

## Appendice 1 : Forces centripètes et orbites planétaires

Lenny s'arrêta et regarda attentivement dans l'oculaire du télescope. C'était la première fois qu'il faisait cela. Il vit les anneaux de Saturne et siffla d'admiration. « George, as-tu vu les anneaux ? »

George opina et dit « Oui, oui, je les ai vus. »

Lenny releva la tête et demanda à son ami, « D'où viennent-ils ? »

George dit, « C'est comme la Terre qui tourne autour du Soleil. »

Lenny hocha la tête. « Comment elle tourne ? »

### La force centripète de la gravitation

Un champ de forces centripète (ou central) est un champ dont les forces pointent vers un centre – autrement dit, vers un point de l'espace (voir Figure 1). En outre, la magnitude d'une force du champ ne doit pas dépendre de sa direction.

Autre que leur évidente symétrie de rotation, les champs centripètes n'ont rien de spécial d'un point de vue mathématique. Mais leur rôle en physique et dans l'histoire de la physique est tout à fait particulier. Les premiers problèmes qu'a résolus Newton, liés aux orbites des planètes, étaient des problèmes de champs de forces centripètes. Le mouvement d'un électron tournant autour d'un noyau d'hydrogène est un problème de champ centripète. Deux atomes

tournant l'un autour de l'autre et formant une molécule simple peut se ramener à un problème de champ centripète pointant vers leur centre de gravité. Comme il n'y avait pas assez de temps pour couvrir ces sujets dans les leçons orales dont ce livre est tiré<sup>1</sup>, nous les ajoutons ici en supplément.

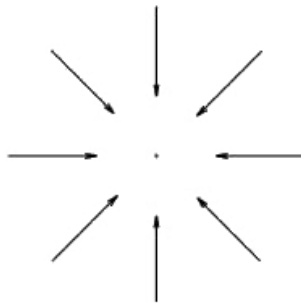


Figure 1 : Champ de forces centripète (ou central).

Regardons le mouvement de la Terre dans son orbite autour du Soleil. D'après les lois de Newton, la force exercée par le Soleil sur la Terre est égale en magnitude et opposée à celle exercée par la Terre sur le Soleil. Et ces forces sont alignées avec la droite passant par les deux corps. Le Soleil étant tellement plus massif que la Terre, son mouvement est négligeable, et il peut être considéré comme fixe. Nous pouvons choisir notre repère de coordonnées dans l'espace avec le Soleil positionné à l'origine,  $x = y = z = 0$ . La Terre, pour sa part, se déplace sur une orbite autour de l'origine. Notons la position de la Terre par le vecteur  $\vec{r}$ , dont les composantes sont  $x, y, z$ . Puisque le Soleil est à l'origine, la force qui s'exerce sur la Terre pointe vers l'origine, comme dans la Figure 1. En outre, la magnitude de la force dépend seulement de la distance  $r$  à l'origine. Nous venons de

---

1. Voir le site web <http://theoreticalminimum.com/>

voir qu'une force ayant ces propriétés est appelée une force centripète ou centrale.

Récrivons le vecteur unitaire de l'Interlude 1 :

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Sous forme d'équation, la définition d'une force centrale est

$$\vec{F} = f(r) \hat{r}$$

où le scalaire  $f(r)$  détermine deux choses. D'une part, sa valeur absolue est la magnitude de la force quand la Terre est à la distance  $r$ . D'autre part, le signe de  $f(r)$  indique s'il s'agit d'une force d'attraction vers le Soleil (signe moins) ou de répulsion par le Soleil (signe plus).

Entre le Soleil et la Terre s'exerce une force gravitationnelle. Selon la loi de la gravitation de Newton, la force entre deux objets de masses  $m_1$  et  $m_2$  a les deux propriétés suivantes :

*N1 : la force est attractive et proportionnelle au produit des masses des objets et d'une constante  $G$ . Aujourd'hui  $G$  est appelée la constante de Newton. Sa valeur est  $G \approx 6,673 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .*

*N2 : la force est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les deux objets.*

En résumé, la force est attractive, et sa magnitude est

$$f(r) = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

En notation vectorielle, la force est donnée par

$$\vec{F}_{grav} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{r}$$

Dans le cas du système Terre-Soleil, on utilise généralement  $M$  pour la masse du Soleil, et  $m$  pour la masse de la Terre. La force gravitationnelle s'exerçant sur la Terre s'écrit donc

$$\vec{F}_{grav} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

L'équation du mouvement de la Terre sur son orbite est l'habituelle  $F = ma$ , soit, avec la formule pour la force gravitationnelle,

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Observez un point intéressant : la masse  $m$  de la Terre s'élimine de part et d'autre de l'équation, si bien que le mouvement de la Terre ne dépend pas de sa masse :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r} \quad (1)$$

Un objet de masse très différente, comme un satellite ou une sonde spatiale, pourrait tourner autour du Soleil sur la même orbite que la Terre. Insistons cependant sur le fait que c'est vrai seulement si la masse du Soleil est tellement importante par rapport à celle de la Terre ou du satellite qu'on puisse négliger son propre mouvement.

## Énergie potentielle gravitationnelle

La force gravitationnelle peut être dérivée d'une fonction d'énergie potentielle. Souvenez-vous que la force associée à

un potentiel d'énergie est l'opposée du gradient du champ scalaire qu'est le potentiel :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

Il n'est pas trop difficile de deviner la forme de  $V$  dans le cas de la gravitation. D'abord, puisque la force est proportionnelle à  $GMm$ , on peut s'attendre que ce soit un facteur multiplicatif dans l'énergie potentielle.

Ensuite, étant donné que la magnitude de la force dépend seulement de la distance  $r$ , on s'attend à ce que  $V(r)$  ne dépende que de  $r$  aussi.

Enfin, puisque qu'on doit différentier  $V(r)$  pour trouver la force, et qu'elle est proportionnelle à  $1/r^2$ , le potentiel d'énergie doit être proportionnel à  $-1/r$ . Donc il est naturel d'essayer le potentiel suivant :

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}$$

Et, de fait, c'est exactement le potentiel d'énergie gravitationnel.

## La Terre se déplace dans un plan

Nous avons mentionné plus haut que dans un problème avec une force centrale, il y a une symétrie de rotation par rapport à l'origine. Nous avons expliqué les conséquences de l'invariance d'un système par symétrie de rotation dans la leçon 7 : c'est la conservation du moment angulaire (ou moment cinétique). Supposons qu'à un certain instant la Terre

ait la position  $\vec{r}$  et la vitesse  $\vec{v}$ . Regardons le plan parallèle à ces deux vecteurs et passant par le Soleil – c'est-à-dire le plan dans lequel à cet instant-là se déplace la Terre.

Le moment angulaire  $\vec{L}$  est colinéaire au produit vectoriel  $\vec{r} \times \vec{v}$ , donc il est perpendiculaire à la fois à  $\vec{r}$  et à  $\vec{v}$  (voir Figure 2). La loi de conservation nous dit que le vecteur  $\vec{L}$  ne change pas. On en conclut que le plan de l'orbite terrestre (appelé aussi plan de l'écliptique) ne change jamais. Dit plus simplement : le mouvement de la Terre se déroule dans un plan fixe passant par le Soleil. Sachant cela, nous pouvons choisir nos coordonnées cartésiennes de sorte que ce soit le plan  $x, y$ . Le problème est donc en réalité à deux dimensions, la troisième  $z$  ne jouant aucun rôle.

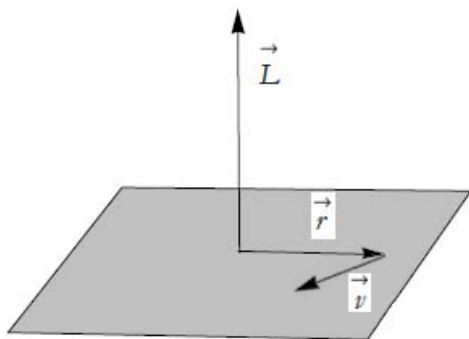


Figure 2 : Relation entre moment angulaire  $\vec{L}$ , vecteur-position  $\vec{r}$  et vecteur-vitesse  $\vec{v}$ .

## Coordonnées polaires

Nous pourrions travailler en coordonnées cartésiennes  $x, y$ , mais les problèmes avec une force centrale sont beaucoup

plus faciles à résoudre en coordonnées polaires  $r, \theta$  :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

L'énergie cinétique de la Terre est simplement

$$T = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) \quad (2)$$

L'énergie potentielle est encore plus simple – elle ne dépend pas de  $\theta$  :

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} \quad (3)$$

### Équations du mouvement

Comme souvent, la façon la plus simple de parvenir aux équations du mouvement est en passant par le lagrangien. Rappelez-vous que le lagrangien est la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle,  $L = T - V$ . En utilisant les formules (2) et (3) ci-dessus, le lagrangien en coordonnées polaires est

$$L = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{GMm}{r} \quad (4)$$

Les équations d'Euler-Lagrange du mouvement,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r}$$
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

prennent la forme explicite

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{GM}{r^2} \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad (6)$$

Cette deuxième équation a la forme d'une loi de conservation. Sans surprise, c'est simplement la conservation du moment cinétique. (Pour être précis, c'est la conservation de la composante  $z$  du vecteur moment cinétique.) Il est traditionnel de noter le moment cinétique par la lettre  $L$ , mais comme on l'utilise déjà pour le lagrangien, nous utiliserons  $p_\theta$ . Si nous connaissons  $p_\theta$  à un moment donné, alors nous le connaissons tout le temps. On peut écrire

$$mr^2\dot{\theta} = p_\theta \quad (7)$$

et le traiter comme une constante connue.

Ceci nous permet d'exprimer la vitesse angulaire en fonction de la distance de la Terre au Soleil. L'équation (7) se réécrit

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad (8)$$

Nous reviendrons à cette relation entre la vitesse angulaire et la distance radiale, mais tournons-nous d'abord vers l'équation pour  $r$ , c'est-à-dire l'équation (5) ci-dessus. On avait éliminé la masse  $m$  de la Terre qui se simplifiait de part et d'autre, mais réintroduisons-la

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r^2} \quad (9)$$

et utilisons l'équation (8) pour remplacer  $\dot{\theta}$  par sa valeur en fonction de  $p_\theta$ ,  $m$  et  $r$ . Cela donne

$$m\ddot{r} = \frac{(p_\theta)^2}{mr^3} - \frac{GMm}{r^2} \quad (10)$$



Cette équation pour  $r$  a une interprétation intéressante. Elle apparaît comme une équation pour une seule coordonnée sous l'influence d'une force "effective" combinée :

$$F_{effective} = \frac{(p_\theta)^2}{mr^3} - \frac{GMm}{r^2} \quad (11)$$

Le terme  $-\frac{GMm}{r^2}$  est juste la force d'attraction gravitationnelle, mais à première vue l'autre terme peut surprendre. Ce n'est, en fait, rien d'autre que la force centrifuge fictive éprouvée par n'importe quelle particule en mouvement dont la direction avec l'origine change.

Il est utile de raisonner comme si l'équation (11) décrivait réellement une particule en mouvement le long d'un axe sous l'influence d'une force totale somme de la force gravitationnelle et de la force centrifuge. Bien sûr, pour chaque valeur du moment cinétique nous devrions réajuster  $p_\theta$ , mais comme  $p_\theta$  est conservé, on peut le traiter comme une constante.

Étant donné la force effective, nous pouvons même construire une fonction d'énergie potentielle effective qui prend en compte la gravité et la force centrifuge :

$$V_{effective} = \frac{(p_\theta)^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \quad (12)$$

Vous pouvez aisément vérifier que

$$F_{effective} = -\frac{dV_{effective}}{dr}$$

Si on regarde seulement ce qui se passe le long du rayon, on peut prétendre que le mouvement, repéré par le scalaire  $r$ , est celui d'une particule dont l'énergie cinétique a la forme

habituelle,  $\frac{m\dot{r}^2}{2}$ , l'énergie potentielle est  $V_{effective}$ , et le lagrangien est

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{(p_\theta)^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r} \quad (13)$$

### Diagrammes de l'énergie potentielle effective

Pour sentir ce qui se passe dans un problème et développer une intuition, c'est souvent une bonne idée de dessiner un graphe de l'énergie potentielle. Par exemple, les points d'équilibre (où le système peut être au repos) sont identifiés comme des points stationnaires (minimum ou maximum) du potentiel. Pour comprendre le mouvement dans un champ de forces centripètes, on fait exactement pareil, sauf qu'on considère l'énergie potentielle effective. Dessinons les deux termes de l'énergie potentielle effective donnée par l'équation (12), voir Figure 3.

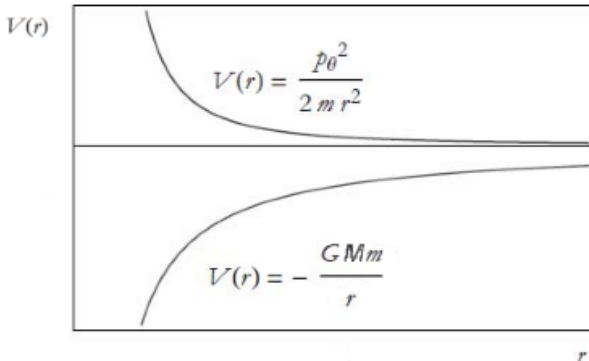


Figure 3 : Diagramme d'énergie potentielle pour la force centrifuge et la force gravitationnelle.

Les deux termes sont de signe opposé, le terme pour la force centrifuge étant positif, et celui pour la force de gravitation négatif. La raison en est que la force de gravitation est attractive tandis que la force centrifuge repousse la particule de l'origine. Près de l'origine le terme provenant de la force centrifuge (pas la force elle-même) est le plus grand, mais aux grandes valeurs de  $r$  le terme provenant de la gravité est le plus grand. Quand on additionne les deux termes de l'énergie potentielle effective cela donne la Figure (4) ci-dessous.

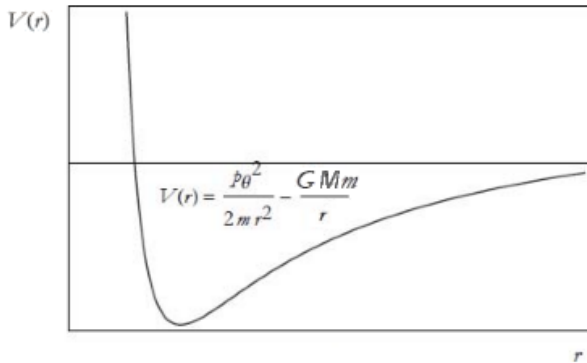


Figure 4 : Diagramme d'énergie potentielle additionnant les potentiels de la force centrifuge et de la force gravitationnelle.

Nous voyons maintenant clairement que l'énergie potentielle effective a un minimum. Cela peut sembler étrange ; nous ne nous attendrions pas à avoir un point d'équilibre où la Terre est au repos. Mais il ne faut pas oublier que nous sommes en train de regarder seulement ce qui se passe le long du rayon  $r$ , en ignorant la coordonnée angulaire  $\theta$ . Il se trouve que pour chaque moment cinétique, il y a une trajectoire qui maintient constante la distance radiale entre la

Terre et le Soleil, pendant qu'elle est en mouvement de rotation. Ce sont bien sûr les orbites circulaires. Sur le graphe de  $V_{effective}$ , une orbite circulaire est représentée par une particule fictive positionnée au point minimum.

Calculons la valeur de  $r$  à ce minimum. Il suffit de différentier  $V_{effective}$  et d'écrire que la dérivée est égale à zéro. C'est un calcul facile laissé à la lectrice ou au lecteur. Vous trouverez qu'au minimum la valeur de  $r$  est

$$r = \frac{(p_\theta)^2}{GMm^2} \quad (14)$$

L'équation (14) donne le rayon de l'orbite terrestre (en faisant l'hypothèse qu'elle est circulaire, ce qui n'est pas tout à fait exact), étant donné son moment cinétique.

## Lois de Kepler

Tycho Brahe (1546-1601) était un astronome danois, qui à l'aide d'un long bâton et de rapporteurs pour mesurer les angles, construisit les meilleures tables des mouvements du système solaire qui fussent, avant l'invention des télescopes. En tant que théoricien, ses idées étaient confuses. Mais c'était un observateur extrêmement méticuleux. L'héritage qu'il laissa sont ses tables.

Ce fut l'assistant de Brahe, l'astronome allemand Johannes Kepler (1571-1630), qui les mit à profit. Il prit les enregistrements des observations et les fit correspondre à des modèles géométriques et mathématiques simples. Il n'avait aucune idée des raisons pour lesquelles les planètes se déplaçaient d'après ses modèles – selon les standards modernes, ses théories du *pourquoi* étaient au mieux étranges – mais les lois qu'il découvrit étaient correctes.

La grande réussite de Newton – en un sens, le point de départ de la physique moderne – fut d’expliquer les lois de Kepler sur le mouvement des planètes comme une conséquence de ses propres lois du mouvement, parmi lesquelles la loi de la gravitation en 1 sur  $r^2$ . Rappelons les trois lois de Kepler.

*K1 : Chaque planète a pour orbite une ellipse dont le Soleil occupe un des deux foyers.*

*K2 : Pour chaque planète, une ligne la joignant au Soleil balaie en des temps égaux des aires égales.*

*K3 : Pour chaque planète, le carré de sa période orbitale est dans une proportion fixe avec le cube du demi grand axe de son orbite.*

Commençons par K1, la loi des ellipses. Nous avons expliqué plus haut que les orbites circulaires correspondaient au point d’équilibre au minimum de l’énergie potentielle effective. Mais il existe d’autres mouvements possibles du système effectif à une dimension (c’est-à-dire, où on ne regarde que  $r$ ) dans lesquels la distance avec le Soleil oscille autour du minimum, qui est le rayon de l’orbite circulaire. Dans un mouvement de ce type, la Terre se rapproche et s’éloigne périodiquement du Soleil. Pendant ce temps, comme elle a un moment cinétique  $L$ , elle doit aussi tourner autour du Soleil. Autrement dit, l’angle  $\theta$  s’accroît avec le temps. Il se trouve que la trajectoire qui en résulte, dans laquelle la distance oscille et la position angulaire parcourt périodiquement  $2\pi$ , est elliptique. La Figure 5 montre une telle orbite. Si vous parcourez l’orbite et ne mesurez que la distance au foyer (le point noir), la Terre s’approchera et s’éloignera

alternativement comme si elle oscillait dans le potentiel effectif.

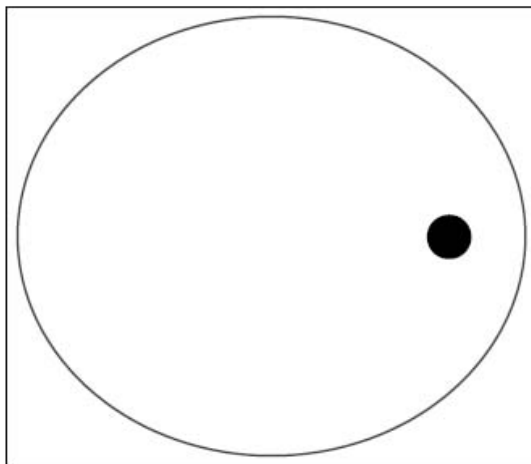


Figure 5 : orbite elliptique de la Terre autour du Soleil  
(l'excentricité réelle est bien moindre).

Prouver que le mouvement est précisément une ellipse est un peu difficile, et nous ne le ferons pas ici.

Regardons à nouveau le mouvement d'une particule sur la courbe d'énergie potentielle effective (Figure 4). On va imaginer une particule avec tellement d'énergie qu'elle pourrait s'échapper complètement du creux d'énergie potentielle effective. Dans une telle orbite, la particule arrive de l'infini, rebondit en quelque sorte en suivant la courbe là où le potentiel remonte près de  $r = 0$ , puis repart dans l'autre sens vers l'infini pour ne jamais revenir. Des trajectoires comme celle-là existent certainement ; on les appelle les trajectoires hyperboliques.

Passons à K2 : la loi des aires. Selon cette loi, si on trace un rayon reliant la Terre et le Soleil, quand notre planète (ou n'importe quelle planète) parcourt son orbite et que le rayon balaie la surface de l'ellipse, l'aire balayée par unité de temps est toujours la même. Cela ressemble à une loi de conservation, et de fait c'en est une – la conservation du moment angulaire. Retournons à l'équation (7) et divisons de part et d'autre par  $m$  :

$$r^2\dot{\theta} = \frac{p\theta}{m} \quad (15)$$

Imaginons une ligne radiale en train de balayer la surface de l'ellipse. Pendant un intervalle de temps  $\delta t$ , l'angle varie d'une quantité  $\delta\theta$ .

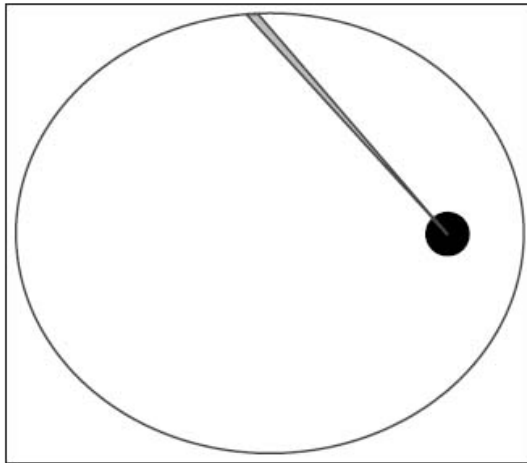


Figure 6 : aire balayée pendant un intervalle de temps  $\delta t$  par une ligne reliant la Terre au Soleil.

L'étroit triangle balayé durant le temps  $\delta t$ , sur la Figure 6,

a pour aire

$$\delta A = \frac{1}{2} r^2 \delta \theta$$

Vous pouvez vous en convaincre en observant que l'aire du triangle est égale à la moitié de sa base ( $r\delta\theta$ ) multipliée par sa hauteur ( $r$ ). Si on divise par le petit intervalle de temps  $\delta t$ , en passant à la limite on obtient

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \dot{\theta}$$

Maintenant en utilisant la conservation du moment angulaire dans la forme de l'équation (15), nous trouvons

$$\frac{dA}{dt} = \frac{p_\theta}{2m} \quad (16)$$

Puisque ni  $p_\theta$  ni  $m$  ne varient, nous voyons que le taux de balayage par rapport au temps est constant. Et, en outre, il est simplement proportionnel au moment angulaire de l'orbite.

Enfin, nous arrivons à K3 : *le carré de la période orbitale d'une planète est dans une proportion fixe avec le cube du demi grand axe de son orbite.*

La loi de Kepler s'applique à n'importe quelle orbite planétaire elliptique, mais nous n'allons la prouver que dans le cas des orbites circulaires. Il y a de nombreuses façons de le faire, mais la plus simple est d'utiliser la loi de Newton,  $F = ma$ . La force s'exerçant sur la Terre en orbite circulaire est simplement la force gravitationnelle dont la magnitude est

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

D'autre part dans la leçon 2 nous avons calculé l'accélération d'un objet se déplaçant sur une orbite circulaire. Nous



avons en magnitudes

$$a = \omega^2 r \quad (17)$$

où  $\omega$  est la vitesse angulaire.

**Exercice 1 : Montrer que l'équation (17) ci-dessus est une conséquence des équations (3) de la leçon 2.**

La loi de Newton devient

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r$$

Donc on peut écrire

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3}$$

La dernière étape est d'observer que la période orbitale – le temps qu'il faut pour parcourir une orbite complète – est liée simplement à la vitesse angulaire. En utilisant la lettre grecque tau,  $\tau$ , pour la période, on a

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

(Traditionnellement on utiliserait  $T$  pour la période, mais nous l'utilisons déjà pour l'énergie cinétique.)

Enfin, en combinant les différentes formules ci-dessus on arrive à

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

On a bien établi que le carré de la période est proportionnel au cube du rayon.