NOTRE PHILOSOPHIE

DES MATHÉMATIQUES

Cette plaquette présente les cinq préfaces que nous avons écrites pour nos livres de collège et lycée.

Leur lecture vous permettra de prendre connaissance en quelques minutes de notre philosophie des mathématiques et de la façon dont il faut à notre sens les enseigner.

Préface du livre de 6e et 5e

On écrit toujours le livre qu'on aurait aimé avoir eu entre les mains quand on apprenait la matière qu'il présente.

Les deux genres de livres de mathématiques que nous avons choisi de *ne pas suivre* sont :

1. Les livres qui sont un long déroulé, logiquement impeccable, de définitions, axiomes, lemmes, théorèmes, corollaires, parfois exemples, le tout avec une mise en page dense et aride d'une forêt de signes, et à la fin de chaque chapitre cinq ou six pages d'exercices.
2. Les beaux livres qui sont une sorte de guide de sujets intéressants, qui attirent l'attention sur de belles choses ou des choses pittoresques, comme dans un parc floral, mais au terme desquels, si on a peut-être passé un bon moment, on n'a pas appris grand-chose de consistant.

C'est dans des livres du premier genre que nous avons appris les mathématiques quand les « maths modernes » faisaient rage dans l'enseignement français. Elles appliquaient au niveau de l'enseignement secondaire des principes d'exposition inspirés des travaux d'un groupe de chercheurs appelé Bourbaki, fondé par des mathématiciens français dans les années 1930 qui s'étaient donnés pour but de refondre et présenter de manière aussi rigoureuse que possible les fondations de la discipline.

C'était très bien comme programme de recherche pour des mathématiques de haut niveau – même si on peut soutenir que ça a fait long feu – mais c'était tout à fait déplacé dans le secondaire. Cela a rebuté et détourné des mathématiques des millions d'élèves français.

Nous pensons que c'est une des raisons du classement de la France comme lanterne rouge dans les comparaisons internationales récentes des capacités de ses collégiens et lycéens.

Dans les manuels du secondaire, les choses se sont améliorées depuis la fin du XXe siècle, même si on y observe encore des traces persistantes de l'esprit Bourbaki. Cependant de même qu'on n'arrête pas sur une centaine de mètres un grand navire lancé à pleine vitesse – cela prend des kilomètres –, cela prendra une ou deux générations pour revenir à un enseignement raisonnable, intéressant et efficace des mathématiques, adapté aux enfants de 11 à 18 ans.

Nous espérons que notre livre y contribuera.

Qu'est-ce qui le caractérise ?

1) Pour la rédaction, nous avons choisi un style conversationnel ni trop informel ni trop guindé. Nous introduisons de temps en temps des figures car « une image vaut mille mots », et pour aérer le texte. Nous introduisons aussi des formules littérales très simples car elles permettent de résumer de longues phrases. Mais elles se lisent en français.

Qu'elles se prêtent aussi à des manipulations mécaniques, comme l'a montré Al-Khwarizmi, est un bonus que nous n'utilisons pas dans ce livre.

2) Pour ce qui est du contenu, nous n'hésitons pas à expliquer des choses extrêmement simples aussi bien que des choses qui nécessitent un peu plus de concentration. Les mathématiques, en effet, ne doivent pas être présentées seulement comme une vaste collection de casse-tête ou d'énigmes.

3) Notre objectif n'est pas de décerner un certificat d'intelligence à ceux qui auront su tout lire, tout comprendre et résoudre tous les exercices difficiles. Du reste, contrairement à d'autres auteurs, nous ne signalons pas le niveau de difficulté (toujours subjectif) des exercices, ni même des leçons.

Nous espérons en revanche faire comprendre ce que Galilée voulait dire quand il a déclaré :

« Les mathématiques sont l'alphabet avec lequel Dieu a écrit l'Univers. »

Nos sens nous donnent accès à un ensemble de perceptions brutes de la nature. Il s'avère que cet ensemble se prête à une description, une organisation, une lecture pour une bonne part mathématique. Les penseurs les plus profonds ont souligné le caractère à la fois étonnant et merveilleux de ce fait.

Cette organisation de nos perceptions prend place *dans notre esprit*. Elle est tellement forte qu'on la confond avec la réalité extérieure elle-même – comme quelqu'un les yeux bandés reconstitue à tâtons ce qu'il y a autour de lui [1]. Depuis longtemps la relation entre l'esprit (la conscience) et la réalité extérieure est source d'interrogation pour les philosophes et les savants. L'alphabet dont parle Galilée est, à vrai dire, davantage dans notre tête que dans l'Univers. Nous n'allons pas développer ce thème. Retenons simplement que les mathématiques participent, avec beaucoup d'autres disciplines, à cette description du monde qui nous entoure.

Notre objectif n'est pas non plus d'enseigner un ensemble de notions et leurs règles de manipulation, en déclarant : « c'est comme ça qu'il faut faire ! » Il est plus ambitieux. Nous voulons commencer à faire comprendre aux élèves de sixième et cinquième en quoi consiste l'abstraction pour décrire la nature, et en quoi elle est néanmoins toujours issue de perceptions concrètes et d'idées intuitives.

Les mathématiques sont nécessaires à l'ingénieur, au physicien, et aux praticiens dans beaucoup d'autres domaines. Elles sont aussi, comme les langues étrangères, l'histoire, ou la biologie, une discipline permettant d'assouplir et élargir son esprit même si on n'a pas l'intention de s'en servir plus tard. Nous pensons que les mathématiques font partie du bagage qu'un élève de la filière générale doit avoir.

Nous avons écrit ce livre à l'intention des collégiens en 6e et 5e, à l'intention de leurs parents, mais aussi à l'intention d'élèves dans des classes plus avancées.

1. On peut aussi penser à une personne qui ne vivrait que dans le métro, allant d'une station à l'autre au gré de ses déplacements. Elle construirait dans sa tête une représentation spatiale du réseau très différente de celle d'une autre personne vivant à la surface du sol.

Les parents, s'ils lisent ce livre, pourront rafraîchir, et peut-être même voir sous un jour nouveau, les connaissances qu'ils ont acquises il y a longtemps, et accompagner ainsi leurs enfants. Rien ne motive un enfant comme de savoir que ses parents s'intéressent à ce qu'il apprend – à la condition toutefois qu'ils ne le stressent pas et qu'ils ne le privent pas non plus du plaisir de découvrir par lui-même, qu'ils n'écrivent pas les rédactions ou fassent les problèmes de mathématiques à sa place !

Les élèves à la fin du collège et au lycée reliront aussi avec bénéfice ce que nous expliquons en 6e et 5e.

Ce livre n'est pas seulement fait pour être lu, il est aussi fait pour être relu.

Plusieurs personnes par leurs encouragements, leurs informations, leurs questions ou leurs remarques m'ont instruit, poussé à réfléchir, et permis de mieux exprimer ce que je voulais dire. Il y a tout d'abord mes enfants pour qui j'ai écrit une première version du texte. Il y a aussi Patrick Baronti – d'ascendance toscane, qui m'a fait observer que les Romains, malgré les déficiences de leur système de numération, avaient construit l'aqueduc passant par le Pont du Gard qui a une déclivité de 24 cm par km –, Marie Boillot, Michel Lacroix, Marie-Anne Lobjois et quelques autres qui se reconnaîtront. Qu'elles en soient ici toutes remerciées.

André Cabannes
Saint-Cyr-sur-mer,
octobre 2022

Préface du livre de 4e et 3e

Ce second volume complète notre présentation des mathématiques du collège.

Dans les deux volumes, notre objectif est de montrer comme les mathématiques sont simples et naturelles, même si parfois, comme dans toute discipline, il faut faire un effort pour comprendre les notions et le maniement des outils qu'elles présentent.

Nous avons cherché à montrer qu'il s'agit d'un langage pour décrire le monde et agir sur lui.

Nous nous sommes efforcés d'éliminer tout pédantisme et tout sujet dont la seule caractéristique est d'être une énigme difficile à résoudre.

L'ouvrage se veut avant tout utile en présentant toutes les mathématiques nécessaires dans la vie courante.

Ce n'est cependant pas simplement un manuel mode d'emploi. Des sections historiques sont incluses. On apprendra par exemple comment les Babyloniens résolvaient déjà l'équation trinôme au IIe millénaire avant J.-C., ou comment Descartes est arrivé à l'idée de la géométrie analytique.

Nous montrons comment les notions introduites ont été conçues, et comment et pourquoi les outils présentés l'ont été comme ils le sont.

Nous pensons que cela rend les mathématiques plus intéressantes, plus faciles à apprendre, plus faciles à comprendre et plus faciles à utiliser.

Il s'agit aussi de préparer le terrain pour des études mathématiques plus avancées au lycée et dans le supérieur pour les lecteurs et les lectrices qui envisagent une carrière dans laquelle ils emploieront un peu ou beaucoup de mathématiques.

Plusieurs principes nous ont guidés :

- Nous n'hésitons pas à parler d'une notion intuitive avant de la présenter formellement (avec définition, propriétés, utilisation).

  Par exemple, on ne peut pas faire de mathématiques sans parler d'approximation. La théorie a été mise au point par Cauchy au début du XIXe siècle, et nous ne la présentons naturellement pas. Mais les premières idées sont très intuitives, et nous les utilisons de temps à autre de manière informelle.
- D'une manière générale, une nouvelle théorie est d'autant plus facile à comprendre qu'on a déjà rencontré des exemples sans parler encore de la théorie. Celle-ci vient plus tard jouer un rôle unificateur.
- Les mathématiques ont la réputation d'être une discipline difficile, voire ésotérique. Nous nous inscrivons vigoureusement en faux contre cette croyance.

  C'est le résultat de leur présentation depuis 2000 ans par certains mathématiciens, mais pas tous.

  Même Euclide donne une démonstration compliquée du théorème de Thalès, quand il suffit de regarder la figure ci-dessous pour convenir – compte tenu du fait que le triangle ABC peut être construit à l'aide de neuf petits triangles identiques – que si on divise AB et AC aux $2/3$, le segment GH est parallèle à BC et de longueur $2/3$ de BC.

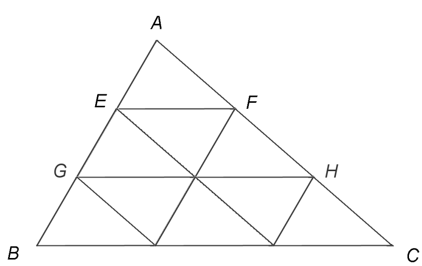


Figure 1 : Démonstration du théorème de Thalès.

Les deux volumes sont donc d'une part une présentation complète des outils mathématiques nécessaires dans la vie quotidienne : les nombres, les fractions, les figures géométriques les plus simples dans le plan et l'espace, la trigonométrie élémentaire, un peu de probabilités et statistiques. Non seulement quelles sont les propriétés de ces outils et comment on les utilise, mais aussi d'où ils viennent. Tout cela présenté aussi simplement que possible, sans esbroufe, sans pédantisme, sans notations kabbalistiques, sans défi au lecteur ou à la lectrice, en cherchant seulement à être didactique et utile.

C'est aussi d'autre part une préparation pour des mathématiques plus avancées au lycée et dans le supérieur, pour celles et ceux qui continueront l'étude des mathématiques. Nous présentons les fonctions, les courbes, les équations les plus simples, quelques résultats de théorie des nombres pour la culture, de la géométrie qui va un peu au-delà du plan et de l'espace ordinaire, la modélisation d'une expérience aléatoire et des probabilités, etc.

Nous espérons que cet ouvrage vous intéressera et que vous aurez autant de plaisir à le lire que nous en avons eu à l'écrire.

André Cabannes
Saint-Cyr-sur-mer,
décembre 2022

Préface du livre de seconde

Le cours de la classe de seconde est un palier dans l'apprentissage des mathématiques.

À l'école primaire, on apprend seulement les mathématiques indispensables dans la vie courante : les quatre opérations, un peu de géométrie, les formes simples, le calcul de surfaces, sans parler bien sûr d'apprendre à raisonner.

Au collège, on commence en reprenant le programme de l'école primaire, mais en l'approfondissant. Par exemple, en arithmétique : structure de la table de multiplication. On apprend que $(n+1)(n-1) = n^2 - 1$, ce qui explique pourquoi $8 \times 8 = 64$ et $9 \times 7 = 63$. On apprend aussi ce que sont les nombres premiers, la décomposition des nombres en facteurs premiers, quelques rudiments de la théorie des ensembles. Cela ne sert pas dans la vie courante, mais fait partie de la culture d'un collégien. On apprend de la géométrie plus avancée qu'à l'école primaire : le théorème de Thalès qui, lui, sert beaucoup presque tous les jours, l'usage des quadrillages pour repérer des points, dessiner des figures, le théorème de Pythagore, de la trigonométrie élémentaire.

Le théorème de Pythagore ne sert pas en dehors des mathématiques, mais c'est le joyau de la géométrie euclidienne, et la trigonométrie rarement, sauf dans certains métiers d'artisanat ou en navigation. Ces sujets préparent aux mathématiques du lycée. Au collège, on apprend aussi à organiser son travail. Les élèves acquièrent un premier niveau d'autonomie.

Maintenant, en classe de seconde, nous nous éloignons des mathématiques nécessaires dans la vie courante pour aborder la boîte à outils mathématique qui servira à l'ingénieur, au physicien, au chimiste, à l'architecte, mais aussi à l'économiste, au financier, au statisticien, et même de plus en plus au biologiste, au sociologue et à d'autres praticiens.

On pourrait penser qu'au moins en français, les mathématiques ne servent pas. Pourtant l'intelligence artificielle, qui est capable de produire des textes mieux écrits que ceux de nombreuses personnes, fait grand usage des mathématiques.

Le cours de seconde est la première marche vers des mathématiques sophistiquées. Leur connaissance est d'abord sanctionnée par un baccalauréat scientifique, puis développée plus avant, pour certains, à l'université ou dans les classes préparatoires et les grandes écoles d'ingénieurs.

Après trois leçons d'introduction à la théorie des nombres développée par Fermat, essentiellement pour la culture, nous présentons les premiers grands outils de la boîte à outils du futur ingénieur, physicien ou mathématicien :

- Les fonctions et leur graphe. Noter qu'une fonction en mathématiques, dans l'expression « est fonction de », a exactement le même sens que dans le langage courant.
- Les équations les plus simples. On considère fréquemment que les mathématiques sont avant tout la résolution d'équations. Ce n'est pas notre point de vue. Pour nous, les mathématiques sont un outil pour décrire le monde et agir sur lui. L'étape principale du scientifique qui va utiliser les mathématiques est la *mathématisation* de son problème. Les questions qu'on se posait deviennent effectivement généralement des équations à résoudre. Mais ce n'est pas le cœur des mathématiques. La résolution d'équations est juste un ensemble de techniques. De même, ce n'est pas parce qu'on sait scier une planche qu'on est ébéniste.
- Les vecteurs. Ils ont pour origine une commodité d'écriture adoptée progressivement au XIXe siècle.
- Les liens entre l'algèbre et la géométrie.
- Nous montrons une première application non triviale de la trigonométrie.
- Le livre se termine avec six leçons de probabilités et statistiques plus musclées que ce qu'on a appris au collège, mais surtout présentées à l'aide de simulations.

Sans encore les aborder, nous préparons aux outils fondamentaux que sont le calcul différentiel et le calcul intégral. Ils seront étudiés en première et en terminale. Nous utilisons déjà de temps à autre des raisonnements qui font appel à une suite d'approximations de plus en plus précises. Nous calculons la surface sous la courbe $y = x^2$ entre 0 et 1.

Notre cours se veut facile. Les exercices sont la plupart du temps tout à fait élémentaires, juste pour vérifier qu'on a compris. Nous ne nous adressons pas seulement aux élèves en tête de classe. Nous voulons montrer à tous que les maths sont intéressantes et accessibles. Nous cherchons aussi à mettre l'eau à la bouche sur des sujets plus avancés.

Plus d'importance est donnée à la compréhension des idées qu'à l'exhaustivité ou la rigueur impeccable des démonstrations. Chacun sait qu'on peut mémoriser et reproduire une démonstration sans réellement la comprendre ni avoir une vision claire de ce à quoi ça peut servir.

On trouvera peu de démonstrations, par exemple, dans les leçons de probabilités et statistiques. En revanche nous présentons de nombreuses simulations qui permettent de construire son intuition sur le hasard.

Considérant que les mathématiques de seconde font partie du bagage de connaissances de l'honnête homme du XXIe siècle, et que ce bagage inclut le français, l'histoire, la géographie, une ou deux langues étrangères, la biologie et quelques autres domaines, nous n'hésitons pas à faire des références à ces disciplines et aussi à la philosophie, surtout lorsqu'elle s'occupait de sciences à l'époque présocratique.

Nous pensons que l'apprentissage scolaire est trop souvent passif. Il fait au mieux des esprits doctes, mais rarement des esprits créatifs et conceptuels[2]. Nous voulons dépassser l'esprit docte.

2. Les esprits doctes sont les esprits de la catégorie II dans la classification proposée par Gaston Bachelard (1884, 1962) dans son admirable livre, *La formation de l'esprit scientifique*, publié en 1938. Les esprits de la catégorie I sont ceux qui accumulent du savoir sans aucune organisation, qui considèrent que les jeux télévisés testent les connaissances. Les esprits créatifs et conceptuels sont ceux de la catégorie III. Celle vers laquelle l'enseignement devrait s'efforcer d'amener les écoliers.

Apprendre à apprendre est très important aussi, et pas assez mis en avant, à notre sens, par l'enseignement traditionnel, même s'il y a eu des progrès par rapport au XXe siècle, sans parler du XIXe où les manuels consistaient parfois en une litanie de questions et leurs réponses qu'il fallait mémoriser. Et il faut toujours aller *pas à pas.*

Quand on étudie un nouveau sujet ou travaille à un problème qui nous donne du fil à retordre, il faut savoir faire des pauses – au moins toutes les deux heures, faire autre chose pendant un moment, aller se promener. Idéalement il ne faut jamais travailler quand on est fatigué, car on fait alors du mauvais travail et on se casse le moral. Sur une question difficile, il faut savoir la réviser sans la résoudre avant de se coucher, et laisser le cerveau travailler pendant qu'on dort. Souvent on se réveille avec la solution dans la tête.

Profitons-en pour souligner un point qui nous tient à cœur : *il faut apprendre à taper sur un clavier avec ses dix doigts.* Ce n'est pas seulement une question d'efficacité, c'est une question d'éthique. Voir des journalistes à la télévision, ou des cadres dans les trains qui tapent pendant tout le trajet sur leur ordinateur avec deux doigts, nous consterne sur la société française au moins autant que le fait que nous soyons mal classés en maths dans les classements internationaux. Aux États-Unis tout le monde sait taper à la machine.

Nous adressons nos remerciements à Jean-François et Joëlle Roux et à Michel Lacroix pour des conversations mathématiques stimulantes pendant la rédaction de ce livre. Nous remercions aussi Denis Blanchet pour ses suggestions toujours pertinentes d'amélioration du texte.

Comme chaque fois, nous avons pris beaucoup de plaisir à exposer dans cet ouvrage les mathématiques de la classe de seconde. Nous espérons que les lectrices et les lecteurs en prendront autant à le lire et à apprendre ou réviser les mathématiques de ce niveau.

André Cabannes
Saint-Cyr-sur-mer,
décembre 2023

Préface du livre de première

« Ce ne sont pas les obstacles techniques qui bloquent. C'est lorsque l'on regarde le problème avec le mauvais point de vue. »

Michel Talagrand
Prix Abel, 2024

Pour aborder les mathématiques avec aisance, il faut avoir les bons modèles dans la tête. À sa façon, c'est ce que dit Michel Talagrand. Ce sont principalement des modèles élémentaires de nature géométrique que l'on construit dans son enfance.

Lorsque nous abordons de nouvelles notions mathématiques, il peut arriver que cela nous prenne un moment pour trouver les bons modèles pour comprendre et travailler efficacement avec elles. Tant qu'on n'y est pas parvenu, « on ne comprend pas ». Les nouvelles notions paraissent seulement des jeux d'esprit sur des choses obscures, inintelligibles. Et on pense qu'on est mauvais en maths. Noter que la même chose est vraie dans beaucoup d'autres disciplines : en psychologie, en sociologie, en histoire, en économie, en monnaie (tout particulièrement), en biologie, en médecine, etc.

Quand on enseigne ou écrit des livres, il est important de comprendre pourquoi les élèves, les lecteurs ou les lectrices ne comprennent pas, ou pas bien, certaines idées. On est dans une position favorable quand on est soi-même passé par là, quand au début on ne comprenait pas certaines notions, qu'on n'avait pas les bons modèles dans la tête, peut-être parce que les notions étaient ardues, peut-être surtout parce qu'on ne nous les avait pas présentées clairement voire correctement. La première fois qu'on m'a parlé des nombres négatifs, on m'a dit que c'était des créatures très étranges. Et je les ai longtemps conçues comme des sortes de nombres translucides, ou des gants retournés. Plus tard j'ai compris que c'était simplement, et seulement, des positions sur la droite des nombres à gauche de zéro, obéissant à des règles simples (l'addition est un déplacement vers la droite, la soustraction vers la gauche).

Les hommes et les autres mammifères construisent dans leur esprit une représentation euclidienne de l'espace. Elle marche très bien. Son seul défaut est de rendre plus tard un petit peu plus difficile la compréhension des géométries non euclidiennes, par exemple celle sur une surface en caoutchouc gondolée, en comprenant qu'on peut travailler dessus sans obligatoirement la plonger dans un espace euclidien à trois dimensions pour la visualiser. On peut s'imaginer comme une petite coccinelle, inconsciente d'autres dimensions que les deux dans lesquelles elle évolue, et qui prend des mesures de longueur et d'angles de toutes sortes pour se figurer la géométrie de son espace. C'est encore plus vrai quand il y a trois dimensions autour de nous, mais que l'espace n'est pas euclidien [3].

À côté d'une bonne compréhension de la géométrie élémentaire de l'espace, une autre nécessité est d'avoir une bonne compréhension de la structure fine de la droite des nombres avec le positionnement des entiers, des fractions et des nombres réels qui ne sont pas des fractions. Après un petit effort, on comprend bien que les fractions ne remplissent pas toute la droite, même si elles sont denses au sein de l'ensemble plus vaste des nombres réels.

---

3. De même que sur Terre si on marche longtemps devant soi, on revient à notre point de départ en arrivant par l'autre côté, il existe des espaces géométriques comparables avec davantage de dimensions. C'est peut-être le cas de notre univers. On sait qu'il est vaste, mais il est peut-être fini comme la surface de la Terre. Il ne serait que localement euclidien. Il y a beaucoup plus à dire sur la question, mais ce n'est pas le lieu dans cette préface.

On est alors en bonne position pour comprendre que le concept d'approximation en mathématiques joue deux rôles assez différents. D'une part, les approximations permettent d'obtenir des valeurs approchées de solutions à des problèmes. Nous l'avons souvent fait au collège. Mais elles ont un autre rôle plus fondamental : elles permettent de *définir* de nombreux objets comme étant la limite d'une collection d'objets. C'est avec cette idée très importante en mathématiques que nous démarrons le livre.

Euclide n'utilisait pas les approximations. Or elles permettent aussi de démontrer bien plus simplement qu'il ne le faisait certains résultats, par exemple le théorème de Thalès.

Équipé de ces deux outils – que sont une compréhension de la géométrie élémentaire de l'espace et une compréhension de la topologie de la droite des réels – on peut comprendre avec aisance les mathématiques jusqu'à 2 ou 3 ans après le bac. Ensuite, c'est facile encore, car on a pris l'habitude de représenter les nouvelles notions avec des modèles qu'on a déjà dans la tête.

Il y a quelques écueils à éviter. Le premier est de partir de l'idée qu'une nouvelle notion est compliquée. La plupart des notions mathématiques, sinon toutes, sont en réalité simples quand on a les bons modèles pour se les figurer. C'est vrai des vecteurs, des limites, des dérivés, des intégrales, des dénombrements, des nombres complexes, des espaces abstraits, du calcul stochastique, etc. J'ai intentionnellement pris des exemples traditionnellement considérés comme compliqués par les gens qui rentrent dans ce premier écueil.

Le deuxième écueil est de vouloir aller trop vite. Il faut toujours aller pas à pas dans l'étude des nouvelles notions. Si vous devez construire un logiciel avec trente-six objets similaires en interaction complexe, commencez par construire le même logiciel avec deux objets.

Nous l'avons dit dans le cours de seconde mais répétons-le : les grands mathématiciens et les grands physiciens ne sont pas des gens exceptionnellement intelligents, mais ce sont des gens qui ont les *idées très claires* et, je rajouterais, qui ont des modèles simples, efficaces, fonctionnels dans l'esprit. Ce sont des modèles dont ils ont construit les éléments de base lorsqu'ils étaient enfants. Ces modèles ne sont jamais très compliqués, même s'ils peuvent parfois sembler éloignés de la représentation habituelle que l'on a de l'espace dans lequel on vit. Il est vrai cependant que voir une chose habituelle sous un jour nouveau demande de la créativité et un esprit flexible.

Le cours de première est un cours de transition entre la seconde et la terminale. La seconde représentait une marche importante par rapport au collège. La première est souvent vue comme une marche moins importante. Mais ce n'est pas notre avis. Il y a encore beaucoup de chemin à parcourir pour arriver confortablement en terminale. Nous avons inclus dans ce livre quelques résultats que d'aucuns trouveront mieux placés en terminale (par exemple des grands théorèmes de géométrie projective), mais qui nous semblent faciles à comprendre sinon à démontrer.

Quand nous apprenions l'analyse élémentaire au tournant des années 70 du siècle dernier, les manuels étaient bourrés à ras bord d'epsilonite car on considérait que c'était cela les vraies mathématiques. Ce n'est, Dieu merci, plus l'approche actuelle. Nous avons mis un peu d'epsilonite pour montrer comment on démontre certains résultats de convergence à l'aide de la topologie de la droite des réels. Mais la plupart du temps nous avons fait appel à l'intuition géométrique.

En mathématiques, comme dans les autres disciplines, on garde *très longtemps* la première idée qu'on s'est faite d'un domaine et de sa difficulté. Il est d'autant plus important, en tant qu'enseignant, de ne jamais introduire une nouvelle notion en disant qu'elle est complexe.

Et en tant qu'élève, il faut toujours aborder un domaine en se disant que c'est simple. Ça demandera peut-être du temps pour construire le bon modèle dans sa tête – c'est d'ailleurs l'étape la plus importante –, et pour connaître tous les détails, mais en définitive ce sera simple. Autrement dit, il faut partir du principe que ce qu'on va apprendre n'est pas compliqué, car en général c'est tout simplement vrai.

Nous cherchons à rester intéressants. Nous invitons à réfléchir, mais *sans stress*, à faire découvrir de nouvelles choses ou façons de voir, pas systématiquement difficiles. Au contraire nous allons souvent moins vite que beaucoup d'enseignants. En outre nous partons du principe que les points les plus délicats seront rapidement compris par certains élèves et un peu plus tard par d'autres, cela n'a pas d'importance.

Quand on expliquait quelque chose à Hilbert un peu rapidement, il était notoire pour ne pas comprendre ce qu'on lui racontait. Tout le monde s'accorde néanmoins à dire que c'était le plus grand mathématicien du tournant du XXe siècle.

Nous ne voulons pas bêtifier non plus. On ne trouvera pas dans notre livre de problème comme le suivant : en partant d'un nombre entier donné entre 0 et 10, on a ajouté un certain nombre de fois 7, et on est arrivé à 61. Quel était le nombre de départ ? Et combien de fois a-t-on ajouté 7 ? Nous l'avons trouvé dans un manuel de bachotage de 1ère. C'est le genre d'exercice qui permet d'avoir constamment 20/20 au lycée, et peut-être même de nos jours décrocher la mention TB au bac. Mais il ne prépare pas à la rude compétition pour rentrer dans les meilleures écoles, ou aux efforts nécessaires pour faire de vraies maths à l'université.

Nous fuyons comme la peste les formules que ne sont que formellement très compliquées (kabbalistiques), nécessitent une intense réflexion, pour découvrir qu'elles dissimulent des évidences. Dénoter le plan projectif avec une expression comme

$$\mathbb{R}P^2 = \{\mathbb{R}^3 \backslash (0,0,0)\}/\sim$$

même si on peut la justifier, nous semble absurde. La notation P^* fait très bien l'affaire.

Enfin nous partons du principe que les lecteurs et les lectrices en classe de première ont une maîtrise raisonnable de l'anglais élémentaire. Dans les suggestions de lecture à la fin de chaque chapitre, certains ouvrages sont en anglais. Si vous ne lisez pas l'anglais élémentaire, inscrivez-vous vite chez Berlitz ou ailleurs.

D'autre part, nous voyions l'autre jour une émission à la télévision où plusieurs élèves d'une grande école saisissaient du texte les yeux rivés sur le clavier et en tapant avec deux ou trois doigts. Alors répétons ce que nous disions dans la préface du livre de seconde : apprenez à taper sur un clavier avec vos dix doigts. Ce n'est pas seulement une question d'efficacité, c'est une question d'éthique.

Qu'une personne d'un certain âge ne connaisse pas bien l'anglais [4] ou ne sache pas taper à la machine, cela peut se comprendre. Mais des jeunes gens de 20 ans, non.

Quand vous faites quelque chose, faites-le bien.

Mes amis et interlocuteurs habituels m'ont une fois de plus accompagné lors de conversations vivantes dans la rédaction de ce livre. Qu'ils en soient remerciés. Un merci particulier à mon frère Jean-Pierre qui m'a fait la remarque sur l'epsilonite.

Bonne lecture et bon apprentissage des mathématiques de première.

André Cabannes
Saint-Cyr-sur-mer,
mars 2024

4. Ma maman, Madeleine Lebon, pouvait soutenir avec aisance une conversation en grec ancien ou en latin (ce qui n'est pas mon cas), mais pas en anglais.

Préface du livre de terminale

Ce cours de mathématiques de terminale est la clé de voute des mathématiques du collège et du lycée que nous apprenons depuis déjà six ans.

On apprend au collège toutes les mathématiques nécessaires dans la vie courante et quelques notions supplémentaires pour la culture. Au lycée on commence à apprendre les mathématiques pour l'ingénieur et le physicien. Mais on ne couvre pas tout ce qui leur est nécessaire.

Ce cours de terminale est aussi une introduction aux mathématiques supérieures à l'université, en classe préparatoire et dans les grandes écoles. C'est pourquoi il couvre une grande variété de sujets, ne faisant pour la plupart que les introduire. Il est organisé en quatre parties :

I Analyse : calcul intégral et séries de fonctions

II Algèbre : nombres complexes, structures algébriques, algèbre linéaire et matrices

III Probabilités et statistiques

IV Programmation

En analyse, il traite l'intégration élémentaire qui complète la différentiation présentée en première. Nous n'avons pas couvert l'analyse multidimensionnelle, les beaux théorèmes de Green-Ostrogradski ou de Stokes.

En algèbre, nous traitons les nombres complexes dont nous parlons depuis plusieurs années. Mais nous restons à la surface de leur théorie. Elle est très importante et très utile pour l'ingénieur, mais dépasse le cours de terminale.

Après avoir parlé des structures algébriques en général, nous présentons de premiers éléments d'algèbre linéaire, les endomorphismes, les bases de vecteurs, les matrices et le calcul matriciel. Nous expliquons les changements de base, mais parlons à peine de la diagonalisation et pas du tout de la théorie spectrale.

Entre la deuxième et la troisième partie, nous avons choisi de parler de deux sujets particuliers : les suites récurrentes et les dénombrements, qui sont de nos jours un peu oubliés, mais qui montrent de jolies propriétés compréhensibles sans abstraction.

La troisième partie est consacrée aux probabilités et statistiques. Nous allons plus loin que les années précédentes, présentant les gaussiennes, le théorème central limite, puis, en statistiques, après un rappel de l'estimation et des tests d'hypothèse, nous consacrons une leçon aux techniques bayésiennes qui connaissent un regain de notoriété avec les moteurs de recherche, le filtrage de spam, les large language models (chatGPT et ses concurrents) et d'autres utilisations.

Dans chacune de ces parties, les sujets traités sont seulement une introduction à de vastes domaines.

Enfin nous terminons le livre avec une partie consacrée à l'algorithmique et à la programmation essentiellement par des exemples. Nous avons choisi de ne pas raconter en détail la merveilleuse histoire de l'informatique qui est aussi passionnante que celle de la révolution industrielle. Cela aurait demandé même pour une description superficielle quatre ou cinq leçons et aurait déséquilibré le cours. Après avoir brièvement présenté l'algorithmique, nous donnons quelques idées générales de ce en quoi consiste la programmation à travers l'écriture d'un petit programme en html/javascript. Les simulations illustrant le fonctionnement et des applications du théorème de Bayes ont été écrites en html/javascript.

Écrire un cours de maths de terminale consiste à viser une cible mouvante, tant les programmes évoluent d'une année sur l'autre. Cela explique aussi la variété de sujets traités. Les lecteurs et lectrices, qu'ils soient des élèves de terminale ou qu'ils nous lisent pour leur culture, choisiront les sujets qui les intéressent.

Depuis l'école primaire jusqu'à la terminale, l'exposition des mathématiques mélange les modèles concrets et les abstractions : un plan est le dessus d'une table, ou la surface de contact obtenue en frottant deux pierres l'une contre l'autre « dans tous les sens ». C'est aussi un espace vectoriel de dimension deux[5].

Certains mathématiciens ont un sourire narquois face à cette approche, disant que c'est une présentation naïve de la discipline. Ce sont les mêmes qui ont fait tant de mal à l'enseignement des mathématiques en France en introduisant la théorie des ensembles et les « maths modernes » dès le collège.

Les plus grands mathématiciens – ceux qui ont fait les contributions les plus importantes à la discipline – n'ont pas une telle attitude. Jacques Hadamard (1865, 1963) dans son cours de mathématiques pour le lycée n'hésite pas à dire qu'un plan est une surface à deux dimensions caractérisée par le fait que si deux points sont dessus alors toute la droite qui passe par eux aussi. Et pour une droite, il dit qu'un fil tendu en donne une image[6].

En terminale nous continuons à mélanger modèle concret et abstraction.

Le seul défaut de l'approche qui consiste à utiliser un modèle concret est que parfois, sans que nous nous en rendions compte, notre modèle incorpore des axiomes inutiles. C'est pour cela que ça a été aussi difficile de créer la géométrie non euclidienne.

Nous parlons de temps à autre de physique. Un cours de maths qui ne parle pas de physique, à notre sens, n'est pas un cours de maths. C'est juste un corpus théorique déconnecté de la réalité, cf. la critique sévère par Vladimir Arnold (1937, 2010) de l'enseignement des mathématiques déconnecté de la réalité[7].

---

5. Ou un espace affine lié à un espace vectoriel de dimension 2.

6. J. Hadamard, *Leçons de géométrie élémentaire*, Armand Colin, 1898, disponible ici : `https://lapasserelle.com/documents/geometrie_hadamard.pdf`

7. `https://lapasserelle.com/arnold/arnold.pdf`

Dans nos leçons, les exercices sont incorporés dans le corps du texte pour inviter le lecteur et la lectrice à essayer tout de suite d'appliquer par eux-mêmes ce qui vient d'être expliqué. Pour atteindre une maîtrise complète des sujets abordés, le lecteur et la lectrice devront utiliser aussi d'autres manuels proposant plus d'exercices que nous.

Nous cherchons à donner une vision en hauteur des mathématiques dégagée de toute appréhension, mais aussi qui les comprenne pour de vrai.

Beaucoup de personnes comprennent (ou pensent comprendre) un problème à un niveau émotionnel. Parfois elles sont même capables d'en parler un moment, et de donner le change. Mais pour différentes raisons, elles sont incapables de produire quoi que ce soit d'utile. L'une des raisons est qu'elles emploient des modèles cérébraux qui ne sont pas les bons. Nous en avons parlé dans la préface du livre de première.

Notre objectif est de permettre de construire les bons modèles, de faire comprendre les détails (sans s'y noyer), et finalement de former des personnes capables

– de comprendre les mathématiques,

– d'employer des outils et d'appliquer des méthodes,

– et même de créer.

Cette préface n'est pas le lieu de discuter de l'utilité de l'instruction publique généraliste pour tout le monde. Le souci est né à la fin du XIXe siècle, et force est de constater que l'objectif n'a pas été atteint. Les problèmes de l'école, dont nous pouvons prendre connaissance quotidiennement dans la presse, ont des causes profondes et diverses. Observons seulement que le grand public a souvent des idées effarantes, et a finalement une connaissance très faible de la science. Celle-ci est devenue indiscutablement plus complexe au XXIe siècle que par le passé.

Une caractéristique des nouveautés technologiques introduites au XX^{e} siècle est que la plupart étaient compréhensibles par le grand public. Elles l'étaient au moins dans leurs utilisations (une automobile, un téléphone) sinon dans les principes sur lesquels elles reposaient (la thermodynamique, l'électromagnétisme). Celles introduites au XXI^e siècle, par contraste, le sont de moins en moins : le génie génétique, les prouesses de l'informatique.

Vision populaire des ordinateurs avec des gerbes de 0 et 1.

Un film documentaire sur les ordinateurs comprendra immanquablement quelques séquences avec des gerbes de 0 et de 1 formant à l'écran de belles figures sur fond bleu nuit évoquant des processus mystérieux – ce qui, convenons-en, n'explique rien. En cela la science, après avoir été pendant un siècle, de 1880 à 1980 environ, un des vecteurs de l'instruction publique, redevient un savoir entre les mains de Merlin l'Enchanteur.

En même temps nous sommes témoins dans les documentaires à la télévision, qu'ils soient touristiques, géographiques ou ethnographiques, d'un retour du surnaturel et du magique. Le commentaire en off présente avec la même objectivité les méthodes que les peuplades filmées utilisent pour tresser un panier ou se concilier les esprits. Le phénomène s'observe dans la société plus généralement : au XXI^e siècle en France on gagne plus d'argent en vendant de la voyance que du savoir.

Nous avons une certaine façon de comprendre les mathématiques qui a guidé notre exposition dans les volumes du collège et du lycée. Cette façon de comprendre les mathématiques est étroitement liée à la compréhension du monde, à la représentation de la nature, à la physique, à l'épistémologie et on peut même dire à la philosophie.

Notre méthode consiste à rester aussi près que possible de la façon dont nous comprenons le monde. Vous trouverez des gens qui ne comprennent pas que dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Mais vous ne trouverez personne qui, voulant aller d'un coin d'un champ rectangulaire de 90 m par 120 m à celui opposé, ne comprend pas la remarque : si vous faites le tour du champ vous marcherez 210 mètres, mais si vous coupez à travers champ vous ne marcherez que 150 mètres. La même idée guide *toutes* nos explications. Nous ne nous aventurons dans l'abstraction que quand c'est nécessaire.

Pour nous les mathématiques ne sont pas du tout une discipline à part, exceptionnelle, platonicienne, inaccessible au commun des mortels. Les mathématiques sont tout simplement la partie bien structurée, souvent quantitative de la façon dont on organise nos perceptions dans notre cerveau.

Nous pensons que cette approche permet de mieux comprendre les mathématiques. Il y a des difficultés en mathématiques, c'est clair. Mais il y a aussi des difficultés dans la compréhension du monde quel que soit le domaine.

Quand on étudie les mathématiques en les considérant comme une partie comme une autre de l'ensemble des facultés pour comprendre le monde, c'est-à-dire comme un ensemble d'outils, leur étude est plus facile.

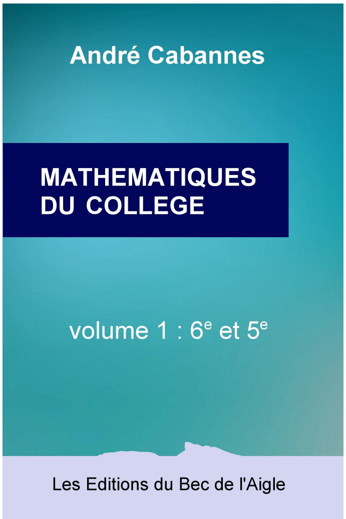
Si vous comprenez tous nos ouvrages de la sixième à la terminale, vous aborderez confortablement les études supérieures à l'université ou en classe préparatoire et dans les grandes écoles.

Bonne lecture et bon apprentissage des mathématiques de terminale. Et bonne chance pour la suite.

André Cabannes
Saint-Cyr-sur-mer,
juin 2024

Catalogue des

ÉDITIONS DU BEC DE L'AIGLE

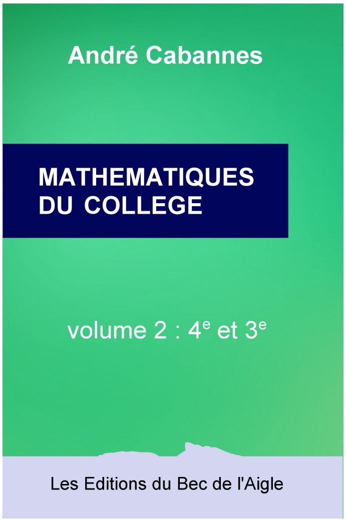


www.amazon.fr/dp/2957239159

Cours de mathématiques du collège.

Volume 1 : 6e et 5e.

à l'intention des collégiens et de leurs parents

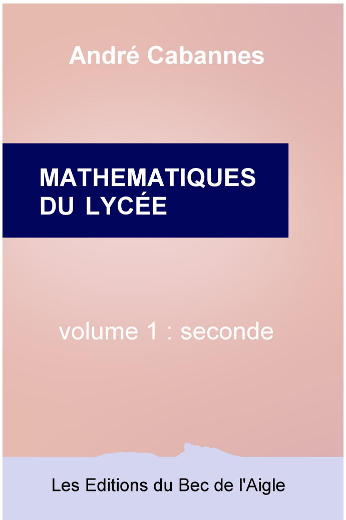


www.amazon.fr/dp/2957239167

Cours de mathématiques du collège.

Volume 2 : 4e et 3e.

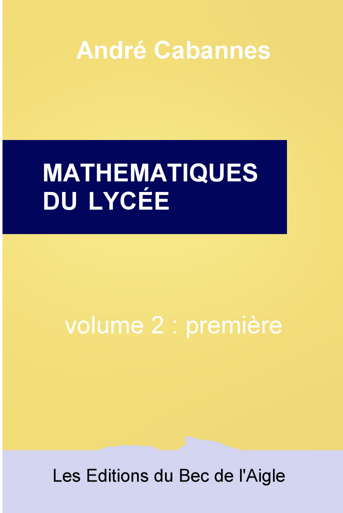
à l'intention des collégiens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2957239183

Cours de mathématiques de seconde

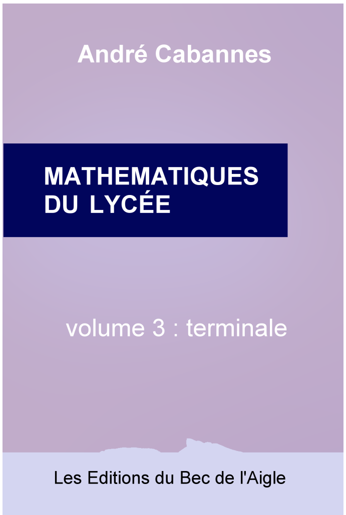
à l'intention des lycéens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2957239191

Cours de mathématiques de première

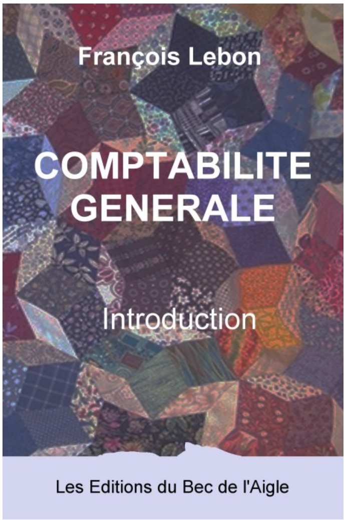
à l'intention des lycéens et de leurs parents



www.amazon.fr/dp/2958738507

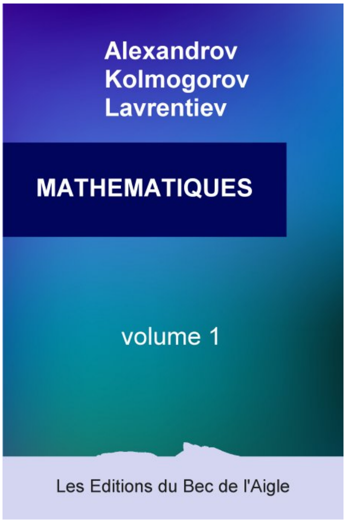
Cours de mathématiques de terminale

à l'intention des lycéens et de leurs parents

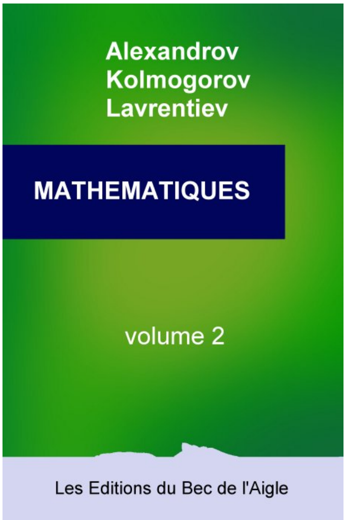


www.amazon.fr/dp/2957239140

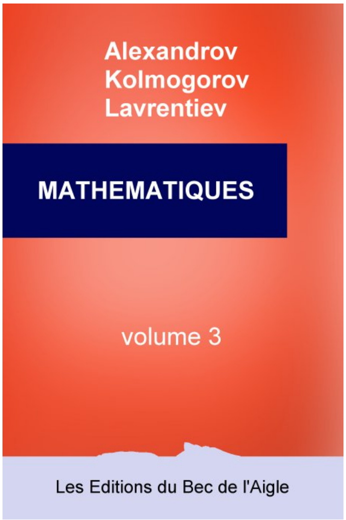
Cours de comptabilité (niveau baccalauréat)



www.amazon.fr/dp/2957239124
Introduction aux mathématiques (niveau baccalauréat)

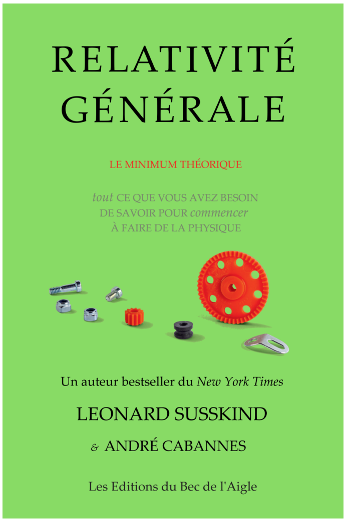


www.amazon.fr/dp/2957239116
Les mathématiques pour l'utilisateur (niveau première année d'université)



www.amazon.fr/dp/2957239132

Les mathématiques pour l'étudiant spécialisé et le chercheur (niveau licence)



www.amazon.fr/dp/2957239175

Cours de physique
(niveau maîtrise)