement de coordonnées avec les équations suivantes

$$\begin{aligned} \delta x &= y\delta \\ \delta y &= -x\delta \end{aligned} \tag{12}$$

C'est maintenant un exercice élémentaire de calcul différentiel de montrer que le lagrangien ne change pas au premier ordre par rapport à δ, c'est-à-dire que $\delta L = 0$ plus des termes en δ^2 et plus.

Exercice 4 : Montrer que c'est vrai.

Un point qui mérite d'être souligné est que si le potentiel n'est pas une fonction de la distance à l'origine, alors le lagrangien n'est plus invariant dans une rotation infinitésimale. Il est très important de vérifier si c'est le cas ou non quand on étudie un système. Un exemple simple où ce n'est pas le cas est un potentiel qui dépend seulement de x et pas de y.

Symétries plus générales

Avant d'aborder le lien entre les symétries et les lois de conservation, généralisons notre notion de symétrie. Supposons que les coordonnées d'un système dynamique abstrait soient les q_i. L'idée générale d'une transformation infinitésimale est que c'est un petit déplacement des coordonnées, qui peut lui-même dépendre des coordonnées. Le déplacement est alors paramétré à l'aide du paramètre infinitésimal δ, et a la forme suivante

$$\delta q_i = f_i(q)\delta \tag{13}$$

C'est-à-dire que chaque coordonnée se déplace d'une quantité proportionnelle à δ, mais le facteur de proportionnalité peut dépendre de l'endroit où vous vous trouvez dans l'espace de configuration. Dans l'exemple des équations (6) les valeurs de f_1 et f_2 sont toutes deux égales à 1. Dans les équations (7) les fonctions sont $f_1 = b$ et $f_2 = -a$. Mais dans l'exemple plus compliqué de la rotation infinitésimale donnée par les équations (12), les fonctions f_i dépendent d'où on se trouve :

$$\begin{aligned} f_x &= \quad y \\ f_y &= -x \end{aligned}$$

Si nous voulons connaître le changement dans les vélocités – pour calculer, par exemple, la variation du lagrangien – il suffit de différentier les équations (13) par rapport au temps. Un peu de calcul différentiel donne

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i) \tag{14}$$

Ainsi, avec les équations (12), on obtient

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= \quad \dot{y}\delta \\ \delta \dot{y} &= -\dot{x}\delta \end{aligned} \tag{15}$$

Nous pouvons à présent reformuler la signification d'une symétrie continue : c'est une somme de transformations infinitésimales des coordonnées dans chacune desquelles la variation du lagrangien est nulle au premier ordre en δ. Et c'est généralement un calcul aisé.

Voyons maintenant les conséquences d'une symétrie.

Les conséquences d'une symétrie

Calculons comment change $L(q, \dot{q})$ quand nous effectuons une transformation qui déplace chaque q_i de la quantité $f_i(q)\delta$ (équation (13)), et, en même temps, chaque $\dot{q}_i$ de $\frac{d}{dt}(\delta q_i)$ (équation (14)). Tout ce que nous avons à faire est d'additionner, dans l'ordre que l'on veut, le changement dû à la variation des q_i et celui dû à la variation des $\dot{q}_i$:

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right) \tag{16}$$

Maintenant nous allons faire un peu de magie. Regardez bien. D'abord, on se rappelle que $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ est le moment conjugué de q_i, qu'on a noté p_i. Ainsi le premier terme de l'équation (16) est $\sum_i p_i \delta \dot{q}_i$. Mettons cela de côté un instant, et tournons-nous vers le deuxième terme, $\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i$. Pour évaluer des termes de ce genre, nous faisons l'hypothèse que le système évolue le long d'une trajectoire qui satisfait les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{dt}$$

En combinant les deux termes, voici ce que nous obtenons pour la variation du lagrangien :

$$\delta L = \sum_i (p_i \delta \dot{q}_i + \dot{p}_i \delta q_i)$$

Le tour de magie consiste à utiliser la règle pour la dérivée d'un produit :

$$\frac{d(FG)}{dt} = F\dot{G} + \dot{F}G$$

Ainsi nous pouvons écrire pour L

$$\delta L = \frac{d}{dt} \sum_i p_i \delta q_i$$

Qu'est-ce que tout cela a à voir avec la symétrie et la conservation ? Tout d'abord, par définition, une symétrie implique

que la variation du lagrangien est égale à zéro. Donc, si l'équation (13) est une symétrie, $\delta L = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}\sum_i p_i \delta q_i = 0$$

Mais maintenant, en introduisant les formules de la symétrie données par l'équation (13), nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\sum_i p_i \ f_i(q) = 0 \tag{17}$$

Eh voilà ! La loi de conservation est démontrée. Ce que l'équation (17) établit, c'est qu'une certaine quantité,

$$\sum_i p_i \ f_i(q) \tag{18}$$

ne change pas avec le temps. Elle est conservée. La démonstration est à la fois abstraite et puissante. Elle ne dépend pas des détails du système, mais seulement du concept général de symétrie. À présent, tournons-nous vers quelques exemples particuliers à la lumière de la théorie générale.

Retour à des exemples

Appliquons l'équation (18) aux exemples que l'on a étudiés précédemment. Dans le premier exemple, équation (1), si on définit f_1 et f_2, de l'équation (13), comme étant chacune égale à 1, on a une symétrie (puisque le lagrangien ne change pas). En introduisant ces valeurs des f_i dans l'équation (18), nous trouvons exactement ce qu'on avait déjà établi : $(p_1 + p_2)$ est conservé. Mais à présent nous pouvons énoncer un résultat bien plus général :

Dans un système quelconque de particules, si le lagrangien est invariant dans une translation simultanée de toutes les coordonnées q_i, alors le moment total $\sum_i p_i$ est conservé.

Ce résultat s'applique aussi séparément à chaque composante spatiale. Si L est invariant par translation le long de l'axe des x, alors la quantité de mouvement totale le long de l'axe des x est conservée. On voit ainsi que la troisième loi de Newton – l'action est égale à la réaction – est la conséquence d'une propriété profonde de l'espace :

Rien ne change dans les lois de la physique gouvernant un système, si tout le système est translaté dans l'espace.

Passons au deuxième exemple, dans lequel les équations (7) donnent $f_1 = b$ et $f_2 = -a$. Nous introduisons ces valeurs dans l'équation (18) et en déduisons que la quantité conservée est $bp_1 - ap_2$.

Le dernier exemple – la rotation – est plus intéressant. Il conduit à une autre loi de conservation (que nous avons déjà rencontrée dans le chapitre 6, équation (14)). Les équations (12) donnent $f_x = y$ et $f_y = -x$. Cette fois-ci la quantité conservée fait intervenir à la fois les moments et les coordonnées elles-mêmes. On l'appelle le *moment angulaire* (ou *moment cinétique*) du système et on le note l. L'équation (18) nous donne

$$l = yp_x - xp_y$$

À nouveau, comme dans le cas des translations, une propriété plus profonde de l'espace physique, que simplement la conservation du moment cinétique d'une particule, est illustrée ici :

Pour n'importe quel système de particules, si le lagrangien est invariant par une rotation de tout le système par rapport à l'origine, alors son moment angulaire total est conservé.

Exercice 5 : Déterminer l'équation du mouvement pour un pendule simple de longueur l se balançant dans un plan vertical x, y avec un angle initial θ.

Jusqu'à présent, nos exemples sont restés plutôt simples. La formulation lagrangienne est belle, élégante, etc., direz-vous, mais est-elle vraiment utile pour résoudre des problèmes compliqués ? Ne peut-on pas toujours utiliser plus simplement $F = ma$?

Eh bien, essayez avec l'exemple suivant du pendule double ! Voici quel est le système : un premier pendule rigide, suspendu à l'origine d'un plan vertical x, y, peut se balancer dans ce plan. Le bâtonnet du pendule n'a pas de masse et le poids au bout du pendule est M. Pour rester simple, considérons un bâtonnet de 1 mètre et un poids M ayant une masse de 1 kilogramme. Un deuxième pendule identique est suspendu au poids M du premier pendule, mais son angle avec le premier est libre, comme montré dans la Figure 3. Nous pouvons étudier deux cas : avec ou sans champ gravitationnel.

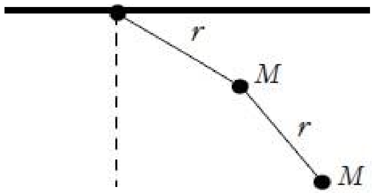

Figure 3 : Pendule double.

Notre objectif ne va pas être de résoudre les équations du mouvement. Cela nous pouvons toujours le faire, même si nous devions les introduire dans un ordinateur pour les résoudre numériquement. L'objectif est de trouver ces équations. C'est un problème délicat si vous essayez de le résoudre avec $F = Ma$. Parmi d'autres choses, vous devrez vous préoccuper des forces transmises à travers les bâtonnets. La méthode lagrangienne est beaucoup plus simple. La procédure pour trouver les équations est plus ou moins mécanique. Les étapes sont les suivantes :

1. Choisissez un jeu de coordonnées q_i décrivant la configuration des différents éléments du système. Vous pouvez les choisir comme il vous plaira – assurez-vous seulement qu'elles soient suffisantes pour décrire sans ambiguïté le système – et prenez-les aussi simples que possible.

   Dans l'exemple du pendule double, nous avons besoin de deux coordonnées. Je vais choisir pour la première l'angle du premier pendule avec la verticale. Appelons cette première variable θ. Ensuite, j'ai le choix. Devrais-je prendre l'angle du second pendule mesuré aussi par rapport à la verticale, ou bien devrais-je prendre l'angle avec le premier pendule ? La réponse est : ça n'a pas d'importance. Une des options peut rendre les équations un peu plus simples que l'autre, mais les deux vous conduiront au résultat. Je vais choisir comme deuxième variable l'angle α que fait le deuxième bâtonnet avec le premier plutôt qu'avec la verticale.

2. Calculez l'énergie cinétique totale. Dans notre cas, c'est la somme des énergies cinétiques de chacun des poids.

La façon la plus simple de procéder est en passant temporairement par des coordonnées cartésiennes $x,\ y$. Soient $(x_1,\ y_1)$ les coordonnées du premier poids, et $(x_2,\ y_2)$ celles du deuxième. Leurs relations avec les angles sont les suivantes : pour le premier poids

$$x_1 = \sin\theta$$
$$y_1 = \cos\theta$$

et pour le deuxième poids

$$x_2 = \sin\theta + \sin(\theta + \alpha)$$
$$y_2 = \cos\theta + \cos(\theta + \alpha)$$

Maintenant, en différentiant par rapport au temps, vous pouvez calculer les composantes cartésiennes de la vélocité de chaque poids en fonction des angles et de leurs dérivées temporelles.

Finalement, calculez l'énergie cinétique $\frac{M}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$ de chaque poids et additionnez-les. Cela devrait prendre quelques minutes. Rappelez-vous que nous avons choisi des bâtonnets et des poids de longueurs et masses unitaires.

Voici les résultats : l'énergie cinétique du premier poids est

$$T_1 = \frac{\dot{\theta}^2}{2}$$

et celle du second

$$T_2 = \frac{\dot{\theta}^2 + (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2}{2} + \dot{\theta}(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \cos \alpha$$

S'il n'y a pas de champ gravitationnel, l'énergie cinétique est le lagrangien :

$$L = T_1 + T_2 = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{\dot{\theta}^2 + (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2}{2} + \dot{\theta}(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \cos \alpha$$

S'il y a de la gravitation, nous devons calculer l'énergie potentielle gravitationnelle. Ce n'est pas compliqué : pour chaque poids on rajoute son altitude multipliée par mg. Cela donne l'énergie potentielle

$$V(\theta, \alpha) = -g[2 \cos \theta + \cos(\theta - \alpha)]$$

3. Établissez les équations d'Euler-Lagrange pour chaque degré de liberté.

4. Pour plus tard, calculez les moments conjugués de chaque coordonnée, $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

Exercice 6 : Établir les équations d'Euler-Lagrange pour θ et α.

On peut aller encore plus loin. En particulier, vous pouvez souhaiter identifier les quantités conservées. L'énergie est généralement la première. L'énergie totale est simplement $T+V$. Mais il y a plus. Trouver les symétries n'est pas toujours une procédure mécanique ; vous devrez peut-être reconnaître des formes. Dans le cas du pendule double sans gravitation, il y a une autre quantité conservée. Elle découle de la symétrie de rotation. Quand il n'y a pas de champ gravitationnel, faire tourner tout le système autour de l'origine du premier pendule ne change rien. Cela implique la conservation du moment angulaire, mais pour trouver son expression il faut faire tous les calculs que nous venons d'esquisser. Et il faut aussi connaître les moments conjugués.

Exercice 7 : Trouver l'expression du moment angulaire du pendule double, et montrer qu'en l'absence de champ gravitationnel il est conservé.